

Percorso di eccellenza – Primo anno – A.A. 2016/17

L'attività didattica prevista per il primo anno del percorso di eccellenza nell'anno accademico 2016/17 è strutturata in 4 minicorsi, secondo il seguente programma:

Titolo minicorso	Ambito disciplinare	Docente	Lezione introduttiva	Attività laboratoriali
Somme di quadrati e generalizzazioni	Teoria dei numeri, algebra	Prof. Lea Terracini	28/2	7/3, 14/3
Invarianti nella teoria dei nodi	Geometria, topologia algebrica	Prof. Alberto Albano	21/3	28/3, 4/4
Ricorsione e Funzioni Generatrici: come imparare a contare in fretta	Algebra, matematica discreta	Prof. Ferdinando Arzarello	2/5	9/5, 16/5
Integrale di Riemann-Stieltjes	Analisi matematica	Prof. Paolo Caldiroli	23/5	30/5, 6/6

Nota bene: Tutte le lezioni introduttive si svolgono nell'orario 16:30-18:30 in aula A e sono accessibili a tutti gli studenti del Corso di Laurea in Matematica.

Tutte le attività laboratoriali si svolgono nell'orario 16:30-18:30 in aula S e sono accessibili ai soli studenti ammessi al percorso di eccellenza.

Le attività laboratoriali saranno seguite dai dott. Emma Perracchione e Fabio Roman.

Minicorso 1: Somme di quadrati e generalizzazioni

Ambito disciplinare: Teoria dei numeri, algebra

Docente: Prof. Lea Terracini

Sommario

Questo minicorso ha come oggetto principale il teorema di Fermat che caratterizza i numeri interi che sono somma di quadrati. Si tratta di un risultato non banale particolarmente interessante in teoria dei numeri in quanto mette in relazione la struttura additiva e quella moltiplicativa dei numeri interi. Il teorema è suscettibile di diverse dimostrazioni, alcune delle quali utilizzano strumenti accessibili a studenti al primo anno della Laurea Triennale in Matematica: congruenze, forme quadratiche, interi di Gauss, conteggio dei punti interi in sottoinsiemi convessi del piano euclideo, serie di Farey.

Inoltre, l'enunciato si presta naturalmente a generalizzazioni in diverse direzioni, che aprono spiragli verso sviluppi più avanzati, per esempio i problemi di Waring, il principio locale-globale, la geometria diofantea e l'aritmetica dei campi di numeri.

Nella lezione introduttiva verrà introdotto il problema, illustrati i punti significativi da dimostrare e discusse alcune generalizzazioni dell'enunciato e delle idee che ne sono alla base. In quell'occasione verranno assegnati agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, dei compiti: studio di dimostrazioni, approfondimenti e generalizzazioni di risultati presentati nella lezione introduttiva.

L'esposizione e la discussione del lavoro svolto dagli studenti saranno l'oggetto degli incontri successivi.

Bibliografia

- Hardy, Wright. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford. 1954 (Ch. XX, XXI)
- Sierpinski. Elementary Theory of Numbers. North Holland. 1985 (Ch. XI)

Minicorso 2: Invarianti nella teoria dei nodi

Ambito disciplinare: Geometria, topologia algebrica

Docente: Prof. Alberto Albano

Sommario

Nella lezione introduttiva verrà presentato il problema della classificazione dei nodi nello spazio euclideo tridimensionale. Verranno messi in luce gli aspetti essenziali di un problema di classificazione: trovare abbastanza esempi e dare una procedura per stabilire quando due esempi sono distinti.

Verrà presentata una storia del problema, dalle origini nella Fisica della seconda metà dell'Ottocento da parte di Lord Kelvin, lo studio dei matematici negli anni 1910-1930 e la grande rinascita a partire dal 1980 con l'introduzione di nuove tecniche, il rinnovato interesse da parte dei fisici e le interessanti applicazioni in biologia.

Nella lezione introduttiva si darà una panoramica delle congetture principali enunciate agli inizi della teoria e dei metodi adottati per affrontarle. Verranno definiti alcuni invarianti in grado di distinguere nodi diversi.

Negli incontri successivi si impareranno metodi per rappresentare i nodi in modo efficiente e quindi calcolare gli invarianti. Verranno testate le congetture e i teoremi visti nella lezione introduttiva e, sulla base dei calcoli fatti e degli esempi visti, si proverà a enunciare qualche nuova congettura.

Bibliografia

- Colin Adams, *The Knot Book*, W. H. Freeman and Company, 1994. Capp. 1, 2, 3, 6
- Alexei Sossinsky, *Nodi: genesi di una teoria matematica*, Bollati Boringhieri, 2000

Minicorso 3: Ricorsione e Funzioni Generatrici: come imparare a contare in fretta

Ambito disciplinare: Algebra, matematica discreta

Docente: Prof. Ferdinando Arzarello

Sommario

Nella lezione introduttiva si presenteranno dapprima alcuni esempi di conteggi la cui soluzione richiede di risolvere delle relazioni di ricorrenza ottenendo la loro forma chiusa; si introdurranno brevemente le equazioni caratteristiche delle relazioni di ricorrenza lineari. Successivamente, si introdurrà, sempre a partire da esempi, la nozione di Funzione Generatrice come strumento che permette di risolvere intere classi di problemi di conteggio. Negli incontri successivi si daranno problemi combinatori vari da risolvere usando le funzioni generatrici in modo che le tecniche e le nozioni relative siano via via approfondite e ampliate: in particolare si introdurranno le convoluzioni e le F.G. esponenziali.

Bibliografia

- Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, *Concrete Mathematics*, Reading, (MA): Addison-Wesley, 1988. Capp. 1 e 7 (contiene una serie meravigliosa di esercizi graduati che potranno essere usati nel corso).
- Maurer, S.B., Ralston, A. *Discrete Algorithmic Mathematics*, Wellesley (MA): Peters Ltd., 2005. Esiste la traduzione italiana, *Matematica Discreta*, Milano: Hoepli, 1992
- Wilf, H.S., *Generatingfunctionology*, Wellesley (MA): Academic Press, 2004. Una versione è liberamente scaricabile dal sito: <https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>
- *Lezioni di Matematica Discreta* tenute da R. Dvornicich e G. Gaiffi nell'aa 2014-15 all'Università di Pisa. Raccolte da O. Papini. Liberamente scaricabili da: <http://www.dm.unipi.it/~gaiffi/papers/matdiscr.pdf>

Minicorso 4: Integrale di Riemann-Stieltjes

Ambito disciplinare: Analisi matematica

Docente: Prof. Paolo Caldirolì

Sommario

Nella lezione introduttiva verrà presentato l'integrale di Riemann-Stieltjes con le sue principali proprietà: linearità, formula di integrazione per parti, riduzione dell'integrale di RS al classico integrale di Riemann, riduzione dell'integrale di RS ad una somma finita, formula di sommazione di Eulero, condizioni per l'esistenza dell'integrale di RS, il caso di funzioni integranti a variazione limitata.

Negli incontri successivi, gli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, sono chiamati ad esporre e discutere problemi, esercizi o semplici dimostrazioni di risultati presentati nella lezione introduttiva. Il materiale di lavoro è tratto dalle referenze in bibliografia.

Bibliografia

- Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison Wesley (1974), Ch. 6-7
- Robert C. Bartle: *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons (1964), Ch. 22.
- Walter Rudin, *Principi di Analisi Matematica*, McGraw Hill (1991), Cap. 6