



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TORINO

Facoltà di Scienze M.F.N.

Corso di Studi in Matematica

prof. Franco Pastrone

DISPENSE DEL CORSO DI
MECCANICA DEL CONTINUO

Anno accademico 2007/2008

Capitolo 1

Richiami di calcolo tensoriale

Lo spazio vettoriale in considerazione è uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale E_3 e lo spazio affine associato verrà indicato con \mathcal{E}_3 .

Definizione 1.1 *Definiamo tensore doppio S su E_3 , una forma lineare di E_3 in E_3 :*

$$\begin{aligned} S : E_3 &\rightarrow E_3 \\ \mathbf{u} \in E_3 &\mapsto \mathbf{v} = S\mathbf{u} \in E_3 \end{aligned}$$

L'insieme di tutti i tensori doppi così definiti prende il nome di spazio dei tensori doppi misti su E_3 ed ha la struttura di spazio vettoriale.

Introdotte le seguenti operazioni di somma tra tensori e prodotto di un tensore per uno scalare:

$$\begin{aligned} (S + T)\mathbf{v} &= S\mathbf{v} + T\mathbf{v} & \forall \mathbf{v} \in E_3 \\ (\alpha S)\mathbf{v} &= \alpha(S\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in E_3, \forall \alpha \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

il tensore nullo θ :

$$\theta\mathbf{v} = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{v} \in E_3, \mathbf{o} \text{ il vettore nullo}$$

ed il tensore identico I :

$$I\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in E_3;$$

si può verificare che vengono soddisfatte tutte le proprietà che caratterizzano uno spazio vettoriale. Tale spazio è indicato con T_1^1 . In maniera analoga, si possono introdurre lo spazio dei tensori doppi covarianti T_2^0 come l'insieme delle applicazioni lineari:

$$S : E_3 \rightarrow E_3^*, \quad E_3^* \text{ duale di } E_3,$$

e lo spazio dei tensori doppi controvarianti T_0^2 come l'insieme delle applicazioni lineari:

$$S : E_3^* \rightarrow E_3.$$

L'insieme delle applicazioni lineari:

$$S : E_3^* \rightarrow E_3^*$$

prende ancora il nome di spazio dei tensori misti T_1^1 .

Un tensore doppio si dirà misto, totalmente covariante o totalmente controvariante a seconda che appartenga a T_1^1 , a T_1^1 , a T_2^0 o a T_0^2 . Nel seguito indicheremo con Lin lo spazio dei tensori doppi, genericamente, quando non si voglia precisare se si tratti dello spazio dei tensori covarianti, controvarianti o misti:

$$\text{Lin} = T_1^1 \cup T_2^0 \cup T_0^2 \cup T_1^1.$$

Osservazione

Essendo E_3 un spazio euclideo, esiste l'isomorfismo naturale b tra E_3 e il suo duale:

$$\begin{aligned} b : E_3 &\rightarrow E_3^* \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u}^b \end{aligned}$$

definito da:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^b \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_3$$

e l'isomorfismo inverso \sharp :

$$\begin{aligned} \sharp : E_3^* &\rightarrow E_3 \\ \theta &\mapsto \theta^\sharp. \end{aligned}$$

Identificando, tramite tale isomorfismo, un vettore e la sua forma corrispondente, con abuso di notazione, possiamo scrivere:

$$\langle \mathbf{v}, \theta \rangle = \mathbf{v} \cdot \theta, \quad \mathbf{v} \in E_3, \theta \in E_3^*,$$

invece della corretta notazione:

$$\langle \mathbf{v}, \theta \rangle = \mathbf{v} \cdot \theta^\sharp$$

e, in generale:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

senza preoccuparci se \mathbf{u} e \mathbf{v} siano vettori oppure forme. Quindi, d'ora in poi, invece delle valutazioni, adotteremo sempre la scrittura di prodotto scalare,

omettendo, quando si tratti di un prodotto di un vettore per una forma, i segni di bemolle b o diesis \sharp .

Consideriamo una base $\{\mathbf{e}_i\}$ in E_3 e la sua duale $\{\mathbf{e}^j\}$ in E_3^* ; coerentemente con la notazione ora introdotta, scriveremo:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j \rangle &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j, \\ \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} \\ \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j \rangle &= \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ij}, \end{aligned}$$

dove le g_{ij} sono le componenti della forma bilineare simmetrica definita come metrica su E_3 e le g^{ij} sono ad esse legate dalla seguente condizione:

$$g^{ij}g_{jh} = \delta_h^i.$$

Se la base $\{\mathbf{e}_i\}$ (o $\{\mathbf{e}^j\}$) è ortonormale, allora $g_{ij} = \delta_{ij}$ (ovvero $g^{ij} = \delta^{ij}$). Si ricordi che viene osservata la convenzione di Einstein secondo cui gli indici ripetuti sottintendono la somma su di essi:

$$g^{ij}g_{jh} = \sum_j g^{ij}g_{jh} = \delta_h^i$$

e che δ_h^i è il simbolo di Kronecker.

Volendo scrivere in componenti un vettore $\mathbf{u} \in E_3$ e la sua corrispondente forma nell'isomorfismo bemolle, si ha:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{u}^b = u_i \mathbf{e}^i.$$

Si è già visto che vettori e forme possono essere identificati, dunque si può scrivere:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{u}^b \Leftrightarrow u^i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}^i.$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per \mathbf{e}_j , ovvero per \mathbf{e}^j , si ha rispettivamente: $u_i = g_{ij}u^j$ e $u^i = g^{ij}u_j$.

Un vettore \mathbf{u} può quindi avere una duplice rappresentazione e le u_i prendono il nome di componenti covarianti e le u^i quello di componenti contravarianti del vettore \mathbf{u} . (Ovviamente $u^i = \delta_j^i u^j$ e $u_i = \delta_i^j u_j$).

Negli spazi tensoriali prima definiti, valgono le seguenti operazioni:

$$\forall S, T, \dots \in \text{Lin}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_3$$

(oppure $\in E_3^*$, a seconda del tipo di tensore):

- Prodotto tra tensori:

$$ST \Leftrightarrow (ST)\mathbf{v} = S(T\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in E_3.$$

In generale non vale la proprietà commutativa: $ST \neq TS$. Si definisce di conseguenza la *potenza del tensore*: $S^2 = SS, S^3 = S(SS)$, ecc...

- Trasposizione: S^T è il trasposto di S se: $S\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot S^T\mathbf{v}$. Più specificamente l'espressione rimane invariata pur considerando spazi tensoriali diversi, intendendo però che se:

$$\begin{aligned} S \in T_2^0 & \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_3 \\ S \in T_0^2 & \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_3^* \\ S \in T_1^1 & \quad \mathbf{u} \in E_3, \mathbf{v} \in E_3^* \\ S \in \dot{T}_1^1 & \quad \mathbf{u} \in E_3^*, \mathbf{v} \in E_3. \end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- 1) $(S + T)^T = S^T + T^T$
- 2) $(ST)^T = T^T S^T$
- 3) $(S^T)^T = S$.

Definizione 1.2 *Un tensore si dice simmetrico se $S = S^T$, antisimmetrico se $S = -S^T$. L'insieme dei tensori simmetrici viene indicato con Sym , quello dei tensori antisimmetrici con Skw .*

- Decomposizione di S: ogni tensore doppio si decompone univocamente nella somma di un tensore simmetrico E e di uno antisimmetrico W : $S = E + W$, essendo:

$$E = \frac{1}{2}(S + S^T) \quad \text{detto parte simmetrica di } S, \text{ (SymS)}$$

$$W = \frac{1}{2}(S - S^T) \quad \text{detto parte antisimmetrica di } S, \text{ (SkwS)}$$

- Prodotto tensoriale $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ tra due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E_3$:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{v} \in E_3.$$

Valgono le seguenti proprietà:

i) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$. Infatti è:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{b} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})\mathbf{v}, \end{aligned}$$

da cui $(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T$.

ii) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}$, come è facile verificare. Tale definizione si estende in maniera naturale alle forme.

- Traccia di un tensore doppio come l'applicazione lineare di Lin in \mathbb{R} , indicata con tr :

$$\text{tr} : \text{Lin} \rightarrow \mathbb{R} : \forall S \in \text{Lin} \mapsto \text{tr}S \in \mathbb{R}$$

tale che $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_3$ (oppure $\in E_3^*$), è:

$$\text{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- 1) $\text{tr}S^T = \text{tr}S$
- 2) $\text{tr}(ST) = \text{tr}(TS)$.

di facile dimostrazione.

- Prodotto scalare tra due tensori di Lin come il numero reale definito dalla:

$$S \cdot T = \text{tr}(S^T T) = I \cdot S^T T,$$

essendo I il tensore identico.

Finora si sono date definizioni e proprietà in termini intrinseci. Poiché interessa dal punto di vista operativo lavorare in componenti, introduciamo il concetto di componenti di un tensore rispetto ad una base di Lin assegnata. Considerata una base $\{\mathbf{e}_i\}$ in E_3 e la sua duale $\{\mathbf{e}^j\}$ in E_3^* , assegnato un tensore $S \in T_1^1$, si chiamano componenti del tensore S i numeri:

$$S_i^j \equiv S\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j, \quad S_i^j \equiv S\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i \Leftrightarrow S\mathbf{e}_i = S_i^j \mathbf{e}_j, \quad S\mathbf{e}^j = S_i^j \mathbf{e}^i.$$

Analogamente, le componenti di $S \in T_0^2$ sono:

$$S^{ij} \equiv S\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \Leftrightarrow S\mathbf{e}^i = S^{ij} \mathbf{e}_j$$

e quelle di $S \in T_2^0$:

$$S_{ij} \equiv S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \Leftrightarrow S \mathbf{e}_i = S_{ij} \mathbf{e}^j.$$

Reciprocamente, note le componenti di un tensore, relativamente ad una base di E_3 , è noto il tensore:

$$S = S_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j, \quad S \in T_1^1;$$

$$S = S_j^i \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i, \quad S \in T_1^1;$$

$$S = S^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad S \in T_0^2;$$

$$S = S_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad S \in T_2^0;$$

$S = S_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \Leftrightarrow S_{ij} = S \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i$ ossia gli S_{ij} prima definiti sono proprio le componenti di S nella base $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$, infatti

$$\begin{aligned} S \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i &= S_{hk} \mathbf{e}^h \otimes \mathbf{e}^k \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = S_{hk} (\mathbf{e}^h \otimes \mathbf{e}^k) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = \\ &= S_{hk} (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}^h \cdot \mathbf{e}_i = S_{hk} \delta_j^k \delta_i^h = S_{ij}. \end{aligned}$$

I tensori $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j\}$ costituiscono una base in T_1^1 ; e così $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j\}$ una base in T_1^1 , $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ una base in T_0^2 e $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ una base in T_2^0 .

Ne segue che gli spazi tensoriali costruiti su E_3 sono spazi vettoriali di dimensione 9.

Si possono così definire i tensori metrici:

$$g = g_{ij} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) \in T_2^0$$

$$G = g^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \in T_0^2$$

ed il tensore di Kronecker:

$$\delta = \delta_j^i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) \in T_1^1,$$

$$\delta = \delta_j^i (\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i) \in T_1^1$$

Si osservi che è:

$$\delta \mathbf{v} = \delta_j^i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) \mathbf{v} = \delta_j^i (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_i = \delta_j^i v^j \mathbf{e}_i = v^i \mathbf{e}_i = \mathbf{v},$$

dunque $\delta = I$, cioè il tensore di Kronecker non è altri che l'identità in T_1^1 (e analogamente in T_2^0 o in T_0^2 o in T_1^1).

In generale se le basi sono ortonormali la metrica si riduce all'identità:

$$\sum_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \sum_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i) = \sum_i (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_i) = \sum_i (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^i) = I.$$

La definizione qui data di tensore si traduce, in termini di componenti, nelle relazioni:

$$v_i = S_i^j u_j, \quad v^i = S_j^i u^j, \quad v^i = S^{ij} u_j, \quad v_i = S_{ij} u^j$$

a seconda che: $S \in T_1^1$, $S \in T_1^1$, $S \in T_0^2$, $S \in T_2^0$, e che \mathbf{u} e \mathbf{v} appartengano a E_3 o E_3^* .

Tra i tensori di spazi tensoriali diversi si stabilisce così una corrispondenza, indotta dall'isomorfismo canonico tra E_3 ed E_3^* e ottenuta applicando la metrica. Infatti si ha:

$$S^{ij} = g^{ih} S_h^j, \quad \text{ovvero } S_{ij} = g_{ih} S_j^h,$$

$$S^{ij} = g^{ih} g^{jk} S_{hk},$$

$$S_{ij} = g_{ih} g_{jk} S^{hk},$$

$$S_i^j = g^{jh} S_{ih}, \dots$$

Ad un tensore doppio si può sempre associare in modo univoco una matrice e viceversa: $S \leftrightarrow [S] \equiv [S_i^j]$, fissata la base $\{\mathbf{e}_i\}$ in E_3 . Tale matrice rappresenta quindi le componenti del tensore rispetto alla base fissata, non il tensore stesso. Valgono, ovviamente, le seguenti proprietà:

- 1) $S^T \leftrightarrow [S]^T$
- 2) $ST \leftrightarrow [S][T]$ (prodotto righe per colonne)

Si definisce così in modo naturale il determinante di un tensore doppio:

$$\det S = \det[S] = \det(S_i^j).$$

Le operazioni tra tensori prima introdotte si possono esplicitare in termini di componenti, per $S \in T_2^0$ (ma si può facilmente estendere tale rappresentazione agli altri spazi).

- Somma:

$$(S + T)_{ij} = S_{ij} + T_{ij}.$$

- Prodotto per uno scalare:

$$(\alpha S)_{ij} = \alpha S_{ij}.$$

- Prodotto tra tensori:

$$(ST)_{ij} = g^{hk} S_{ih} T_{kj} = S_{ih} T_j^h,$$

essendo $T_j^h = g^{hk} T_{kj}$. Se $\{\mathbf{e}^j\}$ è ortonormale $g^{hk} = \delta^{hk}$, da cui:

$$(ST)_{ij} = \sum_{h=1}^3 S_{ih} T_{hj}.$$

- Trasposizione:

$$(S^T)_{ij} = S_{ji} \Rightarrow S^T T = W \Leftrightarrow W_{ij} = (S^T)_{ih} T_j^h = S_{hi} T_j^h$$

(prodotto colonne per colonne tra S e T).

- Simmetrizzato di S :

$$\text{Sym} S : E_{ij} = \frac{1}{2} (S_{ij} + S_{ji}).$$

- Antisimmetrizzato di S :

$$\text{Skw} S : W_{ij} = \frac{1}{2} (S_{ij} - S_{ji}).$$

- Decomposizione di S in parte simmetrica ed in parte antisimmetrica:

$$S = E + W \Leftrightarrow S_{ij} = E_{ij} + W_{ij}.$$

- Traccia di un tensore: l'espressione esplicita della traccia in termini delle componenti S_i^j di $S \in T_1^1$ segue la definizione:

$$\text{tr} S = \text{tr}(S_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = S_i^j \text{tr}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = S_i^j \delta_j^i = S_i^i;$$

se $S \in T_0^2$, $\text{tr} S = g_{ij} S^{ij}$; se $S \in T_2^0$, $\text{tr} S = g^{ij} S_{ij}$. Se la base è ortonormale si ha:

$$\text{se } S \in T_0^2 : \text{tr} S = \sum_{i=1}^3 S^{ii}; \text{ se } S \in T_2^0 : \text{tr} S = \sum_{i=1}^3 S_{ii}.$$

- Prodotto interno (o scalare):

$$\begin{aligned}
 S \cdot T &= \text{tr}(S^T T) = \text{tr}(S_{ji} \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i T_{hk} \mathbf{e}^h \otimes \mathbf{e}^k) \\
 &= S_{ji} T_{hk} \text{tr}((\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i)(\mathbf{e}^h \otimes \mathbf{e}^k)) \\
 &= S_{ji} T_{hk} \text{tr}(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^h (\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k)) \\
 &= S_{ji} T_{hk} g^{ih} \text{tr}(\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k) \\
 &= S_{ji} T_{hk} g^{ih} g^{jk}.
 \end{aligned}$$

Se $g^{ij} = \delta^{ij} \Rightarrow S \cdot T = \sum_{i,j} S_{ij} T_{ij}$.

- Prodotto tensoriale di due vettori:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j;$$

infatti $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = a_i b_j$. È allora:
 $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = g^{ij} a_i b_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e quindi si trova:

$$\text{tr} S = \text{tr}(S_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = S_{ij} \text{tr}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = S_{ij} \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ij} S_{ij}.$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

1) $\text{tr} S = I \cdot S = \text{tr}[S]$: se $g^{ij} = \delta^{ij} \Rightarrow \delta^{ij} S_{ij} = \sum_i S_{ii}$

2) $\forall T \in \text{Lin}$, $T = E + W$ se S è simmetrico : $S \cdot T = S \cdot T^T = S \cdot \text{Sym} T$,
 infatti

$$S \cdot T = S \cdot (E + W) = S \cdot E + S \cdot W = S \cdot E + \text{tr}(S^T W) = S \cdot E + \text{tr}(SW) = S \cdot E$$

essendo $\text{tr}(SW) = S_{ij} W^{ij} = 0$, poiché $W^{ii} = 0 \forall i$, $S_{ij} W^{ij} = S_{ij} (-W^{ji})$
 per $i \neq j$.

Se S è antisimmetrico: $S \cdot T = -S \cdot T^T = S \cdot \text{Skw} T$.

Se S è simmetrico e W antisimmetrico: $S \cdot W = 0$.

Se $S \cdot T = 0$, $\forall T \Rightarrow S = 0$.

Se $S \cdot T = 0$, $\forall T$ simmetrico $\Rightarrow S$ antisimmetrico.

Se $S \cdot T = 0$, $\forall T$ antisimmetrico $\Rightarrow S$ simmetrico.

Se W è antisimmetrico, $\exists! \boldsymbol{\omega} \in E_3 : W\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in E_3$, essendo “ \times ” il simbolo di prodotto vettoriale; $\boldsymbol{\omega}$ è detto vettore assiale di W .

Definizione 1.3 *Un tensore S si dice invertibile se $\exists S^{-1}$, tale che:*

$$S^{-1}S = SS^{-1} = I.$$

Un tensore è invertibile se e solo se $\det S \neq 0$, cioè se il tensore è non degenere. Si ha:

$$(S^{-1})^T = (S^T)^{-1}, \quad \det(S^{-1}) = (\det S)^{-1}, \quad (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

Osservazione

Una diversa definizione di tensore è la seguente: un tensore doppio misto è un’applicazione bilineare di $E_3 \times E_3^*$ in \mathbb{R}

$$\hat{S} \in T_1^1(E_3) : E_3 \times E_3^* \rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}^*) \mapsto \hat{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*).$$

Tale definizione è equivalente alla precedente. Infatti assegnata la forma lineare $S : E_3 \rightarrow E_3$, le si associa, in maniera univoca, una forma bilineare \hat{S} nel modo seguente:

$$\hat{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*) = S\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_3$$

e, viceversa, assegnata la \hat{S} , tale relazione determina in maniera univoca il tensore S . In termini di componenti è:

$$\hat{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*) = \hat{S}(u^i \mathbf{e}_i, v_j \mathbf{e}^j) = u^i v_j \hat{S}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \hat{S}_i^j u^i v_j,$$

avendo così definito, come componenti di \hat{S} , i numeri reali:

$$\hat{S}_i^j \equiv (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j).$$

D’altro canto è:

$$S\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = S(u^i \mathbf{e}_i) \cdot v^h \mathbf{e}_h = u^i v^h S\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_h = u^i v^h S_{hi} = u^i v^h S_i^j g_{jh} = S_i^j u^i v^h g_{jh},$$

ma, per la proprietà della metrica, è:

$$S\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = S_i^j u^i v_j$$

e, dovendo valere l’uguaglianza $\hat{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*) = S\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ per ogni \mathbf{u} e $\mathbf{v} \in E_3$ (ovvero per ogni $\mathbf{u} \in E_3$ e $\mathbf{v}^* \in E_3^*$), sarà:

$$\hat{S}_i^j = S_i^j.$$

Definizione 1.4 *Un tensore Q si dice ortogonale se conserva il prodotto scalare tra vettori:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_3 : \quad Q\mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè Q sia ortogonale è che:

$$Q^T = Q^{-1}.$$

Infatti:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = Q\mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v} = Q^T(Q\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (Q^T Q)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_3, \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}.$$

Se Q è ortogonale allora $\det Q = \pm 1$. Infatti:

$$I = QQ^{-1} = QQ^T \Rightarrow 1 = \det I = \det(QQ^T) = \det Q \cdot \det Q^T = (\det Q)^2.$$

Definizione 1.5 *I tensori Q ortogonali per cui $\det Q = +1$ sono detti rotazioni (proprie).*

I tensori ortogonali su E_3 formano un gruppo denotato con O , oppure Orth , e detto gruppo ortogonale su E_3 ; le rotazioni (proprie) formano un sottogruppo O^+ o Orth^+ detto gruppo ortogonale proprio.

Si definisce inoltre il gruppo dei tensori unimodulari

$$U = \{Q \in \text{Lin} : |\det Q| = 1\};$$

si ha che: $\text{Orth}^+ \subset \text{Orth} \subset U \subset \text{Lin}$.

Definizione 1.6 *Se $R \in \text{Orth}^+$, l'insieme dei vettori \mathbf{v} tali che $R\mathbf{v} = \mathbf{v}$ è un sottospazio unidimensionale di E_3 e prende il nome di asse della rotazione.*

Definizione 1.7 *Un tensore doppio si dice definito positivo se:*

$$\mathbf{v} \cdot S\mathbf{v} > 0, \quad \forall \mathbf{v} \in E_3, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{o}.$$

Chiameremo Lin^+ l'insieme dei tensori doppi definiti positivi e $\text{Sym}^+ \subset \text{Lin}^+$ l'insieme dei tensori doppi simmetrici definiti positivi.

Uno scalare λ si dice autovalore del tensore S , e un vettore \mathbf{v} suo autovettore, se λ è tale che \mathbf{v} sia soluzione dell'equazione vettoriale $S\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Poiché è $S\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{o}$, cioè $(S - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{o}$, λ deve essere soluzione dell'equazione $\det(S - \lambda I) = 0$, affinché il sistema $(S_i^j - \lambda\delta_i^j)v^i = 0$ (scelta comunque una base di E_3) ammetta soluzioni non banali (cioè non identicamente nulle). Si tratta di un'equazione di terzo grado in λ , che ammetterà una oppure tre soluzioni reali; in questo secondo caso le soluzioni possono essere distinte o coincidenti tutte o in parte. Se si trova come soluzione un autovalore complesso allora anche gli autovettori associati sono complessi; si parla allora di complessificazioni dello spazio E_3 . Se λ è radice di detta equazione, il sistema scalare omogeneo corrispondente all'equazione vettoriale $S\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{o}$ ammetterà, quindi, una soluzione non banale $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$.

Poiché si possono avere al più tre autovalori reali, distinti o coincidenti, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, in corrispondenza a ciascuno di essi si potrà determinare un autovettore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Si osservi che se \mathbf{v}_1 è autovettore, allora anche $\alpha\mathbf{v}_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, è autovettore. Infatti è $S(\alpha\mathbf{v}_1) = \alpha S(\mathbf{v}_1) = \alpha(\lambda\mathbf{v}_1) = \lambda(\alpha\mathbf{v}_1)$ (questo fatto corrisponde alla proprietà che il sistema omogeneo dato, se il determinante dei coefficienti è nullo, ammette infinite soluzioni).

L'insieme dei vettori $\{\mathbf{v}\}$, che soddisfano l'equazione $S\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ per un assegnato valore λ , è un sottospazio vettoriale di E_3 e prende il nome di spazio caratteristico, o autospatio, di S . La molteplicità di λ come radice dell'equazione caratteristica $\det(S - \lambda I) = 0$, corrisponde alla dimensione di tale spazio. Dunque, se si hanno tre autovalori distinti, si avranno tre sottospazi distinti, ciascuno di dimensione 1. Inoltre autospatzi di S associati ad autovalori distinti hanno intersezione nulla.

Valgono le seguenti proprietà:

- 1) nel caso di tensori simmetrici, $S = S^T$, si hanno sempre autovalori reali;
- 2) gli autovalori di un tensore simmetrico definito positivo sono positivi. Infatti tali autovalori sono reali; inoltre

$$\mathbf{u} \cdot S\mathbf{u} > 0 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \lambda\mathbf{u} > 0 \Rightarrow \lambda u^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0;$$

- 3) gli spazi caratteristici di un tensore simmetrico sono tra loro ortogonali. Siano λ_1 e λ_2 due autovalori (reali) distinti di S e \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 due corrispondenti autovettori arbitrariamente scelti nei due spazi caratteristici $\{\mathbf{u}_1\}$

e $\{\mathbf{u}_2\}$ rispettivamente. È:

$$S\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1, \quad S\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2.$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= S\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot S^T\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot S\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{u}_1 \cdot \lambda_2\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \end{aligned}$$

ma $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dunque $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_1$ ortogonale \mathbf{u}_2 .

Definizione 1.8 *L'insieme degli autovalori di un tensore S prende il nome di spettro di S .*

Vale il seguente teorema.

Teorema 1.1 (Teorema di rappresentazione spettrale)

Sia S un tensore doppio simmetrico su E_3 ; siano λ_i i suoi autovalori ed \mathbf{e}_i i suoi autovettori corrispondenti ($i = 1, 2, 3$). Se gli autovalori sono tutti distinti, i vettori (\mathbf{e}_i) sono indipendenti e vale la decomposizione:

$$S = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i.$$

Viceversa, se vale tale decomposizione, i numeri λ_i sono autovalori ed i vettori \mathbf{e}_i autovettori di S .

Tale teorema, qui non dimostrato, equivale alla proprietà di diagonalizzazione di una matrice simmetrica. La matrice simmetrica $[S] = [S_{ij}]$, noti i suoi autovalori λ_i e gli autovettori \mathbf{v}_i , può venir rappresentata sotto la forma diagonale:

$$[S] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

In termini tensoriali, tre autovettori indipendenti \mathbf{e}_i di S forniscono una base $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ in T_2^0 , per cui S ha componenti non nulle uguali e precisamente uguali ai suoi autovalori, solo sulla diagonale principale.

Valgono i seguenti corollari:

- 1) S ha tre autovalori distinti se e solo se gli spazi caratteristici hanno tutti dimensione 1.
- 2) Se S ha due autovalori distinti, cioè se è $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3$, allora si può ottenere:

$$S = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$$

ma poichè $\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = I$ si ha:

$$S = \lambda_1 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + \lambda_2 (I - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1),$$

con \mathbf{e}_1 autovalore corrispondente all'autovalore λ_1 . È quindi sufficiente conoscere l'autovettore distinto \mathbf{e}_1 ; per completare la base si possono scegliere due vettori qualunque indipendenti tra loro e ortogonali ad \mathbf{e}_1 .

- 3) Se S ha un solo autovalore triplo, cioè se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^*$, allora

$$S = \sum_{i=1}^3 \lambda^* (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \lambda^* \sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \lambda^* I,$$

cioè lo spazio caratteristico coincide con E_3 .

Dunque nello spazio affine \mathcal{E}_3 , gli spazi caratteristici si potranno rappresentare:

- a) come sottospazi distinti e cioè come tre rette ortogonali tra loro (passanti per l'origine);
- b) come una retta ed un piano tra loro ortogonali (intersecanti nell'origine);
- c) come tutto lo spazio \mathcal{E}_3 .

Osservazione.

Un esempio si ha, nel caso della geometria delle masse, quando S sia il tensore di inerzia di un corpo rigido: gli autovalori di S sono i momenti principali di inerzia, gli autospazi sono gli assi dell'ellissoide di inerzia; se $\lambda_2 = \lambda_3$ si ha un ellissoide rotondo; se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ si ha una sfera.

Si può dimostrare che, dato un tensore doppio S , vale l'uguaglianza

$$\det(S - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

dove:

$$I_1 = \text{tr}S, \quad I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr}S)^2 - \text{tr}(S^2)], \quad I_3 = \det S$$

prendono il nome di invarianti principali di S , in quanto sono tre numeri invarianti rispetto alla scelta della base in E_3 . Se S è simmetrico, gli invarianti di S , in termini degli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sono dati da:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Questi non sono gli unici invarianti tensoriali; ne possono esistere altri ma il numero di invarianti indipendenti è sempre uguale alla dimensione dello spazio base. Ad esempio:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= S_i^j \\ \mathcal{F}_2 &= S_i^j S_j^i \\ \mathcal{F}_3 &= S_i^j S_j^h S_h^i \end{aligned}$$

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, sono detti rispettivamente invariante lineare, quadratico, cubico. Le ultime due definizioni degli invarianti di S sono facilmente estendibili al caso di tensori \hat{M} definiti in E_n invece che su E_3 .

Due corollari importanti sono:

- 1) se due tensori simmetrici hanno gli stessi invarianti, hanno uguale spettro e viceversa;
- 2) il *teorema di Hamilton-Cayley*: ogni tensore doppio soddisfa l'equazione algebrica:

$$S^3 - I_1S^2 + I_2S - I_3I = 0 \quad (\text{equazione di Hamilton-Cayley}).$$

Proprietà 1.1 *Supponiamo ora che due tensori S e T commutino: $ST = TS$. Allora, da $S\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, si ha*

$$S(T\mathbf{v}) = T(S\mathbf{v}) = T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(T\mathbf{v}),$$

cioè $T\mathbf{v}$ appartiene allo stesso spazio caratteristico di \mathbf{v} (vale anche il viceversa). Ne segue che, se S è simmetrico, commuta con ogni rotazione se e solo se $S = \lambda I$, cioè se lo spazio caratteristico di S associato a λ è \mathcal{E}_3 .

Dimostrazione.

Se Q è una rotazione propria, cioè $Q \in \text{Orth}^+$, i suoi autovalori sono $\lambda_3 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$. Infatti, da $\det Q = 1$ si ha $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, da $Q^{-1} = Q^T$ si ha che Q , i cui autovalori coincidono con quelli di Q^T (perchè scambiando righe con colonne la traccia e il determinante non variano), ha un autovalore uguale al reciproco di un altro suo autovalore, cioè, ad esempio, $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ e dunque $\lambda_3 = 1$.

Si ha così che un tensore ortogonale proprio ammette sempre un autovettore \mathbf{v} tale che $Q\mathbf{v} = \mathbf{v}$ e il corrispondente autospazio non è altro che l'asse della rotazione. Se $Q \in \text{Orth}$, allora sarà $\lambda_3 = \pm 1$ e $Q\mathbf{v} = \pm \mathbf{v}$. Si fissi ora una rotazione Q ed il suo autovettore \mathbf{u} per cui sia $Q\mathbf{u} = \pm \mathbf{u}$; se un tensore S commuta con Q , deve essere $S(Q\mathbf{u}) = \lambda(Q\mathbf{u})$, cioè $S\mathbf{u} = \pm \lambda\mathbf{u}$.

Dunque \mathbf{u} è autovettore anche di S . Poichè al variare di Q in Orth , \mathbf{u} varia in tutto E_3 (essendo ogni vettore di E_3 asse di una qualunque rotazione), segue che l'autospazio di S può solo essere ancora E_3 , dunque $S = \lambda I$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, poichè $S = S^T$.

□

Possiamo infine enunciare due teoremi fondamentali: il teorema della radice ed il teorema di decomposizione polare.

Teorema 1.2 (Teorema della radice)

Si consideri un tensore doppio C simmetrico e definito positivo ($C \in \text{Sym}^+$). Esiste uno ed un solo tensore U simmetrico e definito positivo, tale che

$$U^2 = C \quad (\text{ovvero } U = \sqrt{C}).$$

Dimostrazione:

Poichè $C \in \text{Sym}^+$, C ammette 3 autovalori reali positivi λ_i e, per il teorema di decomposizione spettrale, è:

$$C = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i).$$

Si ponga $U = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)$ e si esegua $UU = U^2$; essendo

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) & i = j \end{cases}$$

è certo $U^2 = C$. Dunque U esiste. U è unico; per assurdo si supponga che $\exists U, V : U^2 = V^2 = C$. Sia λ un autovalore di C ed \mathbf{e} il corrispondente autovettore. Per ipotesi è $\lambda > 0$. Posto $\mu = \sqrt{\lambda} > 0$, sarà: $C\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} = U^2\mathbf{e}$, cioè

$$\mathbf{o} = (U^2 - C)\mathbf{e} = U^2\mathbf{e} - \lambda\mathbf{e} = (U^2 - \lambda I)\mathbf{e} = (U + \mu I)(U - \mu I)\mathbf{e}.$$

Si ponga $\mathbf{v} \equiv (U - \mu I)\mathbf{e}$, ma allora:

$$(U + \mu I)\mathbf{v} = \mathbf{o} \Rightarrow U\mathbf{v} = -\mu\mathbf{v}$$

e tale equazione ha come unica soluzione $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, altrimenti U ammetterebbe un autovalore negativo. Allora $\mathbf{v} = \mathbf{o} \Rightarrow U\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$, quindi U ha autovalori diversi da C , ma uguali autovettori.

Analogamente si dimostra che $V\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$, dunque $U\mathbf{e} = V\mathbf{e}$, per ogni autovettore \mathbf{e} di C . Allora U e V hanno stessi autovalori e stessi autovettori, quindi si può costruire la stessa base di autovettori; segue che $U = V$.

□

Teorema 1.3 (Teorema di decomposizione polare)

Sia F un tensore doppio tale che $\det F > 0$. Sono uniche le due decomposizioni:

$$F = VR = RU,$$

essendo R una rotazione propria, U e V due tensori simmetrici definiti positivi, dati da:

$$U = \sqrt{F^T F}, \quad V = \sqrt{F F^T}.$$

RU prende il nome di decomposizione polare destra, VR di decomposizione polare sinistra e si dice che F si può fattorizzare mediante un tensore doppio simmetrico non degenerare e una rotazione propria.

Dimostrazione

Il tensore U definito dalla $U^2 = F^T F$ è simmetrico e definito positivo, per il teorema della radice, essendo $F^T F$ un tensore simmetrico e definito positivo. Infatti:

a) $F^T F = (F^T F)^T$ (simmetria di $F^T F$);

- b) $\mathbf{v} \cdot F^T F \mathbf{v} = F \mathbf{v} \cdot F \mathbf{v} > 0$, $\forall \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$; infatti $F \mathbf{v} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{o}$ dal momento che è $\det F > 0$ (definita positività di $F^T F$). Analogamente per $F F^T$.

Si ponga ora $R = F U^{-1}$. Poiché $\det F > 0$ e $\det U > 0$ è $\det R > 0$; inoltre:

$$R^T R = (F U^{-1})^T F U^{-1} = U^{-T} F^T F U^{-1} = U^{-T} U^2 U^{-1} = U^{-T} U^T U U^{-1} = I.$$

Dunque $R \in \text{Orth}^+$ ed è $F = R U$. D'altro canto, posto $V = R U R^T$, si ha:

$$V R = R U = F \text{ e } \det V = \det(R U R^T) = \det U > 0.$$

Tale decomposizione è unica. Infatti, per il teorema della radice, è unico il tensore U tale che $U^2 = F F^T$; anche R è unico in quanto definito dalla $R = F U^{-1}$, e così V .

□

Passiamo ora ad alcuni cenni di analisi tensoriale. Sia f una funzione di \mathbb{R} in uno spazio lineare normato di dimensione finita:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{L} \\ t \in \mathbb{R} &\mapsto f(t) \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

(\mathcal{L} può essere \mathbb{R} stesso oppure $E_2, E_3, \dots, E_n, T_2^0, \dots$)

Definizione 1.9 *Dicesi derivata di f rispetto a t (in t stesso) il limite, se esiste:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{df}{dt} = \dot{f}(t).$$

Sia f una funzione tra due spazi \mathcal{L} e \mathcal{M} , lineari, a dimensione finita e normati:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{M} \\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Definizione 1.10 *La funzione f si dice differenziabile nel punto $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ se esiste una trasformazione lineare tra gli spazi tangenti a \mathcal{L} in \mathbf{x} e a \mathcal{M} in $f(\mathbf{x})$:*

$$L : T_{\mathbf{x}}(\mathcal{L}) \rightarrow T_{f(\mathbf{x})}(\mathcal{M})$$

tale che:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = L_{f,\mathbf{x}}(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathcal{L}.$$

Si noti che si è scritto $L_{f,\mathbf{x}}$ per indicare il fatto che la trasformazione è lineare in \mathbf{h} , ma dipende sia dalla funzione f che dal punto \mathbf{x} . Il termine $o(\mathbf{h})$ indica un infinitesimo di ordine superiore ad \mathbf{h} , per $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$:

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|o(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

L'operatore $L_{f,\mathbf{x}}$ prende il nome di derivata di f nel punto \mathbf{x} e lo si indica con $Df(\mathbf{x})$. Si ricordi che nel nostro caso è: $T_{\mathbf{x}}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ e $T_{f(\mathbf{x})}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, perchè gli spazi sono lineari; dunque la derivata in questione è un'applicazione lineare tra \mathcal{L} e \mathcal{M} .

Passiamo ora a definire alcuni importanti operatori differenziali.

Gradiente

- 1) Sia f una funzione scalare differenziabile $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$; allora $Df(\mathbf{x})$ è un'applicazione lineare di E_n in \mathbb{R} e vale la proprietà:

$$\exists! \nabla f(\mathbf{x}) \in E_n : Df(\mathbf{x})[h] = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

Il vettore $\nabla f(\mathbf{x})$ prende il nome di gradiente della funzione f e talora lo si indica con $\text{grad}f(\mathbf{x})$ o con $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$.

Introdotta una base $\{\mathbf{e}_i\}$, in componenti si ha:

$$[\nabla f(\mathbf{x})]_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \text{ essendo } \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i.$$

- 2) Sia f una funzione differenziabile $f : E_3 \rightarrow E_3$; allora $Df(\mathbf{x})$ è un'applicazione lineare di E_3 in E_3 , cioè un tensore doppio. In altri termini:

$$\exists! \nabla f(\mathbf{x}) \in \text{Lin} : Df(\mathbf{x})[h] = \nabla f(\mathbf{x})\mathbf{h}.$$

$\nabla f(\mathbf{x})$ prende ancora il nome di gradiente della funzione vettoriale f . Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, allora il suo gradiente è l'identità: $\nabla \mathbf{x} = I$. In componenti, nella base $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j\}$, sarà:

$$[\nabla f(\mathbf{x})]_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \text{ con } f^i = f \cdot \mathbf{e}^i \Leftrightarrow f = f^i \mathbf{e}_i.$$

- 3) Generalizzando si può definire il gradiente di un tensore doppio T cioè della funzione tensoriale $T : E_3 \rightarrow \text{Lin}$. In componenti sarà:

$$[\nabla T(\mathbf{x})]_h^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^h}, \text{ ecc.} \dots$$

Divergenza

- 1) Sia F una funzione vettoriale: $E_3 \rightarrow E_3 : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = f^i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$. Prende il nome di divergenza di f l'operatore differenziale definito da:

$$\operatorname{div} f = \operatorname{tr} \nabla f = \frac{\partial f^1}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^3}{\partial x^3} = \partial_j f^j,$$

avendo indicato con ∂_j la derivata rispetto alla generica x^j .

- 2) Si definisce anche la divergenza di un tensore doppio S , come il vettore, che indichiamo con $\operatorname{div} S$, tale che, $\forall \mathbf{a} \in E_3$, sia:

$$(\operatorname{div} S) \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div}(S^T \mathbf{a}).$$

In componenti si scrive:

$$[\operatorname{div} S]_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x^j} \equiv \sum_j \partial_j S_{ij},$$

essendo $S(\mathbf{x}) = S_{ij}(x^h)\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$. Se S fosse in forma contravariante si scriverebbe: $[\operatorname{div} S]_i = \partial_j S^{ij}$, con la solita convenzione sulla somma.

Sia f una funzione scalare, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ funzioni vettoriali, S funzione tensoriale. Valgono le seguenti proprietà (che elenchiamo senza dimostrare):

$$\begin{aligned} \nabla(f\mathbf{v}) &= f\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla f; \\ \operatorname{div}(f\mathbf{v}) &= f\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f; \\ \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) &= (\nabla\mathbf{w})^T \mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \mathbf{w}; \\ \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) &= \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{w}; \\ \operatorname{div}(S^T \mathbf{v}) &= S \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} S; \\ \operatorname{div}(fS) &= f\operatorname{div} S + S\nabla f; \\ \operatorname{div}(\nabla\mathbf{v}^T) &= \nabla(\operatorname{div}\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Rotore

Sia $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ un campo vettoriale, il rotore di tale campo è definito come il vettore assiale del tensore antisimmetrico $W = \nabla\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}^T$.

Dunque si ha:

$$(\nabla\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}^T)\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a} \in E_3.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

In componenti si ha:

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}]_i = \sum_{j,h=1}^3 \epsilon_{ijh} \frac{\partial v^j}{\partial x^h} = \alpha_i,$$

essendo ϵ_{ijh} l'indicatore di Levi-Civita (o il tensore di Ricci),

$$\epsilon_{ijh} = \begin{cases} 0 & \text{se due indici sono uguali} \\ 1 & \text{con permutazioni pari degli indici} \\ -1 & \text{con permutazione dispari degli indici} \end{cases}$$

Ne segue che vale, in notazione matriciale, l'espressione:

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Laplaciano

Si definisce laplaciano di un campo scalare (o vettoriale) di classe \mathcal{C}^2 l'operatore differenziale Δ tale che:

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$$

dove si ha:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} && \text{se } f \text{ è scalare,} \\ [\Delta f]_i &= \sum_j \frac{\partial^2 f^j}{(\partial x^j)^2} && \text{se } f \text{ è vettoriale.} \end{aligned}$$

Un campo $f(\mathbf{x})$ si dice armonico se: $\Delta f = 0$.

Valgono i seguenti teoremi.

Teorema 1.4 *Un campo vettoriale \mathbf{v} di classe C^2 tale che sia*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{o},$$

è armonico.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{o} &\Rightarrow \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T = 0 \Rightarrow 0 = \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) = \\ &= \Delta \mathbf{v} - \operatorname{div} \nabla \mathbf{v}^T = \Delta \mathbf{v} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.5 *Dato un campo vettoriale $f(\mathbf{x})$ su \mathbb{R}^n , differenziabile, se $F = \nabla f$ è costante, allora:*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) + F(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{dom} f.$$

Dimostrazione

Poiché \mathbb{R}^n è connesso, si può scegliere in esso un arco di curva regolare γ che abbia come estremi i punti \mathbf{x} e \mathbf{y} . Si può parametrizzare γ in modo che sia:

$$\gamma = \gamma(t), \quad t \in [0, 1]$$

con $\gamma(0) = \mathbf{y}$ e $\gamma(1) = \mathbf{x}$ ottenendo così:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f[\gamma(t)] dt = \int_0^1 \nabla f \dot{\gamma} dt = F \int_0^1 \dot{\gamma} dt = F(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Se poi vale $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) + F(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ e $F = \text{cost}$ si ha subito che: $F = \nabla f$. In particolare, posto $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0$, fissato, e $\mathbf{a} = f(\mathbf{x}_0)$ si ha:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + F(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

□

Osservazione

Tale teorema corrisponde alla proprietà delle funzioni di classe C^1 di essere lineari se hanno derivata costante e viceversa.

Teorema 1.6 (Teorema della divergenza) *(dimostrazione omessa)*

Sia C una regione limitata contenuta in \mathcal{E}_3 e

$$\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} : C \rightarrow E_3, \quad S : C \rightarrow T_2^0$$

funzioni regolari. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} \varphi \mathbf{n} dA &= \int_C \nabla \varphi dV, \\ \int_{\partial C} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_C \operatorname{div} \mathbf{v} dV, \\ \int_{\partial C} S \mathbf{n} dA &= \int_C \operatorname{div} S dV, \end{aligned}$$

essendo \mathbf{n} la normale esterna alla frontiera ∂C del dominio C , dA elemento di area su ∂C , dV elemento di volume di C .

Teorema 1.7 (Teorema del rotore) *(dimostrazione omessa)*

Sia A un dominio bidimensionale limitato, cioè una porzione di superficie regolare, di normale esterna \mathbf{n} , frontiera ∂A e sia $d\mathbf{x}$ l'elemento d'arco di ∂A . Vale l'uguaglianza:

$$\int_A (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Capitolo 2

Corpi continui deformabili

Definizione 2.1 *Un corpo continuo tridimensionale \mathcal{B} è una varietà differenziabile orientata di dimensione 3.*

Fisicamente di un corpo noi osserviamo la parte di spazio euclideo da esso occupato ad un certo istante, cioè una sua configurazione. Più precisamente definiamo come configurazione del corpo \mathcal{B} una applicazione:

$$\chi : \mathcal{B} \rightarrow E_3$$

che sia differenziabile e che conservi l'orientamento. Spesso, con abuso di linguaggio, si identifica l'applicazione χ con l'immagine di \mathcal{B} nella E_3 ; pertanto, per comodità, chiameremo configurazione anche $\chi(\mathcal{B}) \subseteq E_3$.

Definizione 2.2 *Si definisce moto regolare del corpo una famiglia continua ad un parametro di configurazioni χ_t :*

$$\begin{aligned} \chi_t : \mathcal{B} \times \mathbb{R} &\rightarrow E_3 \\ (\mathcal{B}, t) &\mapsto \chi_t(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{B}, t). \end{aligned}$$

In particolare, preso un punto $P \in \mathcal{B}$, $\chi_t(P) \in E_3$ sarà un punto di un arco regolare di curva, parametrizzato con t ; inoltre, presi su \mathcal{B} due punti distinti, si avrà che:

$$P \neq Q \in \mathcal{B} \Rightarrow \chi_t(P) \neq \chi_t(Q), \forall t \in \mathbb{R}, \forall \chi.$$

Poiché uno dei problemi fondamentali della meccanica dei continui è quello della determinazione della deformazione del corpo nel passaggio da uno stato campione a quello attuale (o meglio: in confronto ad uno stato campione), è conveniente introdurre una configurazione di riferimento.

Definizione 2.3 *Definiamo configurazione di riferimento (e la indichiamo con $\chi(\mathcal{B})$) una prefissata configurazione di \mathcal{B} , arbitrariamente scelta tra tutte le configurazioni possibili, fissata volta per volta, nel modo più opportuno.*

Talora si sceglie come configurazione di riferimento quella iniziale $\chi_{t_0}(\mathcal{B})$, ma questo in generale non è necessario, anzi, come configurazione di riferimento spesso si sceglie una configurazione per cui il corpo, nel moto studiato, non transita neppure. Si tratta dunque di una configurazione “campione” a cui riferire le nostre misure. Poichè una configurazione $\chi_t : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow E_3$ conserva la struttura di varietà differenziabile definita su \mathcal{B} , avrà senso introdurre un sistema di coordinate locali $\{y^i\}$ su $\chi_t(\mathcal{B})$ indotte dalla varietà \mathcal{B} . Tali coordinate prendono il nome di coordinate materiali.

D’altro canto, poiché $\chi_t(\mathcal{B}) \subseteq E_3$, ad ogni suo punto si possono associare delle coordinate in corrispondenza ad un riferimento $\{0, \mathbf{e}_i\}$ in E_3 :

$$\mathbf{x} = \chi_t(P) = x^i \mathbf{e}_i, \quad \text{con } x^i = x^i(t), \quad \mathbf{x} \in E_3, \quad P \in \mathcal{B};$$

tali coordinate prendono il nome di coordinate spaziali del punto \mathbf{x} (o anche coordinate euleriane). Quanto detto vale anche per la configurazione di riferimento $\mathbf{X} = \chi(P) = X^i \mathbf{e}_i$.

Si può stabilire una corrispondenza tra punti della configurazione attuale $\mathcal{C} \equiv \chi_t(\mathcal{B})$ e quella di riferimento $\mathcal{C}^* \equiv \chi(\mathcal{B})$ mediante il diffeomorfismo, detto funzione di deformazione:

$$f \equiv \chi_t \circ \chi^{-1}$$

$$f : \mathcal{C}^* \equiv \chi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C} \equiv \chi_t(\mathcal{B}) : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t)$$

$$f^{-1} : \mathcal{C} \equiv \chi_t(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}^* \equiv \chi(\mathcal{B}) : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} = f^{-1}(\mathbf{x}, t).$$

Il legame $\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{X}$ è quindi (“dimenticando” la varietà \mathcal{B} e chiamando sistematicamente \mathcal{C} la configurazione attuale e \mathcal{C}^* quella di riferimento):

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{C}; \tag{2.1}$$

$$\mathbf{X} = f^{-1}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^*. \tag{2.2}$$

In termini di componenti sarà:

$$x^i = f^i(X^h, t) = x^i(X^h, t) \Leftrightarrow X^i = (f^{-1})^i(x^h, t) = X^i(x^h, t).$$

Questa corrispondenza può essere anche vista come legge di cambiamento di coordinate su \mathcal{C} ed allora si possono assumere come coordinate di $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ le

X^h , cioè le coordinate su \mathcal{C}^* del punto \mathbf{X} cui corrisponde \mathbf{x} secondo f . In tal caso le X^h vengono chiamate coordinate lagrangiane di \mathbf{x} e risultano un caso particolare di coordinate materiali indotte da f .

Ad esempio, consideriamo un punto su di una sfera; x^i sono le coordinate del punto viste nel riferimento associato allo spazio, X^h sono le coordinate del punto sulla sfera (raggio, latitudine, longitudine). Questi due tipi di coordinate varieranno nel tempo, se per esempio immaginiamo la sfera come un palloncino che viene gonfiato.

Un campo (scalare, vettoriale, tensoriale...) definito su \mathcal{B} , verrà detto campo materiale se è definito mediante funzioni delle X^i , o, come brevemente scriveremo, di \mathbf{X} ; campo spaziale se è definito mediante funzioni delle x^i , ovvero di \mathbf{x} . Potremo dunque avere:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{X}, t) = \varphi(X^h, t) \quad \text{campo materiale,}$$

$$\psi = \psi(\mathbf{x}, t) = \psi(x^i, t) \quad \text{campo spaziale.}$$

Se teniamo conto di (2.1) e (2.2), avrà senso dare una descrizione spaziale di un campo materiale e viceversa:

$$\varphi_s = \varphi(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=f^{-1}(\mathbf{x}, t)} \quad \text{descrizione spaziale di un campo materiale,}$$

$$\psi_m = \psi(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=f(\mathbf{X}, t)} \quad \text{descrizione materiale di un campo spaziale.}$$

Tale descrizione “duale” si può trasportare anche quando si deriva; si definiscono così operatori materiali e spaziali di campi omonimi:

$$\text{Grad}\varphi = \nabla_{\mathbf{X}}\varphi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{X}} \quad \text{e } \text{Div}\varphi, \text{Rot}\varphi, \dots, \text{materiali;}$$

$$\text{grad}\psi = \nabla_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} \quad \text{e } \text{div}\psi, \text{rot}\psi, \dots, \text{spaziali.}$$

Si definiscono anche derivate materiali e spaziali di campi omonimi:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{X}, t) \quad \text{derivata materiale di campo materiale;}$$

$$\psi' = \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) \quad \text{derivata spaziale di un campo spaziale.}$$

Definizione 2.4 Se consideriamo un campo vettoriale materiale

$$\varphi = f(\mathbf{X}, t)$$

si definisce la velocità lagrangiana come:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{X}, t) \quad (\text{campo vettoriale materiale}).$$

Di converso si può definire la derivata spaziale della f^{-1} :

$$\mathbf{X}' = \frac{\partial}{\partial t} [f^{-1}(\mathbf{x}, t)] \quad (\text{campo vettoriale spaziale}).$$

Se ora si considera la descrizione materiale del campo spaziale $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$, se ne può calcolare la derivata materiale:

$$\dot{\psi}_m = \frac{\partial}{\partial t} \psi[f(\mathbf{X}, t), t],$$

ovvero si può calcolare la derivata spaziale di φ_s :

$$(\varphi_s)' = \frac{\partial}{\partial t} \varphi[f^{-1}(\mathbf{x}, t), t].$$

Definizione 2.5 Se $\varphi = f(\mathbf{X}, t)$ si definisce la velocità euleriana:

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}_s = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{x}=f^{-1}(\mathbf{x}, t)}.$$

Consideriamo un campo spaziale ψ . Abbiamo già definito la derivata spaziale di un campo spaziale: $\psi' = \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t)$. Grazie a (2.1) e (2.2) abbiamo anche dato una rappresentazione materiale di ψ e ne abbiamo fatto la derivata materiale $\dot{\psi}_m$. Possiamo operare un nuovo cambiamento di coordinate e considerare la rappresentazione spaziale del campo materiale $\dot{\psi}_m$, che per semplicità indichiamo con $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = (\dot{\psi}_m)_s = \frac{\partial}{\partial t} \psi[f(\mathbf{X}, t), t] \Big|_{\mathbf{x}=f^{-1}(\mathbf{x}, t)}.$$

Quello che ci proponiamo è di evidenziare il legame fra ψ' e $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial}{\partial t} \psi(\circ, t) \Big|_{\mathbf{x}=f^{-1}(\mathbf{x}, t)} + \frac{\partial}{\partial t} \psi[f(\mathbf{X}, t), \circ] \Big|_{\mathbf{x}=f^{-1}(\mathbf{x}, t)} \\ &= \psi' + \frac{\partial \psi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=f^{-1}(\mathbf{x}, t)} = \psi' + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=f^{-1}(\mathbf{x}, t)} \\ &= \psi' + \text{grad} \psi \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Analogamente, ma la cosa non ha alcun interesse pratico, si potrebbe calcolare:

$$\begin{aligned} \varphi' &= [(\varphi_s)']_m = \frac{\partial}{\partial t} \varphi[f^{-1}(\mathbf{x}, t), t] \Big|_{\mathbf{x}=f(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\circ, t) \Big|_{\mathbf{x}=f(\mathbf{X}, t)} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(f^{-1}(\mathbf{x}, t), \circ) \Big|_{\mathbf{x}=f(\mathbf{X}, t)} = \dot{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=f(\mathbf{X}, t)} = \dot{\varphi} + \text{Grad} \varphi \cdot \dot{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Osservazioni.

- i) Se $\psi = \mathbf{v} \Rightarrow \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + \mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{v}$: formula per l'accelerazione.
- ii) Se $\psi = \mathbf{r}(\mathbf{o}) = \mathbf{x} - \mathbf{0}$ vettore posizione, si ha $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' + \text{grad } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$, ma si ha che $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ perchè le coordinate spaziali x^i di \mathbf{r} non dipendono dal tempo, e $[\text{grad } \mathbf{r}]_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$, cioè il gradiente spaziale del vettore posizione è il tensore identico. Allora $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, cioè la velocità euleriana è proprio $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$.

Definizione 2.6 *Il gradiente spaziale della velocità euleriana:*

$$L = \text{grad } \mathbf{v}$$

prende il nome di gradiente di velocità.

Definizione 2.7 *Dato un campo vettoriale, diciamo linee di corrente le soluzioni dell'equazione differenziale:*

$$\frac{d\mathbf{s}}{d\lambda} = \mathbf{v}[\mathbf{s}(\lambda), t],$$

dove \mathbf{s} è il punto generico del luogo da determinare. In pratica sono curve $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\lambda)$ che in ogni punto hanno come vettore tangente il campo \mathbf{v} , cioè le curve integrali del campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$.

Esempio 2.1

Sia dato il moto $\mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t)$ in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^{t^2} \\ x_2 = X_2 e^t \\ x_3 = X_3. \end{cases}$$

Si ha:

$$\mathbf{X} = f^{-1}(\mathbf{x}, t) \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = x_1 e^{-t^2} \\ X_2 = x_2 e^{-t} \\ X_3 = x_3. \end{cases}$$

La derivata materiale di \mathbf{x} è:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{X}, t) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 2t X_1 e^{t^2} \\ \dot{x}_2 = X_2 e^t \\ \dot{x}_3 = 0. \end{cases}$$

La descrizione spaziale della velocità lagrangiana è:

$$\begin{cases} v_1 = 2x_1 t \\ v_2 = x_2 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

mentre è

$$\begin{cases} X'_1 = -2t x_1 e^{-t^2} \\ X'_2 = -x_2 e^{-t} \\ X'_3 = 0 \end{cases}$$

quindi $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \neq \mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_s$.

Il gradiente di velocità è dato da:

$$[L(\mathbf{x}, t)] = \begin{bmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le linee di corrente sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni:

$$\frac{ds_1}{d\lambda} = 2t s_1(\lambda), \quad \frac{ds_2}{d\lambda} = s_2(\lambda), \quad \frac{ds_3}{d\lambda} = 0$$

dunque sono le curve di equazione parametrica:

$$\begin{cases} s_1(\lambda) = s_1(0) e^{2t\lambda} \\ s_2(\lambda) = s_2(0) e^\lambda \\ s_3(\lambda) = s_3(0). \end{cases}$$

Si consideri la funzione di deformazione tra la configurazione di riferimento $\mathcal{C}^* \equiv \chi(\mathcal{B})$ e quella attuale $\mathcal{C} \equiv \chi_t(\mathcal{B})$:

$$f \equiv \chi_t \circ \chi^{-1} : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C} : \mathbf{X} \in \mathcal{C}^* \mapsto \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

In seguito, trattando di deformazioni e non di moti, si ometterà la dipendenza esplicita da t , scrivendo $\mathbf{x} = f(\mathbf{X})$.

Il gradiente di f , cioè il tensore F :

$$F = \nabla f \in T_1^1 \Leftrightarrow F_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} = \partial_j x^i \quad \left(\text{con } \partial_i = \frac{\partial}{\partial X^i} \right)$$

prende il nome di gradiente di deformazione.

Il requisito per f di conservare l'orientamento implica che $\det F$ non si annulli mai (e cioè che $\det F$ abbia sempre lo stesso segno); poichè nella configurazione di riferimento \mathcal{C}^* tale determinante vale $+1$, essendo

$$F_j^i|_{\mathcal{C}=\mathcal{C}^*} = \frac{\partial X^i}{\partial X^j} = \delta_j^i \Rightarrow \det[\delta_j^i] = +1,$$

allora è sempre $\det F > 0$.

Definizione 2.8 *Il vettore definito da:*

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \Leftrightarrow u^i = x^i - X^i, \text{ con } \mathbf{x} = f(\mathbf{X}),$$

prende il nome di spostamento di \mathbf{X} .

Se conosciamo \mathbf{u} in tutti i punti di \mathcal{C}^* allora posso ricavare la configurazione attuale.

Osservazione:

Se $\mathbf{u} = \text{costante} = \mathbf{u}_0$ (nello spazio, fissato t), si ha che:

$$f(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \text{costante} = \mathbf{u}_0 \Rightarrow f(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}_0$$

e la deformazione prende il nome di traslazione.

Il gradiente dello spostamento è dato da:

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{x} - \nabla \mathbf{X} \Leftrightarrow \partial_h u^i = \partial_h x^i - \delta_h^i.$$

Tra il gradiente di deformazione e quello di spostamento vale il seguente legame:

$$F_h^i = \partial_h u^i + \delta_h^i \Leftrightarrow F = \nabla \mathbf{u} + I.$$

Deformazioni omogenee

Definizione 2.9 Una deformazione si dice omogenea se, fissato t ,

$$F = \nabla f = \text{costante}.$$

Per il teorema di rappresentazione, visto precedentemente, si ha allora:

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y}) + F(\mathbf{X} - \mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{C}^*.$$

Tale espressione permette di conoscere la funzione di deformazione in ogni punto, noti il suo valore in un solo punto ed il gradiente di deformazione. Viceversa, se il campo su \mathcal{C}^* soddisfa tale relazione, F è costante.

Definizione 2.10 Se $\exists \mathbf{Y} \in \mathcal{C}^* : f(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$ si parla di deformazione con punto \mathbf{Y} fisso:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + F(\mathbf{X} - \mathbf{Y}).$$

Casi particolari di deformazioni con un punto fisso \mathbf{Y} sono:

i) $F = R \in \text{Orth}^+$.

In questo caso la deformazione omogenea prende il nome di rotazione attorno a \mathbf{Y} .

ii) $F = U \in \text{Sym}^+$.

In questo caso si parla di pura deformazione (o dilatazione; in inglese: stretch). Se, in particolare, gli autovalori di U sono $\lambda_1 = \lambda \neq 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, dal teorema della rappresentazione spettrale e dalla relazione $\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = I$ si ottiene:

$$U = I + (\lambda - 1)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} = \lambda(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + 1(I - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}),$$

allora si dice che U è una estensione pura (o dilatazione pura) nella direzione \mathbf{e} di grandezza λ . In una base in cui $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$, U ha componenti:

$$U = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed il corrispondente spostamento si trova così:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= \mathbf{Y} + U(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \\ &= \mathbf{Y} + I(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + (\lambda - 1)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \\ &= \mathbf{Y} + \mathbf{X} - \mathbf{Y} + (\lambda - 1)(X_1 - Y_1)\mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

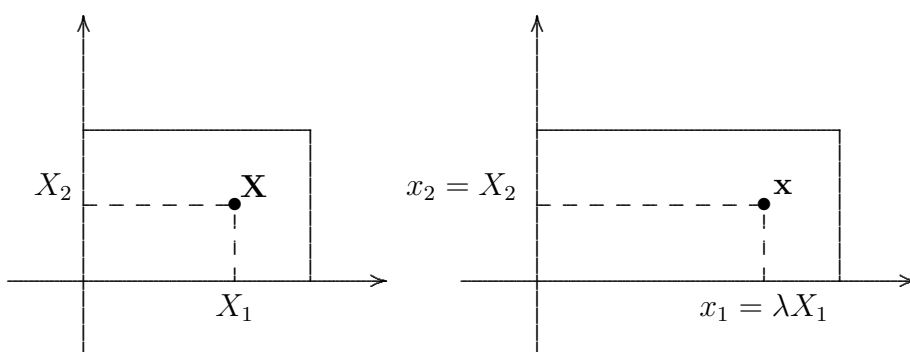
ricordando che $(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\mathbf{X} = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$. Dunque si ha:

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = (\lambda - 1)(X_1 - Y_1)\mathbf{e}_1$$

e cioè:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1, \text{ dove } u_1 = (\lambda - 1)(X_1 - Y_1).$$

Se $Y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = f_1(\mathbf{X}) = \lambda X_1$. Disegniamo tale dilatazione (nella direzione $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$) nel piano:



Sia f una deformazione omogenea con punto fisso \mathbf{Y} :

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + F(\mathbf{X} - \mathbf{Y}), \quad F = \text{costante}.$$

Per il teorema di decomposizione polare è:

$$F = RU, \quad R \in \text{Orth}^+, \quad U \in \text{Sym}^+.$$

È allora:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + RU(\mathbf{X} - \mathbf{Y}).$$

Introdotta la deformazione pura h , con punto fisso \mathbf{Y} :

$$h(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + U(\mathbf{X} - \mathbf{Y}),$$

e la rotazione attorno ad \mathbf{Y} :

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + R(\mathbf{X} - \mathbf{Y}),$$

si ha:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + R[h(\mathbf{X}) - \mathbf{Y}] = \mathbf{Y} + g(h(\mathbf{X})) - \mathbf{Y} = g(h(\mathbf{X})).$$

Dunque è: $f = g \circ h$, essendo \mathbf{X} un generico punto. Viceversa, se una deformazione è del tipo $f = g \circ h$, per i corrispondenti gradienti vale: $F = RU$

(analogamente per la decomposizione polare $F = VR$ si ottiene la decomposizione $f = h \circ g$, dove g è la rotazione precedente e h è la deformazione pura di gradiente V). Questo fatto era deducibile anche analiticamente, pensando alla regola di derivazione di funzione composta:

$$f = g \circ h \Rightarrow \nabla f = \nabla g \nabla h.$$

Ne segue che ogni deformazione omogenea con un punto fisso si può decomporre in modo univoco in una pura deformazione seguita da una rotazione, o in una rotazione seguita da una pura deformazione.

Analogamente si può dimostrare che ogni pura deformazione f da \mathbf{Y} si può decomporre nel prodotto di tre estensioni pure da \mathbf{Y} in tre direzioni tra loro ortogonali. Infatti: essendo λ_i i tre autovalori di $U = \nabla f$, si considerino le estensioni pure:

$$f_i(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + U_i(\mathbf{X} - \mathbf{Y}),$$

con $U_i = I + (\lambda_i - 1)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$, $\{\mathbf{e}_i\}$ base ortonormale di autovettori. È immediato verificare che

$$U = U_1 U_2 U_3 = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i,$$

da $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ segue $\nabla f = \nabla f_1 \nabla f_2 \nabla f_3$, quindi $U = U_1 U_2 U_3$ e resta così dimostrato l'asserto.

Gli autovalori (certo reali) λ_i di U rappresentano la grandezza di ogni estensione pura e prendono il nome di dilatazioni principali (principal stretches). Ricordando quanto detto nei richiami, poiché i tensori U e V hanno lo stesso spettro, le corrispondenti deformazioni pure hanno uguali dilatazioni principali e gli invarianti principali di U (di V) saranno dati da:

$$I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad II = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \quad III = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Abbiamo così verificato che ogni deformazione omogenea si può decomporre mediante quattro deformazioni elementari, una rotazione e tre estensioni pure; il gradiente di deformazione risulta essere $F = RU_1 U_2 U_3 = V_1 V_2 V_3 R$.

Deformazioni non omogenee

Sia F il gradiente di una deformazione qualunque f . Facendo le dovute ipotesi di regolarità possiamo sviluppare $f(\mathbf{X})$ nell'intorno $\mathcal{I}_{\mathbf{Y}}$ di un punto \mathbf{Y} di cui ha senso parlare perché gli spazi che utilizziamo sono di Hausdorff normati. Otteniamo:

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y}) + F|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + o(\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|), \quad \forall \mathbf{Y} \in C, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{I}_{\mathbf{Y}}.$$

Poiché il punto \mathbf{Y} è assegnato, ∇f , non dipendendo da \mathbf{X} , risulta essere costante (localmente). Ne segue che, in un intorno di \mathbf{Y} , a meno di un errore di ordine superiore a $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, una deformazione è omogenea; cioè, nell'approssimazione lineare, una qualunque deformazione è localmente omogenea. Questo significa che al variare del punto \mathbf{Y} si modifica la rappresentazione della deformazione.

Consideriamo quindi la decomposizione polare di F :

$$F = RU = VR.$$

Mutuando il linguaggio da quanto detto sulle deformazioni omogenee, diremo che: R è il tensore di rotazione, U è il tensore di (pura) deformazione destro, V il tensore di (pura) deformazione sinistro. Posto per brevità: $F_{\mathbf{Y}} = F|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}}$, si ha:

$$F_{\mathbf{Y}} = R_{\mathbf{Y}}U_{\mathbf{Y}} = V_{\mathbf{Y}}R_{\mathbf{Y}}, \quad \text{con } R_{\mathbf{Y}} = R|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}}, \quad U_{\mathbf{Y}} = U|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}}, \quad V_{\mathbf{Y}} = V|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}}$$

$R_{\mathbf{Y}}$ misura la rotazione locale nell'intorno di \mathbf{Y} , $U_{\mathbf{Y}}$ e $V_{\mathbf{Y}}$ misurano la pura deformazione locale nello stesso intorno.

Deformazioni rigide

Tra le deformazioni così definite appaiono anche i moti rigidi. Si ricordi che un moto si dice rigido se:

$$|f(\mathbf{X}, t) - f(\mathbf{Y}, t)| = |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se omettiamo la dipendenza dal tempo, abbiamo una deformazione rigida. Vale il seguente teorema:

Teorema 2.1 *Una deformazione f è rigida se e solo se è omogenea e il suo gradiente è una rotazione.*

Cioè deve essere:

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y}) + R(\mathbf{X} - \mathbf{Y}), \quad R \in \text{Orth}^+, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C. \quad (2.3)$$

Dimostrazione

Sia f rigida; derivando $[f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})]^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{Y})^2$ rispetto a \mathbf{X} si ottiene:

$$\nabla f(\mathbf{X})^T [f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})] = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \quad (\text{poiché } \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}^T);$$

derivando poi rispetto ad \mathbf{Y} si ha:

$$\nabla f(\mathbf{X})^T \nabla f(\mathbf{Y}) = I \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C,$$

da cui, posto $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ si ottiene: $\nabla f(\mathbf{X}) \in \text{Orth}^+$ e dunque:

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C.$$

Quindi ∇f è una rotazione costante, cioè f è omogenea con $F = R$.

Viceversa, se vale la (2.3), con $R \in \text{Orth}^+$, sarà:

$$[f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})]^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{Y})^2$$

e dunque la deformazione è rigida.

□

Ogni deformazione (= spostamento) rigida, si decompone nel prodotto di una rotazione per una traslazione; infatti se:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + R(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$$

è una rotazione attorno ad \mathbf{Y} e

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}_0$$

è una traslazione [da cui $\mathbf{u}_0 = g(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = g(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}$], si ha:

$$\begin{aligned} g[f(\mathbf{X})] &= f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y} = \\ &= \mathbf{Y} + R(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + g(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y} = \\ &= g(\mathbf{Y}) + R(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

e viceversa; inoltre $f \circ g = g \circ f$.

□

Per quanto detto in precedenza ogni deformazione omogenea si può quindi decomporre nel prodotto di una deformazione rigida per una pura deformazione, mentre per le deformazioni non omogenee il discorso è corretto solo localmente.

Deformazioni isocore

Definizione 2.11 Una deformazione si dice isòcora se lascia invariato il volume di ogni porzione \mathcal{P} di \mathcal{C} .

Teorema 2.2 Una deformazione è isòcora se e solo se $\det F = 1$.

Dimostrazione

Il volume di una qualunque porzione \mathcal{P}^* di \mathcal{C}^* è dato da:

$$V(\mathcal{P}^*) = \int_{\mathcal{P}^*} dV^*,$$

essendo dV^* l'elemento di volume in \mathcal{C}^* :

$$dV^* = dX^1 dX^2 dX^3.$$

Nella configurazione attuale \mathcal{C} sarà $\mathcal{P} = f(\mathcal{P}^*)$ e il volume corrispondente sarà dato da:

$$V(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} dV,$$

con $dV = dx^1 dx^2 dx^3$.

Si può passare da \mathcal{P} a \mathcal{P}^* con il cambiamento di variabile $\mathbf{x} = f(\mathbf{X})$; si ha:

$$V(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}^*} J dV^*,$$

dove J è lo jacobiano della trasformazione e vale:

$$J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial X^h} \right| = \det F.$$

Sarà dunque, per l'ipotesi di invariabilità del volume di \mathcal{P} :

$$V(\mathcal{P}^*) = V(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \int_{\mathcal{P}^*} dV^* = \int_{\mathcal{P}^*} \det F dV^*, \quad \forall \mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{C}^*$$

e quindi deve essere: $\det F = 1$. Il viceversa è ovvio.

□

Osservazione

Le considerazioni fatte nella dimostrazione del teorema forniscono anche l'indicazione per individuare il significato fisico del $\det F$. Infatti dalla:

$$V(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}^*} \det F dV^*,$$

per il teorema del valor medio si ha: $V(\mathcal{P}) = \det F |_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}^*} V(\mathcal{P}^*)$ da cui:

$$\det F |_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}^*} = \frac{V(\mathcal{P})}{V(\mathcal{P}^*)},$$

cioè il $\det F$ rappresenta il volume di una porzione di corpo deformato corrispondente al volume unitario nella configurazione di riferimento.

Per valutare U e V a partire da F (e quindi da f) si potrebbe ricordare la loro definizione:

$$U = \sqrt{F^T F} \quad e \quad V = \sqrt{F F^T},$$

ma il calcolo esplicito sarebbe complicato. Conviene invece introdurre i due seguenti tensori di deformazione:

$$C = U^2 = F^T F \quad \text{tensore destro di **Cauchy-Green**,$$

$$B = V^2 = F F^T \quad \text{tensore sinistro di **Cauchy-Green**,$$

Si noti che $V = R U R^T \Rightarrow B = R U^2 R^T \Rightarrow B = R C R^T$ (cioè la relazione fra B e C è la stessa esistente fra V e U) e che B e C hanno gli stessi invarianti principali.

Faremo ora vedere che a C si può dare il significato di tensore metrico locale nella configurazione attuale. Si consideri il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{o} = x^i \mathbf{e}_i$ in una base spaziale $\{\mathbf{e}_i\}$, e si introducano i vettori:

$$\mathbf{g}_h = \partial_h(\mathbf{x} - \mathbf{o}) = \partial_h x^i \mathbf{e}_i = F_h^i \mathbf{e}_i.$$

I tre vettori \mathbf{g}_h , essendo indipendenti, costituiscono sulla varietà \mathcal{C} una base locale, perchè definita punto per punto: $\mathbf{g}_h = \mathbf{g}_h[\mathbf{x}(\mathbf{X})]$.

L'indipendenza si prova dimostrando che:

$$\sum_h a^h \mathbf{g}_h = \mathbf{o} \Rightarrow a^h = 0, \quad h = 1, 2, 3.$$

Infatti:

$$\sum_h a^h \mathbf{g}_h = \sum_h a^h F_h^i \mathbf{e}_i = \mathbf{o} \Rightarrow \sum_h a^h F_h^i = 0 \Rightarrow a^h = 0, \quad h = 1, 2, 3$$

essendo $\det F > 0$.

Il sistema di coordinate locali $\{y^h\}$ associato al riferimento $\{\mathbf{g}_h\}$ è allora un sistema di coordinate materiali sulla configurazione attuale \mathcal{C} .

(Le coordinate materiali nella base locale y^h non sono le coordinate lagrangiane; infatti le prime sono coordinate materiali nella base locale, le seconde sono coordinate materiali associate, mediante la funzione di deformazione, alle coordinate spaziali (e quindi alla base scelta in E_3)).

In particolare si può rappresentare il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{o}$ nella base $\{\mathbf{g}_h\}$:

$$\mathbf{x} - \mathbf{o} = y^h \mathbf{g}_h.$$

Grazie alla $\mathbf{g}_h = F_h^i \mathbf{e}_i$, valgono i legami:

$$\begin{aligned} y^h F_h^i \mathbf{e}_i &= x^i \mathbf{e}_i, \\ y^h &= (F^{-1})_i^h x^i \Leftrightarrow x^i = F_h^i y^h. \end{aligned}$$

Introdotte le metriche:

$$\begin{aligned} g_{hk} &= \mathbf{g}_h \cdot \mathbf{g}_k && \text{metrica locale nella configurazione attuale,} \\ G_{hk} &= \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k && \text{metrica nella configurazione di riferimento,} \end{aligned}$$

si ha il legame:

$$g_{hk} = F_h^i F_k^j G_{ij}.$$

Se la base $\{\mathbf{e}_i\}$ è ortonormale, sarà $G_{ij} = \delta_{ij}$ e allora:

$$g_{hk} = \delta_{ij} F_h^i F_k^j = \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial X^h} \frac{\partial f^i}{\partial X^k} = (F^T F)_{hk} = C_{hk}.$$

Si è quindi dimostrato che C ha il significato di metrica locale.

D'altro canto anche i vettori $\mathbf{b}^i = F_h^i \mathbf{e}^h$ costituiscono una base locale, ed è:

$$\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^j = \delta^{hk} F_h^i F_k^j = \sum_k \frac{\partial f^i}{\partial X^k} \frac{\partial f^j}{\partial X^k} = B^{ij}.$$

Osservazione

Nella base $\{\mathbf{e}_i\}$ si ha:

$$C = C_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad B = B^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Si noti che B non è la metrica duale della metrica C ; vale il legame

$$B = (F^{-1})^T C F^T.$$

Fisicamente il tensore C indica la deformazione dalla configurazione di riferimento a quella attuale. Per descrivere la trasformazione inversa è preferibile usare il tensore B anziché C^{-1} .

Dalla definizione di C e B segue che:

- 1) se F è una rotazione si ha che $F^T = F^{-1}$; allora:

$$U = V = C = B = I.$$

Da questo segue, ad esempio, che: $I_C = 3$, $II_C = 3$, $III_C = 1$.

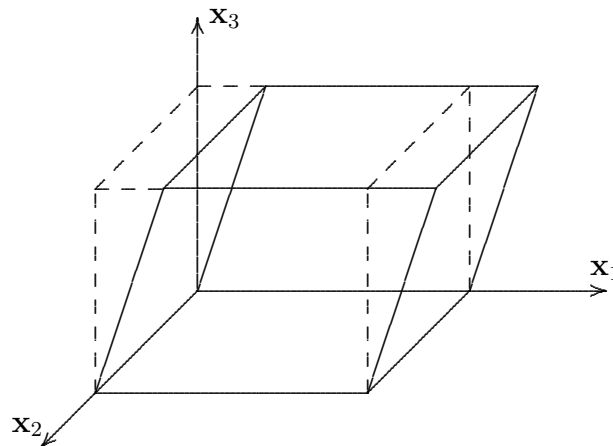
- 2) una deformazione è isocora se e solo se $\det C = \det B = 1$.

Esercizio 2.1

Assegnata la deformazione:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$$

determinare: F , B , C , gli invarianti principali di C e le deformazioni principali.



In una deformazione di questo tipo ci sono due famiglie ortogonali di piani paralleli tra loro che si conservano. Le normali di una famiglia di piani si mantengono tali dopo la deformazione (piani di scorrimento o shear).

Sia $f : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}$ la funzione di deformazione e $F = \nabla f$ il gradiente di deformazione. In componenti è $F_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^j}$, cioè:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Poichè è $\det F = 1$ la trasformazione è isòcora. Si ha:

$$C = F^T F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = F F^T = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$I_C = \text{tr} C = 1 + \gamma^2 + 1 + 1 = 3 + \gamma^2;$$

$$II_C = \begin{vmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \gamma^2 + 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + \gamma^2;$$

$$III_C = \det C = \gamma^2 + 1 - \gamma^2 = 1.$$

($III_C = 1$, ovvio essendo la trasformazione isòcora).

Determiniamo gli autovalori di C , risolvendo l'equazione:

$$\det(C - \omega I) = 0$$

ovvero:

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 + 1 - \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

da cui si ha

$$(1 - \omega)[(\gamma^2 + 1 - \omega)(1 - \omega) - \gamma^2] = 0 \quad \begin{cases} \rightarrow \omega_3 = 1 \\ \rightarrow (\gamma^2 + 1 - \omega)(1 - \omega) - \gamma^2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\gamma^2 + 1 - \omega - \omega\gamma^2 - \omega + \omega^2 - \gamma^2 = 0,$$

$$\omega^2 - \omega(2 + \gamma^2) + 1 = 0,$$

$$\omega = \frac{2 + \gamma^2 \pm \sqrt{(2 + \gamma^2)^2 - 4}}{2} = \frac{2 + \gamma^2 \pm \sqrt{4\gamma^2 + \gamma^4}}{2},$$

ed infine

$$\omega_{1,2} = 1 + \frac{\gamma^2}{2} \pm \gamma\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Posto $\lambda_i^2 = \omega_i$, gli autovalori cercati sono:

$$\lambda_1^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \gamma\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}},$$

$$\lambda_2^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{2} - \gamma\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}},$$

$$\lambda_3^2 = 1.$$

Osserviamo che $\det C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$ quindi deve essere: $\lambda_1^2 = \frac{1}{\lambda_2^2}$. Le deformazioni principali sono λ_1 , λ_2 , λ_3 . Se \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 rappresentano i versori degli assi X_1 , X_2 , X_3 , si può osservare che un autovettore di C è \mathbf{e}_3 ed il corrispondente autovalore è $\lambda_3^2 = 1$. Infatti:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{ij} C_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ C\mathbf{e}_3 &= \sum_{ij} C_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \mathbf{e}_3 = \sum_{ij} C_{ij} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_i = \\ &= \sum_{ij} C_{ij} \delta_{j3} \mathbf{e}_i = \sum_i C_{i3} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Le altre due direzioni principali di deformazione sono due arbitrarie direzioni tra loro ortogonali nel piano ortogonale ad \mathbf{e}_3 .

Esercizio 2.2

Sia assegnata una deformazione piana:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(X_1, X_2) \\ x_2 = f_2(X_1, X_2) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Dimostrare che $\lambda_3 = 1$ e che una deformazione piana è isòcora se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2^{-1}$.

Infatti si ha:

$$F = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & 0 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F^T = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_1 f_2 & 0 \\ \partial_2 f_1 & \partial_2 f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C = F^T F = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} = C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si ha così: $\det(C - \omega I) = 0$, cioè

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \omega & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} - \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \omega \end{vmatrix} = 0$$

ovvero:

$$(1 - \omega)[(C_{11} - \omega)(C_{22} - \omega) - (C_{12})^2] = 0 \quad \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava $\lambda_3^2 = \omega_3 = 1$; dalla condizione $\det C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$ si ha infine $\lambda_1^2 \lambda_2^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2^{-1}$.

Si poteva anche osservare che essendo $F = RU$, con:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da $\det F = 1$ segue $\det U = 1 = \lambda_1 \lambda_2$ ovvero $\lambda_1 = \lambda_2^{-1}$.

In generale si ha:
$$U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Essendo $F_{ij} = R_{ik} U_{kj}$ (somma sottintesa sull'indice k) e:

$$F_{13} = F_{23} = 0 \quad R_{1k} U_{k3} = 0 \quad R_{11} U_{13} + R_{12} U_{23} + R_{13} U_{33} = 0$$

$$R_{2k} U_{k3} = 0 \quad R_{21} U_{13} + R_{22} U_{23} + R_{23} U_{33} = 0$$

$$F_{33} = 1 \quad R_{3k} U_{k3} = 1 \quad R_{31} U_{13} + R_{32} U_{23} + R_{33} U_{33} = 1$$

ne segue: $U_{33} = 1$.

Tensore di deformazione (strain)

Si ricordi il legame tra gradiente di spostamento e gradiente di deformazione:

$$F = I + \nabla \mathbf{u}$$

con $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = f(\mathbf{X}) - \mathbf{X}$.

In termini dello spostamento, i tensori destro e sinistro di Cauchy-Green avranno allora l'espressione:

$$C = F^T F = I + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u},$$

$$B = F F^T = I + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^T.$$

Si noti che, se la deformazione è rigida, essendo $F \in \text{Orth}^+$ e cioè $C = B = I$, si ha:

$$\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u} = 0$$

e, essendo F costante, anche $\nabla \mathbf{u}$ è costante.

Definizione 2.12 *Si definisce tensore di strain (e caratteristiche di deformazione le sue componenti) il tensore doppio simmetrico materiale ε ovvero $\hat{\varepsilon}$, definito dalle:*

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(C - I); \quad \text{ovvero} \quad \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(B - I);$$

analogamente si può definire un tensore di strain spaziale:

$$e = \frac{1}{2}(I - B^{-1}).$$

Vale la seguente proprietà:

$$\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \text{la deformazione è rigida.}$$

Si assume ε (ovvero $\hat{\varepsilon}$ o e) come misura della deformazione effettiva (strain), avendo escluso le rotazioni rigide e le traslazioni. Questa assunzione è anche giustificata dal fatto che C può essere considerato come tensore metrico nella configurazione attuale ed I su quella di riferimento; dunque ε misura la variazione di metrica, cioè le variazioni di lunghezza, aree, angoli, ecc..., nel passaggio dalla configurazione di riferimento a quella attuale. Se nella configurazione di riferimento si volesse assumere una metrica G diversa dal tensore di Kronecker, si porrebbe allora:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(C - G),$$

ma, poichè la scelta delle coordinate, e quindi della metrica, in \mathcal{C}^* è disponibile, noi sceglieremo sempre $G \equiv I$. In termini di spostamento sarà poi:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u});$$

analogamente:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^T).$$

In una base locale $\{\mathbf{g}^i\}$ sarà:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j,$$

o in $\{\mathbf{g}_h\}$ sarà:

$$\varepsilon = \varepsilon^{hk} \mathbf{g}_h \otimes \mathbf{g}_k.$$

Posto $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ e $g^{hk} = \mathbf{g}^h \cdot \mathbf{g}^k$, valgono le relazioni:

$$\varepsilon_{ij} = g_{ih} g_{jk} \varepsilon^{hk}, \quad \varepsilon_j^i = g_{jh} \varepsilon^{ih}, \text{ ecc...}$$

Bisogna perciò fare attenzione a quale base e quale metrica si usa per alzare ed abbassare gli indici.

Teoria lineare

Definizione 2.13 *Il tensore $E = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \text{Sym} \nabla \mathbf{u}$ prende il nome di tensore di deformazione linearizzato.*

Se si considerano deformazioni in cui il gradiente di spostamento è piccolo, allora:

$$\varepsilon = E + o(\nabla \mathbf{u}),$$

cioè l'errore è un infinitesimo di ordine superiore a $\nabla \mathbf{u}$, per $|\nabla \mathbf{u}| \rightarrow 0$. Analogamente i tensori: $\hat{B} = \hat{C} = I + 2E$ differiscono da B e C per infinitesimi di ordine superiore a $\nabla \mathbf{u}$, per $|\nabla \mathbf{u}| \rightarrow 0$. Inoltre nell'approssimazione considerata una deformazione infinitesima è rigida se e solo se $\nabla \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{u}^T$, cioè, con lo stesso ordine di errore, il gradiente di spostamento corrispondente ad una deformazione rigida infinitesima è antisimmetrico.

Allora uno spostamento infinitesimo rigido è caratterizzato da un gradiente di spostamento costante ed antisimmetrico:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{Y}) + W(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{C}, \quad W \in \text{Skw},$$

ovvero, usando $\boldsymbol{\omega}$, l'aggiunto di W :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{Y}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{X} - \mathbf{Y}),$$

da cui seguono le proprietà ben note della cinematica rigida.

Consideriamo il seguente sviluppo del gradiente di spostamento nell'intorno di un punto \mathbf{Y} (nell'ipotesi che $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ sia una funzione sufficientemente regolare del suo argomento):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{X}) &= \mathbf{u}(\mathbf{Y}) + \nabla \mathbf{u} |_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}} (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + \dots \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{Y}) + W_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + S_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + \dots \\ &\cong \mathbf{u}(\mathbf{Y}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + E(\mathbf{X} - \mathbf{Y}), \end{aligned}$$

dove $\nabla \mathbf{u}$ è costante nell'intorno fissato perchè non dipende da \mathbf{X} ,

$$W = W_{\mathbf{Y}} = \text{Skw} \nabla \mathbf{u}, \quad E = S_{\mathbf{Y}} = \text{Sym} \nabla \mathbf{u}.$$

Dunque il campo di spostamento, localmente, consiste di uno spostamento rigido e di una pura deformazione. Osserviamo che, mentre nella teoria esatta la misura della deformazione, anche localmente, è di tipo moltiplicativo, nella teoria lineare la decomposizione è di tipo additivo:

$$\text{teoria esatta: } F = RU,$$

$$\text{teoria lineare: } \nabla \mathbf{u} = W + E \Rightarrow F = I + W + E.$$

Osservazione

Dato un campo di spostamento \mathbf{u} di classe C^1 , è sempre definito il campo tensoriale "tensore di deformazione". In generale non vale il viceversa: non tutti i campi tensoriali doppi simmetrici sono il simmetrico del gradiente di un campo di spostamenti (come in dinamica newtoniana, dato U , è sempre definito $F = \text{grad}U$, ma, dato F , devono essere verificate opportune condizioni affinché esista U tale che $F = \text{grad}U$).

Occorre che siano soddisfatte le cosiddette condizioni di compatibilità e tali condizioni (se il dominio è semplicemente connesso) sono condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del campo di spostamento \mathbf{u} , per cui valgono le equazioni:

$$E = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad \text{teoria lineare,}$$

oppure:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(C - I) \quad \text{teoria esatta.}$$

Si ricordi che vale la seguente notevole disuguaglianza (di Korn): se \mathbf{u} è di classe C^2 e $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ su $\partial\mathcal{B}$, è:

$$\int_{\mathcal{B}} |\nabla \mathbf{u}|^2 dV \leq 2 \int_{\mathcal{B}} E^2 dV.$$

Alcuni tipi di moti

Definizione 2.14 *Un moto si dice stazionario se $\chi_t(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{B})$ (cioè se il corpo occupa sempre la stessa porzione di spazio) e se $\mathbf{v}' = \mathbf{o}$, $\forall t$.*

Poiché il campo di velocità spaziale non dipende dal tempo, sarà $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, cioè in un moto stazionario le particelle transitano per uno stesso punto dello spazio con ugual velocità. Naturalmente questo non significa che ogni particella abbia velocità costante: infatti, passando ad una descrizione materiale, sarà

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)],$$

dunque la velocità lagrangiana dipende esplicitamente dal tempo.

Definizione 2.15 *Un moto si dice rigido se:*

$$\frac{\partial}{\partial t}[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = 0,$$

essendo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{y}(\mathbf{Y}, t)|.$$

Teorema 2.3 *condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia rigido è che ad ogni istante il campo della velocità sia del tipo di uno spostamento rigido infinitesimo:*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + W(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad W \in Skw.$$

Osservazione

Si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial t} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})] = 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}) = 0,$$

cioè: $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)] = 0$.

Si possono così ottenere tutti i risultati sui moti rigidi noti dalla Meccanica Razionale, poiché ora si parla di moti rigidi e non di spostamenti.

Si consideri ora un campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x})$; sviluppando nell'intorno di $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ è:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{y}) + L(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \dots$$

dove $L(\mathbf{y}) = \text{grad} \mathbf{v} |_{\mathbf{y}}$. Siano: $D = \text{Sym}L$ e $W = \text{Skw}L$; sarà: $L = D + W$ e quindi:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{y}) + W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \dots$$

Questo vuol dire che in un intorno di un dato punto \mathbf{y} , commettendo un errore di ordine superiore a $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ (in analogia a quanto accade per gli spostamenti), il campo di velocità è la somma di un campo di velocità rigida (infinitesima) e di un campo a gradiente di velocità simmetrico.

W prende il nome di tensore di spin e D di velocità di deformazione locale (stretching). Si osservi che, essendo D simmetrico, per il teorema di decomposizione spettrale è la somma di tre tensori:

$$D = \sum_i D_i, \quad D_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

Il campo di velocità corrispondente a ciascun λ_i è:

$$\mathbf{v}_i = \lambda_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

dove si è posto $\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$; ciascun vettore \mathbf{v}_i ha l'unica componente: $\lambda_i(x_i - y_i)$ nella direzione \mathbf{e}_i .

Dunque, un campo di velocità a gradiente simmetrico e costante è la somma di tre campi dati dalle \mathbf{v}_i lungo tre assi mutuamente ortogonali.

Definizione 2.16 *Un moto si dice piano se è:*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_1(x_1, x_2, t)\mathbf{e}_1 + v_2(x_1, x_2, t)\mathbf{e}_2,$$

in un riferimento piano (O, x_1, x_2) .

Teorema 2.4 *Se un moto è piano vale la relazione:*

$$WD + DW = (\text{div} \mathbf{v})W.$$

Dimostrazione

Si ha:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$[WD + DW] = \begin{bmatrix} 0 & \lambda(\alpha + \beta) & 0 \\ -\lambda(\alpha + \beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\alpha + \beta)[W].$$

$$\text{Risulta } \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \operatorname{Tr} L = \operatorname{Tr} D = \alpha + \beta.$$

Definizione 2.17 *Un moto si dice isocoro se, $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{C}, \forall t$, si ha*

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\mathcal{P}) = 0.$$

Teorema 2.5 *Un moto è isocoro se e solo se $\frac{d}{dt} \det F = 0$.*

Osservazione

Si ha che:

$$\operatorname{Vol}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} dV = \int_{\mathcal{P}^*} \det F dV^*,$$

essendo $\det F = J(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ lo jacobiano della trasformazione $\mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t)$ all'istante t . Ne segue che:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}^*} \frac{d}{dt} \det F dV^*.$$

Se il moto è isocoro si ha quindi, per ogni \mathcal{P} (e dunque per ogni \mathcal{P}^*):

$$\frac{d}{dt} \det F = 0$$

e viceversa.

Osservazioni

i) $\frac{d}{dt} \det F = \det F \cdot \dot{F}$ e dunque:

$$\frac{d}{dt} \det F = \det F \operatorname{tr}(\dot{F}F^{-1}).$$

Infatti, ricordando che $\varphi(A)$ si dice differenziabile se e solo se:

$$\varphi(A + U) - \varphi(A) = \mathcal{L} \cdot U + O(U^2)$$

e si scrive $D\varphi = \mathcal{L}$, è:

$$\begin{aligned} \det(F + U) &= \det[(I + UF^{-1})F] = \det F \det(I + UF^{-1}) = \\ &= \det F [1 + \operatorname{tr}(UF^{-1}) + \dots] = \det F + \det F \operatorname{tr}(UF^{-1}) + \dots \end{aligned}$$

Dunque si ha $\{\det F[U]\} = \det F \operatorname{tr}(UF^{-1})$, da cui, ponendo $U = \dot{F}$, si ottiene il risultato.

ii) Da $L = \operatorname{grad} \mathbf{v}$ (campo spaziale) e $F = \operatorname{Grad} f = \nabla f$ (campo materiale), segue: $\dot{F} = L_m F$. Infatti:

$$\dot{F}_h^i = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial X^h} = \frac{\partial}{\partial X^h} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial t} \bigg|_m \frac{\partial x^j}{\partial X^h} = L_{j|m}^i F_h^j.$$

Ne segue: $\dot{F}F^{-1} = L_m$ e $\operatorname{tr}L = \operatorname{tr} \operatorname{grad} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}$ da cui:

$$\frac{d}{dt} \det F = \det F (\operatorname{div} \mathbf{v})_m.$$

Si ha allora:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}^*} (\operatorname{div} \mathbf{v})_m \det F dV^* = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV.$$

Se ne conclude che un moto è isòcoro se e solo se $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, cioè se il campo delle velocità è solenoidale. Ma per il teorema della divergenza è anche:

$$\int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma,$$

dunque un moto è isocoro se e solo se

$$\int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0,$$

cioè il flusso della velocità attraverso la superficie della porzione di corpo è nullo. Si noti che i moti rigidi sono isòcori.

Teorema 2.6 (Teorema del trasporto del volume)

È valida la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol} \mathcal{P} = \int_{\mathcal{P}^*} \frac{d}{dt} \det F dV^* = \int_{\mathcal{P}} \text{div } \mathbf{v} dV = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma.$$

Teorema 2.7 (Teorema del trasporto di Reynold)

Sia Φ un campo spaziale regolare (a valori scalari o vettoriali). Risulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \Phi dV = \int_{\mathcal{P}} (\dot{\Phi} + \Phi \text{div } \mathbf{v}) dV = \int_{\mathcal{P}} \Phi' dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma,$$

per ogni $\mathcal{P} \subseteq C$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \Phi dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^*} \Phi_m \det F dV^* = \int_{\mathcal{P}^*} \frac{d}{dt} (\Phi_m \det F) dV^* =$$

$$\int_{\mathcal{P}^*} (\dot{\Phi} + \Phi \text{div } \mathbf{v}) |_m \det F dV^* = \int_{\mathcal{P}} (\dot{\Phi} + \Phi \text{div } \mathbf{v}) dV.$$

D'altro canto è

$$\dot{\Phi} = \Phi' + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \Phi,$$

quindi

$$\dot{\Phi} + \Phi \text{div } \mathbf{v} = \Phi' + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \Phi + \Phi \text{div } \mathbf{v} = \Phi' + \text{div} (\Phi \mathbf{v}).$$

Il teorema del trasporto del volume si ottiene da questo ponendo $\Phi = 1$.

□

Definizione 2.18 Un moto si dice irrotazionale se $W = 0$, ovvero $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{o}$.

Teorema 2.8 Se un moto è irrotazionale e isòcoro, il campo di velocità è armonico:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{o}.$$

Dimostrazione

Discende immediatamente da una proprietà dimostrata nelle premesse di analisi tensoriale: $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{o}$ e $\text{div } \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \Delta \mathbf{v} = 0$.

Condizioni di compatibilità per il tensore di deformazione

1) **Teoria esatta**

Mentre, comunque assegnato un campo vettoriale $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X})$ di classe almeno C^1 in \mathcal{C}^* , resta definito un campo tensoriale doppio simmetrico

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}^T\nabla\mathbf{u}) \quad (2.4)$$

tale che, se \mathbf{u} definisce un campo di spostamenti $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$, ϵ è il relativo tensore di deformazione, non è vero il viceversa. Non è detto che un campo tensoriale doppio $\epsilon = \epsilon(\mathbf{X})$ definisca un campo di vettori $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X})$ tramite la (2.4): questo infatti è un sistema di sei equazioni differenziali alle derivate parziali le cui incognite sono le tre componenti di \mathbf{u} . È un sistema sovradimensionato e, affinché ammetta soluzione, occorre che siano soddisfatte delle condizioni di compatibilità tra le componenti di ϵ . Osservato che assegnare ϵ equivale ad assegnare $C = 2\epsilon + I$, ovvero F , tale che $C = FF^T$, è equivalente chiedersi allora quali condizioni deve soddisfare $F = \nabla\mathbf{u} + I$ affinché esista \mathbf{u} tale che, in termini ancora equivalenti, la $\partial_i\mathbf{x} = \partial_i\mathbf{u} + \partial_i\mathbf{X}$ definisca il gradiente di deformazione $F_i^j\mathbf{e}_j = \partial_i\mathbf{x}$.

Ricordando che si è definita la base naturale (materiale) locale nella configurazione deformata $\mathbf{e}_i = \partial_i\mathbf{x}$ e chiamata $\mathbf{E}_i = \partial_i\mathbf{X}$ (base costante), in definitiva si tratta di trovare le condizioni di integrabilità del sistema $\mathbf{e}_i = \partial_i\mathbf{u} + \mathbf{E}_i$. Questo sistema è integrabile se e solo se (in domini semplicemente connessi) è

$$\partial_j\mathbf{e}_i = \partial_i\mathbf{e}_j \quad (e \ \partial_j\mathbf{E}_i \equiv \mathbf{o}).$$

Ma è: $\partial_j\mathbf{e}_i = \Gamma_{ji}^h\mathbf{e}_h$ dunque deve essere: $\partial_i\mathbf{e}_j = \Gamma_{ji}^h\mathbf{e}_h$. È ancora un sistema alle derivate parziali e la condizione ulteriore di integrabilità sarà: $\partial_r\partial_i\mathbf{e}_j = \partial_i\partial_r\mathbf{e}_j$ ovvero $\partial_r(\Gamma_{ji}^h\mathbf{e}_h) = \partial_i(\Gamma_{jr}^h\mathbf{e}_h)$ da cui:

$$\partial_r\Gamma_{ji}^k\mathbf{e}_k - \partial_i\Gamma_{jr}^k\mathbf{e}_k + \Gamma_{ji}^h\Gamma_{rh}^k\mathbf{e}_k - \Gamma_{jr}^h\Gamma_{ih}^k\mathbf{e}_k = \mathbf{o}.$$

Si tratta di un vettore che, essendo identicamente nullo, dovrà avere tutte le componenti nulle:

$$\partial_r\Gamma_{ij}^k - \partial_i\Gamma_{rj}^k + \Gamma_{ij}^h\Gamma_{rh}^k - \Gamma_{rj}^h\Gamma_{ih}^k = 0. \quad (2.5)$$

Si riconosce che, essendo i coefficienti Γ_{ij}^k quelli della connessione costruita sulla metrica C_{ij} :

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2}C^{hk}(\partial_iC_{jk} + \partial_jC_{ik} - \partial_kC_{ij}), \quad (2.6)$$

i primi membri della (2.5) sono le componenti R_{rij}^k del tensore di Riemann relativo a tale metrica. Dunque l'annullarsi di tale tensore caratterizza le condizioni di compatibilità richieste e, per un teorema di Riemann, non è altro che la condizione necessaria e sufficiente affinché la metrica C sia la metrica di uno spazio euclideo (in altri termini la varietà \mathcal{C} , configurazione attuale, sia una varietà piatta). Naturalmente, tenuto conto delle (2.6) e della $C = 2\epsilon + I$, si possono scrivere tali condizioni in termini del tensore ϵ , ottenendo la forma classica delle condizioni di congruenza per deformazioni finite:

$$\epsilon_{km,pq} + \epsilon_{pq,km} - \epsilon_{kp,mq} - \epsilon_{mq,kp} + \dots = 0 \quad (2.7)$$

dove la virgola in basso sta ad indicare derivata covariante rispetto alla metrica C_{ij} .

2) Teoria lineare

Fondamentalmente si tratta di un problema analogo dove però si ha, al posto del tensore ϵ , il tensore di deformazione linearizzato

$$E = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.8)$$

Le condizioni di compatibilità (che in tal caso prendono il nome di condizioni di congruenza di St. Venant), si riducono alle:

$$E_{km,pq} + E_{pq,km} - E_{kp,mq} - E_{mq,kp} = 0, \quad (2.9)$$

e si possono ottenere direttamente dalla (2.8) o dalla (2.7) cancellando i termini quadratici, in coerenza con l'ipotesi di linearizzazione.

In realtà, per pervenire alla (2.9) in maniera rigorosa, occorre presupporre che lo spazio sia piatto, cioè che il tensore di Riemann sia nullo, ossia che valga la (2.5), poi nell'ipotesi della linearizzazione, si ricava la (2.9).

Osservazione

Le condizioni di compatibilità, in entrambi i casi visti, sono in numero di sei, tenuto conto delle simmetrie del tensore di Riemann. Sono in apparenza troppe, perchè erano già in numero di sei le equazioni (2.4) e con altrettante condizioni non si avrebbe possibilità di soluzioni. In realtà, a partire dal caso non lineare, occorre ricordare che le componenti residue del tensore di Riemann non sono tutte indipendenti, ma devono soddisfare le identità di Bianchi:

$$R_{mpk,q}^h + R_{mkp,q}^h - R_{mqp,k}^h = 0 \quad (2.10)$$

che riducono a tre le condizioni essenziali. In definitiva si hanno le sei equazioni (2.4), le tre condizioni indipendenti di compatibilità, essendo tre le incognite componenti di $\mathbf{u}(\mathbf{X})$, con pareggiamento dunque tra incognite ed equazioni essenziali.

Le implicazioni delle identità di Bianchi non sono note, se non in casi particolari. Un certo ruolo giocano sicuramente in quei casi in cui , o per non connessione della configurazione C^* o per il fatto che la configurazione di riferimento non è uno stato naturale, la connessione non sia simmetrica (vi sia cioè una parte antisimmetrica non nulla e una conseguente torsione). In questi casi si è in presenza di dislocazioni (distribuite con continuità) o di altre imperfezioni del corpo.

Condizioni di compatibilità per lo stretching

Da $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{y}) + L(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \dots$ posto $D = \text{Sym}L$ e $W = \text{Skw}L$ si ha:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{y}) + W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \dots$$

La velocità di deformazione locale è un tensore doppio simmetrico, univocamente definito, una volta assegnato il campo di velocità. In forma lagrangiana è:

$$D = \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{x}} + \nabla \dot{\mathbf{x}}^T). \quad (2.11)$$

$D = 0 \Leftrightarrow$ i moti sono rigidi (localmente), cioè l'annullarsi di D è una condizione (locale) necessaria e sufficiente perché il moto sia rigido.

Non è ovviamente vero che, comunque assegnato un tensore doppio simmetrico, questo sia una possibile velocità di deformazione locale, cioè definisca un campo di velocità $\dot{\mathbf{x}}$ mediante la (2.11). Devono essere soddisfatte delle condizioni di compatibilità che sono facilmente deducibili, vista l'analogia formale della (2.11) con la (2.8). In componenti, essendo $D_{km} = \frac{1}{2}(\dot{x}_{km} + \dot{x}_{mk})$, si avrà:

$$D_{kn,mp} + D_{pm,kn} - D_{km,np} - D_{pn,km} = 0.$$

Capitolo 3

Equazioni di bilancio

Indichiamo con \mathcal{P} la generica porzione del corpo continuo \mathcal{B} . Nel seguito indicheremo, con abuso di notazione, con la medesima lettera \mathcal{P} sia la generica porzione di \mathcal{B} che la sua corrispondente in \mathcal{C} ; indicheremo invece con \mathcal{P}^* la porzione di corpo corrispondente a \mathcal{P} nella configurazione di riferimento \mathcal{C}^* .

Grandezze cinematiche

A \mathcal{P} vengono associate le seguenti grandezze cinematiche fondamentali, di tipo euleriano:

- *la massa e la densità*: la massa $m(\mathcal{P})$ della porzione di corpo \mathcal{P} viene definita a partire da una funzione regolare positiva $\rho(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+$, che prende il nome di densità di massa.

$$m(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}) dV$$

per un tempo t fissato.

- *La quantità di moto*:

$$l(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{v} dV$$

- *Il momento della quantità di moto*

$$m(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV,$$

dove con \mathbf{r} si intende il vettore-posizione del punto $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ rispetto ad un punto \mathbf{o} , chiamato polo, ovvero $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{o}$

- *Il centro di massa (o baricentro)*: Il centro di massa di una porzione \mathcal{P} limitata e di massa finita è dato da

$$\mathbf{x}_G - \mathbf{o} = \frac{1}{m(\mathcal{P})} \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{x} dV$$

Tale definizione non dipende dalla scelta di \mathbf{o}

- *Il tensore d'inerzia relativo al baricentro*

$$J(t) = \int_{\mathcal{P}} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G)^2 I] - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G)$$

- *L'energia cinetica*

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \rho v^2 dV$$

- *L'energia cinetica del baricentro*

$$K_G(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \rho (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_G)^2 dV$$

Ricordiamo il teorema di König:

$$K = K_G + \frac{1}{2} m(\mathcal{P}) \dot{\mathbf{x}}_G^2$$

Legge di conservazione della massa

All'istante t tutte le particelle di \mathcal{P}^* occupano, con maggiore o minore concentrazione, l'insieme \mathcal{P} . Assumiamo che la massa della porzione di corpo rimanga invariata col passare del tempo, ovvero $m(\mathcal{P}) = m(\mathcal{P}^*)$. Sostituendo la definizione di massa di \mathcal{P} otteniamo un'equazione, detta legge di conservazione della massa o equazione di bilancio della massa:

$$m(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_{\mathcal{P}^*} \rho(\mathbf{X}) dV^*$$

ma

$$\int_{\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_{\mathcal{P}^*} \rho(\mathbf{X}) \det F(\mathbf{X}) dV^*$$

dove con F si è indicata la funzione di deformazione.

Si può dunque scrivere l'equazione di bilancio della massa in forma lagrangiana:

$$\rho(\mathbf{X}) \det F(\mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X}) \quad (3.1)$$

$\rho_0(\mathbf{X})$ densità iniziale nel punto \mathbf{X} . Se la deformazione è isocora o rigida allora la densità è costante. D'altro canto l'invarianza della massa di \mathcal{P} si può anche tradurre nella condizione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0, \quad \forall \mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$$

Applichiamo al campo $\rho(\mathbf{x}, t)$ il teorema del trasporto di Reynold

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \Phi dV = \int_{\mathcal{P}} (\dot{\Phi} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{v}) dV = \int_{\mathcal{P}} \dot{\Phi} dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di bilancio della massa in forma euleriana:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.2)$$

o, equivalentemente,

$$\rho' + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.3)$$

poiché $\dot{\rho} = \rho' + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$ e $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$.

Da questo si ricavano alcune immediate conseguenze:

- Dalla (3.2) segue che un moto è isocoro (ovvero conserva invariato il volume) se e solo se $\dot{\rho} = 0$, ovvero $\rho = \rho_0$ costante.
- Dalla (3.3) segue che, considerato un dominio $\mathcal{P} \subseteq E_3$ sempre contenuto in C , $\forall t$, per un moto fissato si ha che

$$\int_{\mathcal{P}} [\rho' + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})] dV = 0$$

e quindi

$$\int_{\mathcal{P}} \rho' dV = - \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = - \int_{\partial \mathcal{P}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

- Dalla (3.1), dato un campo vettoriale $\Phi(\mathbf{x}, t)$ vale la legge di conservazione:

$$\int_{\mathcal{P}} \Phi(\mathbf{x}, t) \rho dV = \int_{\mathcal{P}^*} \Phi_m \rho_0 dV^*$$

e infine:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \Phi \rho dV &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^*} \Phi_m \rho \det F dV^* = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}^*} \Phi_m \rho_0 dV^* = \\ &= \int_{\mathcal{P}^*} \dot{\Phi}_m \rho_0 dV^* = \int_{\mathcal{P}} \dot{\Phi} \rho_0 (\det F)^{-1} dV = \int_{\mathcal{P}} \dot{\Phi} \rho dV \end{aligned}$$

Ponendo $\Phi = 1$ si ritrova $\frac{d}{dt} m = 0$.

Osservazione.

Si noti che, fissato \mathbf{o} , per qualunque \mathcal{P} si ha:

$$\dot{\mathbf{x}}_G = \frac{1}{m(\mathcal{P})} \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{v} dV$$

cioè $l(\mathcal{P}) = m(\mathcal{P})\dot{\mathbf{x}}_G$, e si riottiene così la proprietà che la quantità di moto della porzione \mathcal{P} è uguale a quella di un punto di massa $m(\mathcal{P})$ che si muova come il baricentro \mathbf{x}_G . Derivando le espressioni della quantità di moto si ottiene anche che

$$\dot{l} = \int_{\mathcal{P}} \dot{\mathbf{v}} \rho dV = m(\mathcal{P})\ddot{\mathbf{x}}_G$$

e

$$\dot{m} = \int_{\mathcal{P}} \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV = \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} dV$$

Per poter scrivere le equazioni di bilancio che governano la dinamica dei corpi continui dobbiamo introdurre le forze che agiscono sul corpo stesso e non è sufficiente il modello di forze a distanza usato nella meccanica dei sistemi particellari.

Si suppone che, assegnata una qualunque porzione \mathcal{P} di \mathcal{B} , siano definiti due campi di forze, cioè due funzioni vettoriali L-integrabili rispettivamente su \mathcal{P} e $\partial\mathcal{P}$

- $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, detto densità delle forze di massa, definito su \mathcal{P}
- $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$, detto densità delle forze di contatto, definito su $\partial\mathcal{P}$

tali che gli integrali

$$\mathbf{B}(\mathcal{P}) \equiv \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} dV \quad \mathbf{C}(\partial\mathcal{P}) \equiv \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t} dA$$

esistano (cioè siano misure finite) e la loro somma

$$\mathbf{F}(\mathcal{P}) = \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

sia la risultante delle forze totali agenti su \mathcal{P} . Il vettore \mathbf{B} rappresenta il risultante delle forze di massa o delle forze a distanza (ad esempio il campo gravitazionale, le eventuali forze d'inerzia, il carico distribuito, ecc...); il vettore \mathbf{C} è il risultante delle forze che agiscono sulla frontiera di \mathcal{P} per la presenza delle altre particelle di $\mathcal{B} - \mathcal{P}$ ad essa prossime (forze di tipo molecolare, microscopico, tensioni superficiali...).

Nel caso $\mathcal{P} \equiv \mathcal{B}$, si tratta di carichi distribuiti sulla frontiera di \mathcal{B} ed assegnati tramite le condizioni al contorno. Definiamo ora il momento delle forze rispetto al polo $\mathbf{o} \in E_3$:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{o}} = \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dA.$$

Possiamo dunque introdurre il seguente assioma, che ci permetterà di arrivare alle equazioni costitutive cercate.

Assioma fondamentale della meccanica dei continui

In un riferimento inerziale le variazioni nel tempo di l e di m in un moto di \mathcal{B} soddisfano, ad ogni istante t , le leggi

$$\dot{l} = \mathbf{F} \quad \dot{m} = \mathbf{M}_{\mathbf{o}}$$

Queste sono dette equazioni di bilancio ed hanno la forma esplicita:

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{a} dV = \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{t} dA \\ \dot{m} &= \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{a} dV = \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dA \end{aligned}$$

Si tratta di equazioni analoghe a quelle della meccanica dei sistemi particellari, ma non riconducibili ad esse o da esse deducibili a causa della presenza del termine \mathbf{t} , cioè delle forze di contatto, che non compaiono nel modello particellare, nel quale invece si parla di forze interne. Questo assioma dunque è nuovo e caratteristico della teoria dei continui classici.

Osservazioni.

- Se ci si volesse porre in un sistema non inerziale basterebbe introdurre le forze apparenti $\mathbf{f}^{(app)}$ nelle forze di massa ed invece del vettore \mathbf{b} considerare il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{f}^{(app)}$.
- Vale ancora il teorema di moto del baricentro; infatti derivando l'identità $l = m(\mathcal{P})\dot{\mathbf{x}}_G$ otteniamo $\dot{l} = m(\mathcal{P})\ddot{\mathbf{x}}_G$ quindi

$$\mathbf{F} = m(\mathcal{P})\ddot{\mathbf{x}}_G$$

Cioè anche nel caso del corpo continuo il baricentro di una qualunque porzione $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ si muove come un punto materiale di massa $m(\mathcal{P})$ cui sia stata applicata una forza uguale alla risultante $\mathbf{F} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ delle forze agenti su \mathcal{P} .

- Questo schema (modello) classico si basa sul postulato che le forze agenti su un generico elemento di volume o superficie del corpo siano equivalenti al loro risultante applicato in un punto arbitrario dell'elemento scelto, cioè che sia sufficiente un solo vettore (il risultante appunto) per descrivere l'azione delle forze di massa \mathbf{b} e delle forze di contatto \mathbf{t} . Si può pensare che tale schema non sia sufficiente e perciò sia necessario introdurre anche una coppia che rappresenti il momento di tali forze rispetto ad un polo generico dell'elemento, detto momento intrinseco, da distinguersi dal momento \mathbf{M}_o prima introdotto e da aggiungersi ad esso. Il modello così ottenuto prende il nome di continuo polare, o alla Cosserat, nel quale, accanto al momento intrinseco polare, viene introdotto anche, in progressiva generalizzazione, un momento intrinseco della quantità di moto.

Le equazioni di bilancio della quantità di moto e del momento delle quantità di moto hanno carattere globale. Volendo pervenire ad una formulazione locale delle equazioni di campo occorre precisare meglio la natura delle forze di contatto \mathbf{t} mediante un ulteriore assioma, dovuto a Cauchy.

L'idea di partenza è la seguente: sia \mathcal{P} una qualunque porzione di \mathcal{B} , $\partial\mathcal{P}$ la sua frontiera, $P \in \partial\mathcal{P}$ un qualunque punto di tale frontiera. La porzione di corpo $\mathcal{B} - \mathcal{P}$ esercita su P una forza che, se si escludono le forze a distanza, è dovuta alle forze di tipo molecolare che le particelle poste in $\mathcal{B} - \mathcal{P}$ prossime a $\partial\mathcal{P}$ esercitano sulle analoghe in \mathcal{P} , attraverso $\partial\mathcal{P}$. Si tratta di forze a carattere locale e dunque, nell'intorno di P , si potrà considerare la forza per unità di area che le particelle in $\mathcal{B} - \mathcal{P}$ esercitano sulle particelle in \mathcal{P} contenute in tale intorno. Dato questo carattere di località si può pensare che tale forza nel punto P , comunque diretta, dipenda non dalla configurazione di $\partial\mathcal{P}$, ma solo da quella di un intorno del primo ordine di P , ovvero dalla giacitura del piano tangente in P a $\partial\mathcal{P}$ (e cioè dalla normale a $\partial\mathcal{P}$ in P). Possiamo dunque enunciare l'assioma:

Assioma fondamentale di Cauchy sulle forze di contatto

Esiste in \mathcal{B} un campo vettoriale $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ definito per ogni punto \mathbf{x} ed ad ogni istante t , L-integrabile su \mathcal{B} , definito per ogni vettore unitario $\mathbf{n} \in E_3$, avente il significato di forza di contatto per unità di superficie.

Consideriamo ora infinite superfici $\partial\mathcal{P}$ (quindi infinite porzioni di \mathcal{B}) passanti tutte per il punto $P \in \mathcal{B}$: nel punto P resta definito un vettore \mathbf{t} (forza di contatto) per ogni normale a tali superfici, cioè per ogni versore \mathbf{n} . Si noti che, in generale, \mathbf{t} non è parallelo a \mathbf{n} .

Una prima conseguenza è che, se per P consideriamo due superfici $\partial\mathcal{P}_1$ e $\partial\mathcal{P}_2$ aventi in P il medesimo piano tangente, la forza di contatto in P , dovuta rispettivamente ai punti di $\mathcal{B} - \mathcal{P}_1$ e $\mathcal{B} - \mathcal{P}_2$ è la stessa.

D'altro canto, se i versori normali \mathbf{n}_1 ed \mathbf{n}_2 in P , rispettivamente a $\partial\mathcal{P}_1$ ed a $\partial\mathcal{P}_2$ sono diversi si hanno due differenti forze di contatto in P , ovvero $\mathbf{t}_1(\mathbf{n}_1, P, t) \neq \mathbf{t}_2(\mathbf{n}_2, P, t)$. Resta così ribadito il carattere strettamente locale di questa forza. La forza totale di contatto esercitata da $\mathcal{B} - \mathcal{P}$ su \mathcal{P} è data da

$$\mathbf{C} = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) dA$$

Come già detto se $\mathcal{P} \equiv \mathcal{B}$, \mathbf{t} assume il significato di forza di contatto esercitata dall'ambiente circostante sul corpo \mathcal{B} ; tale significato ha senso se si considera $\mathcal{C} = \chi_t(\mathcal{B})$ invece di \mathcal{B} , in quanto in tal caso si tratta di forze di contatto tra \mathcal{C} ed $E_3 - \mathcal{C}$. Questa forza prende il nome di trazione superficiale su \mathcal{B} .

Detto \mathcal{N} l'insieme dei vettori unitari di E_3 , la coppia (\mathbf{t}, \mathbf{b}) di funzioni regolari in \mathbf{x} :

$$\mathbf{t} : \mathcal{N} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow E_3, \quad \mathbf{b} : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow E_3 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

definisce un sistema di forze su \mathcal{B} durante il moto.

Si può ora enunciare il seguente teorema:

Teorema 3.1 (Teorema di Cauchy)

Sia (\mathbf{t}, \mathbf{b}) un sistema di forze agenti su \mathcal{B} durante un moto qualunque. Esiste un campo tensoriale doppio $T(\mathbf{x}, t)$ spaziale tale che, $\forall \mathbf{n} \in \mathcal{N}$

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tale tensore doppio prende il nome di tensore degli sforzi di Cauchy (o tensore di stress).

Per dimostrare il teorema occorre premettere il seguente lemma:

Lemma 3.1 1. *Se vale il teorema di Cauchy allora è:*

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n^i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i), \quad T = \sum_i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i$$

2. Viceversa, se \mathbf{t} e T hanno questa rappresentazione allora vale

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T\mathbf{n}$$

Per semplicità si è omessa la dipendenza esplicita dal tempo e dal punto.

Dimostrazione:

1. Se vale il teorema di Cauchy: $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T\mathbf{n}$, $\forall \mathbf{n} \in \mathcal{N}$. Ne segue:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T\mathbf{n} = T(n^i \mathbf{e}_i) = n^i (T\mathbf{e}_i) = n^i T_i^j \mathbf{e}_j$$

D'altro canto, avendo posto $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i$, si ha:

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = T\mathbf{e}_i = T_i^j \mathbf{e}_j,$$

dunque

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n^i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i).$$

I vettori $\mathbf{t}(\mathbf{e}_i)$ si indicano con $\Phi_i \equiv \mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = T_i^j \mathbf{e}_j$ e prendono il nome di vettori principali di sforzo. Inoltre, da $\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = T_i^j \mathbf{e}_j$, moltiplicando tensorialmente per \mathbf{e}_i si ha:

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i = T\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = T_i^h \mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_i.$$

Sommando, segue:

$$\sum_i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i = \sum_i T_i^h \mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_i = T.$$

2. Viceversa, se \mathbf{t} e T hanno questa forma, è $\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = T\mathbf{e}_i$. Infatti:

$$T\mathbf{e}_i = \left[\sum_h \mathbf{t}(\mathbf{e}_h) \otimes \mathbf{e}_h \right] \mathbf{e}_i = \left[\sum_h \mathbf{t}(\mathbf{e}_h) \right] \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{hi} \sum_h \mathbf{t}(\mathbf{e}_h) = \mathbf{t}(\mathbf{e}_i).$$

Dunque da $\mathbf{t} = n^i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i)$ segue

$$\mathbf{t} = n^i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = T n^i \mathbf{e}_i = T\mathbf{n}.$$

□

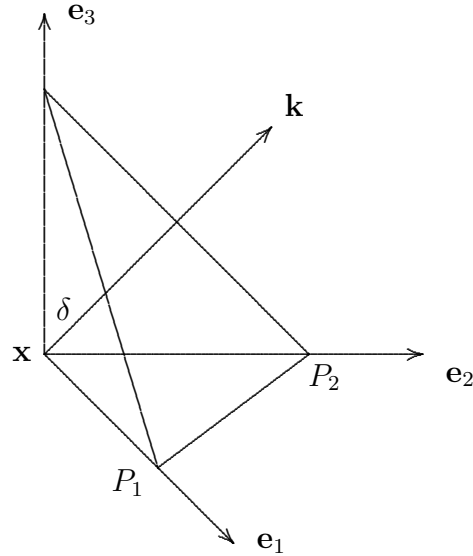
Dimostrazione:

Per dimostrare il teorema di Cauchy basta allora dimostrare che:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n^i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i), \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{N}, \quad \forall \mathbf{e}_i \text{ base ortonormale}$$

In tal caso infatti, il tensore dato da $T = \sum_i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i$, per il lemma precedente, è tale che: $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T\mathbf{n}$ e definisce il tensore degli sforzi di Cauchy. Sia \mathbf{k} un vettore unitario tale che, fissata una base $\{\mathbf{e}_i\}$ ortonormale, sia $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i > 0$, $\forall i = 1, 2, 3$.

Si consideri il tetraedro T_δ avente un vertice in $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, tre spigoli lungo le direzioni \mathbf{e}_i e la base ortogonale a \mathbf{k} , a distanza δ da \mathbf{x} , nel primo ottante, $\delta \in \mathbb{R}^+$.



Per δ sufficientemente piccolo, T_δ è certo contenuto in \mathcal{B} (in modo rigoroso $\exists \delta_0 : \forall \delta > \delta_0, T_\delta \subset \mathcal{B}$).

L'equazione di bilancio della quantità di moto, per $T_\delta = \mathcal{P}$, diviene:

$$\int_{\partial T_\delta} \mathbf{t}(\mathbf{n})dA + \int_{T_\delta} \rho \mathbf{b}_* dV = 0,$$

dove si è posto $\mathbf{b}_* = (\mathbf{b} - \mathbf{a})$; ma \mathbf{b}_* è una funzione continua, quindi limitata in T_δ ; ne segue che:

$$\left| \int_{T_\delta} \mathbf{b}_* \rho dV \right| \leq K \text{vol}(T_\delta)$$

per ogni $\delta < \delta_0$, con K numero positivo indipendente da δ . Allora

$$\left| \int_{\partial T_\delta} \mathbf{t}(\mathbf{n})dA \right| \leq K \text{vol}(T_\delta)$$

e quindi, detta A_δ l'area della base ortogonale a \mathbf{k} , è:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{A_\delta} \int_{\partial T_\delta} \mathbf{t}(\mathbf{n})dA = 0.$$

D'altro canto, chiamata S_k la base di normale \mathbf{k} ed S_i le basi ortogonali a $-\mathbf{e}_i$ risulta, per la proprietà di additività di insieme dell'integrale

$$\int_{\partial T_\delta} \mathbf{t}(\mathbf{n})dA = \int_{S_k} \mathbf{t}(\mathbf{k})dA + \sum_i \int_{S_i} \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i)dA$$

Ora, per $\delta \rightarrow 0$, il tetraedro tende ad \mathbf{x} , quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{A_\delta} \int_{\partial T_\delta} \mathbf{t}(\mathbf{n})dA = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{A_\delta} \left[\int_{S_k} \mathbf{t}(\mathbf{k})dA + \sum_i \int_{S_i} \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i)dA \right] = \\ &= \mathbf{t}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \sum_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che: $\text{Area}(S_i) = A_\delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i$.

Dunque è

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}) = - \sum_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i), \quad \forall \{\mathbf{e}_i\}$$

ne segue che \mathbf{t} è continuo in \mathbf{k} e, poiché tale espressione è vera in ogni base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$, vale per qualunque $\mathbf{k} \in \mathcal{N}$. In particolare è:

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{t}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{t}(-\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{t}(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{t}(-\mathbf{e}_3)$$

quindi $\mathbf{t}(\mathbf{k}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{k})$ (si tratta del principio di azione-reazione nel punto \mathbf{x}). Inoltre, essendo $\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(-\mathbf{e}_i)$ si ha

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}) = - \sum_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i) = \sum_i k_i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = k_i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i)$$

Non resta che porre $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ per avere

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n^i \mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = T \mathbf{n}$$

Ovvero, più precisamente

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}$$

Poiché si era supposto che \mathbf{t} fosse una funzione vettoriale regolare in \mathbf{x} , anche T sarà una funzione (tensoriale) regolare in \mathbf{x} .

□

Si può ora utilizzare il teorema di Cauchy nell'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\int_{\mathcal{P}} \mathbf{a}\rho dV = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b}\rho dV + \int_{\partial\mathcal{P}} T\mathbf{n}dA$$

da cui, per il teorema della divergenza $\left(\int_{\partial\mathcal{P}} T\mathbf{n}dA = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}T dV\right)$ si ha:

$$\int_{\mathcal{P}} (\operatorname{div}T + \rho\mathbf{b} - \rho\mathbf{a})dV = 0 \quad \forall \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}.$$

Poiché tale integrale è nullo su qualunque dominio di integrazione \mathcal{P} , la funzione integranda, nell'ipotesi che sia sufficientemente regolare, deve essere nulla, cioè deve valere

$$\operatorname{div}T + \rho\mathbf{b} = \rho\mathbf{a} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si è così ottenuta una forma locale dell'equazione di bilancio della quantità di moto. Si osservi che è, ancora per il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n})dA = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{r} \times \Phi_i n^i dA = \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\mathbf{r} \times \Phi_i) dV,$$

con $\Phi_i = \mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = T_i^j \mathbf{e}_j$, $\Phi^i = T^{ij} \mathbf{e}_j$.

Dal teorema di conservazione del momento della quantità di moto, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{r} \times \rho\mathbf{a}dV &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{r} \times \rho\mathbf{b}dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{r} \times \mathbf{t}dA \\ \int_{\mathcal{P}} \mathbf{r} \times (\rho\mathbf{a} - \rho\mathbf{b}) - \frac{\partial}{\partial x^i} (\mathbf{r} \times \Phi_i) dV &= 0 \\ \int_{\mathcal{P}} \left\{ \mathbf{r} \times \left(\rho\mathbf{a} - \rho\mathbf{b} - \frac{\partial}{\partial x^i} \Phi_i \right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \times \Phi_i \right\} dV &= 0 \end{aligned}$$

ma risulta

$$\mathbf{r} \times \left(\rho\mathbf{a} - \rho\mathbf{b} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^i} \right) = \mathbf{o}$$

essendo $\rho\mathbf{a} - \rho\mathbf{b} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^i} = \mathbf{o}$ per la prima equazione di bilancio; infatti:

$$\operatorname{div}T = \frac{\partial T_i^j}{\partial x^i} \mathbf{e}_j = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^i},$$

dunque è

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \times \Phi_i dV = \mathbf{o} \quad \forall \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$$

Si ricordi che $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{o} = x^i \mathbf{e}_i - o^i \mathbf{e}_i$, quindi $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{e}_i$.

Ne segue che $\sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \times \Phi_i = \sum_i \mathbf{e}_i \times \Phi_i = \mathbf{o}$, ovvero $\mathbf{e}_i \times \Phi_i = \mathbf{o}$; allora

$$\sum_i \mathbf{e}_i \times T^{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{o} \Leftrightarrow T^{ij} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{o} \quad \forall \{\mathbf{e}_j\}$$

ma $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ è antisimmetrico, dunque T è simmetrico: $T = T^T$.

Il teorema di Cauchy consente dunque di pervenire alla seguente rappresentazione locale delle equazioni di bilancio della quantità e del momento della quantità di moto (in forma spaziale):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} T + \rho \mathbf{b} &= \rho \mathbf{a} \\ T &= T^T \end{aligned} \tag{3.4}$$

ricordando anche la legge di conservazione della massa:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{3.5}$$

possiamo concludere che ad ogni sistema di forze (\mathbf{t}, \mathbf{b}) che soddisfa le equazioni di bilancio corrisponde un campo vettoriale che soddisfa (3.4), e ad ogni moto ed ad ogni tensore degli sforzi T corrisponde un sistema di forze

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{a} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} T$$

dove la densità è calcolata grazie all'equazione (3.5).

Osservazione.

La simmetria di T dipende dal fatto che le forze di contatto vengono rappresentate da un vettore avente il carattere di risultante in \mathbf{x} e non si introduce un momento polare. Se si usasse il modello “continuo polare”, il tensore T non sarebbe simmetrico e l'equazione di bilancio del momento genererebbe un'altra equazione vettoriale. Si tratta di uno schema più ricco e complicato, valido per cristalli, dislocazioni, continui uno e bidimensionali alla Cosserat ecc...

Volendo scrivere le equazioni di bilancio locali in forma materiale (lagrangiana), occorre introdurre il tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff T_k , così definito:

$$T_k = (\det F)T(F^{-1})^T \quad \Leftrightarrow \quad T = (\det F)^{-1}T_k F^T$$

(tutte le funzioni in tale espressioni sono di tipo materiale, cioè funzioni di X^h) Si hanno così le equazioni di bilancio lagrangiane:

$$(\det F)\rho = \rho_0$$

$$\text{Div}T_k + \rho_0\mathbf{b} = \rho_0\mathbf{A}$$

$$T_k F^T = F T_k^T, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{C}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La seconda equazione ha il vantaggio di non contenere la densità ρ , ma quella nota ρ_0 della configurazione di riferimento. La terza equazione invece ci dice che il tensore T_k non è simmetrico, ma soddisfa alla relazione

$$T_k F^T = F T_k^T$$

che si ottiene da $T = T^T$ utilizzando il legame tra T e T_k .

Il tensore di Piola-Kirchhoff fornisce la forza di contatto \mathbf{t}_* nella configurazione di riferimento:

$$\mathbf{t}_*(\mathbf{N}, \mathbf{X}, t) = T_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{N}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{C}^*, \quad \mathbf{N} \text{ versore normale a } \partial\mathcal{P}^*$$

Dall'equazione di bilancio della quantità di moto

$$\text{div}T + \rho\mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}}$$

moltiplicando scalarmente per un campo vettoriale qualunque (regolare) \mathbf{w} ed integrando sulla porzione di corpo $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$ si arriva al teorema dei lavori virtuali:

$$\int_{\mathcal{P}} \text{div}T \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\mathcal{P}} \rho\mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV = \int_{\mathcal{P}} \rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} dV.$$

Ma è:

$$\text{div}T \cdot \mathbf{w} = \text{div}(T\mathbf{w}) - T \cdot \text{grad}\mathbf{w},$$

da cui, usando il teorema della divergenza e le relazioni

$$T\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot T^T \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot T\mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{n}),$$

si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} T \cdot \mathbf{w} dV &= \int_{\partial \mathcal{P}} T \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA - \int_{\mathcal{P}} T \cdot \operatorname{grad} \mathbf{w} dV = \\ &= \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} dA - \int_{\mathcal{P}} T \cdot \operatorname{grad} \mathbf{w} dV. \end{aligned}$$

Se ora si pone $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ (velocità spaziale), tenuto conto che è

$$\int_{\mathcal{P}} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

si ottiene:

$$\int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA + \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_{\mathcal{P}} T \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} dV.$$

Poiché $T \in \operatorname{Sym}$, ne segue:

$$T \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = T \cdot \operatorname{Sym}(\operatorname{grad} \mathbf{v}) = T \cdot \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \mathbf{v}^T) = T \cdot D,$$

essendo D lo stretching (velocità di deformazione).

Si ha così l'espressione

$$\dot{K} + P_D = P_{\mathbf{t}} + P_{\mathbf{b}}$$

essendo:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \rho v^2 dV \text{ l'energia cinetica,}$$

$$P_D = \int_{\mathcal{P}} T \cdot D dV \text{ la potenza interna dello stress su } \mathcal{P}, \text{ di tipo termodinamico} \\ \text{e non meccanico}$$

$$P_{\mathbf{t}} = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA \text{ la potenza delle forze interne su } \partial \mathcal{P}$$

$$P_{\mathbf{b}} = \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV \text{ la potenza delle forze di massa su } \mathcal{P}$$

Postulato.

Vale l'equazione (corrispondente alla prima legge della termodinamica)

$$P_D = \int_{\mathcal{P}} T \cdot D dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho e dV - \int_{\mathcal{P}} \rho r dV - \int_{\partial \mathcal{P}} h dA$$

essendo

- e l'energia interna per unità di massa
- r il calore di sorgente per unità di massa
- h il flusso di calore attraverso $\partial\mathcal{P}$

Si può dimostrare che esiste un campo vettoriale su \mathcal{B} , che chiameremo $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ tale che $\forall \mathbf{n} \in \mathcal{N}$:

$$h = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$$

$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ prende il nome di vettore di flusso di calore.

In definitiva è:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) dV = \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) \rho dV + \int_{\partial\mathcal{P}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + h) dA \quad (3.6)$$

e, localmente, tenuto conto che l'equazione di bilancio della quantità di moto deve essere soddisfatta:

$$\rho \dot{e} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{tr}(TD);$$

infatti riscrivendo la (3.6) si ha:

$$\dot{K} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho e dV = \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) \rho dV + \int_{\partial\mathcal{P}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Da cui, usando l'uguaglianza $\dot{K} + P_D = P_{\mathbf{t}} + P_{\mathbf{b}}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA - \int_{\mathcal{P}} T \cdot D dV + \int_{\mathcal{P}} \rho \dot{e} dV = \\ \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) \rho dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA - \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \mathbf{q} dV \end{aligned}$$

Quindi si ottiene:

$$\int_{\mathcal{P}} (\rho \dot{e} - T \cdot D - \rho r + \operatorname{div} \mathbf{q}) dV = 0, \quad \forall \mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$$

L'introduzione di grandezze termodinamiche comporta il rispetto delle leggi della termodinamica classica, in particolare deve valere la seconda legge; tale legge si può tradurre nella **disequazione di Clausius-Duhem**, valida per ogni processo termodinamico:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho \eta dV \geq \int_{\mathcal{P}} \rho \frac{r}{\theta} dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \frac{h}{\theta} dA,$$

ovvero localmente

$$\rho\dot{\eta} \geq \rho\frac{r}{\theta} - \frac{1}{\theta}\operatorname{div}\mathbf{q} + \frac{1}{\theta^2}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta$$

essendo η l'entropia per unità di massa e θ la temperatura assoluta. Si può definire come energia libera $\Psi = e - \theta\eta$. Tale cambiamento di funzione può essere interpretato come trasformata di Legendre, essendo θ ed η variabili coniugate.

Dalle due equazioni di bilancio termodinamiche, tenuto conto della definizione di energia libera, si ottiene la disuguaglianza della dissipazione ridotta:

$$\rho(\eta\dot{\theta} + \dot{\Psi}) - \operatorname{tr}(TD) + \frac{1}{\theta^2} \cdot \nabla\theta \leq 0$$

Tutte queste equazioni di tipo termodinamico ammettono naturalmente una corrispondente formulazione lagrangiana, che non riportiamo.

Si ricordi che un processo termodinamico si definisce:

- adiabatico se e solo se $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ (cioè non c'è scambio di calore sulla superficie)
- isoentropico se e solo se $\dot{\eta} = 0$
- isoterma se e solo se $\dot{\theta} = 0$.

Si noti che un sistema è in equilibrio termodinamico se e solo se

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0, \quad D = 0.$$

Ne segue, per l'equilibrio termico, che deve essere:

$$\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \leq 0,$$

cioè il calore fluisce dal caldo al freddo (legge di Kelvin).

Capitolo 4

Relazioni costitutive

Le equazioni di bilancio in forma integrale si possono scrivere, in modo formale, con l'unica espressione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \mathcal{F}_\alpha \rho dV \geq \int_{\mathcal{P}} \mathcal{G}_\alpha \rho dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathcal{H}_\alpha dA, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5$$

espressione che deve essere valida per qualunque porzione \mathcal{P} del corpo \mathcal{B} , per qualunque istante t , per qualunque moto e per ogni materiale.

Le grandezze sotto segno di integrale rappresentano, rispettivamente:

- \mathcal{F}_α una intensità (di tipo cinetico: quantità di moto, momento della quantità di moto, energia cinetica, entropia);
- \mathcal{G}_α una densità di forza o momento, o l'analogo termodinamico;
- \mathcal{H}_α un flusso.

A seconda dei casi si tratterà di scalari, vettori, tensori, ecc... La disuguaglianza effettiva si ha solo per $\alpha = 5$; per $\alpha = 1$ sarà:

$$\mathcal{F}_1 = 1, \mathcal{G}_1 = \mathcal{H}_1 = 0.$$

Queste equazioni di bilancio, come detto, dovranno essere soddisfatte da tutti i materiali (quelli ovviamente che sono compresi in questo modello), per ogni tipo di moto. Si tenga però presente che due corpi di ugual forma e dimensione, soggetti alle stesse forze, in uguali condizioni ambientali, non si comportano allo stesso modo: ad esempio, due molle uguali, una di rame e una di acciaio, si allungano in modo diverso pur tirate con la stessa forza, o richiedono due forze diverse per produrre lo stesso allungamento.

Quindi i principi dinamici non bastano a determinare il moto di un corpo deformabile, pur avendo assegnato il campo di forze. Questa considerazione appare ancora più chiara se si considerano le equazioni di bilancio in forma locale: si tratta di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali con un numero sovrabbondante di incognite; ad esempio, oltre alle incognite cinematiche di densità, spostamento e temperatura, vi sono anche le incognite tensore degli sforzi, l'entropia, il flusso di energia, la densità di energia interna. Bisogna allora introdurre un concetto nuovo, quello di relazione costitutiva, che consenta di caratterizzare i vari tipi di materiali tramite legami (assunti assiomaticamente su basi empiriche-fenomenologiche o dedotti matematicamente man mano che si specializzano i modelli) tra le incognite dinamiche ora elencate e quelle cinematiche.

Il modello di **corpo continuo materiale** è basato su di un sistema formale di assiomi che condurrà immediatamente al concetto di relazioni costitutive e quindi alla loro specificazione, alle proprietà che è logico richiedere, alle semplificazioni che se ne deducono, alla classificazione di vari tipi di materiali. Il sistema più rigoroso e completo di assiomi per materiali soggetti a soli fenomeni meccanici e termodinamici è quello introdotto da Noll, Truesdell e Wang. Si tratta di 6 assiomi, alcuni aventi carattere fisico (o, se si vuole, metafisico, nel senso che si tratta di affermazioni di carattere generale, da assumere come regole indicanti il modo di costruire le relazioni costitutive), altri di tipo più strettamente matematico, anche se tutti trovano la loro giustificazione nella fenomenologia. Tra le ipotesi costitutive compaiono anche i vincoli interni (ad esempio vincolo di rigidità, incomprimibilità), ma non ne tratteremo qui.

1) PRINCIPIO DI DETERMINISMO:

asserisce che il comportamento presente (e futuro) del corpo è determinato, in qualche modo da definire meglio, dal suo passato fino all'istante attuale. Matematicamente traduciamo questo principio dicendo che le grandezze \mathcal{F}_α , \mathcal{G}_α , \mathcal{H}_α , che compaiono nelle equazioni di bilancio, dipendono, oltre che dal punto $P \in \mathcal{B}$, anche dal moto cui è stato soggetto il corpo in tutto il suo passato e da tutti i valori passati della temperatura.

In maniera più precisa viene definita storia del corpo all'istante t la coppia (χ^t, θ^t) con

$$\chi^t = \chi_u(P, u), \quad \theta^t = \theta(P, u), \quad -\infty < u < t,$$

che forniscono l'insieme delle configurazioni e degli stati termodinamici passati; in altre parole la storia del corpo non è altro che la restrizione delle

funzioni χ e θ all'intervallo $] -\infty, t]$. I valori attuali delle grandezze \mathcal{F}_α , \mathcal{G}_α , \mathcal{H}_α , sono determinati dalle **relazioni funzionali**:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_\alpha(\chi_t(\mathbf{X})) = \hat{\mathcal{F}}_\alpha[\chi^t; \theta^t; P] \\ \mathcal{G}_\alpha(\chi_t(\mathbf{X})) = \hat{\mathcal{G}}_\alpha[\chi^t; \theta^t; P] \\ \mathcal{H}_\alpha(\chi_t(\mathbf{X})) = \hat{\mathcal{H}}_\alpha[\chi^t; \theta^t; P] \end{cases}$$

dove il simbolo $\hat{}$ indica il valore del funzionale corrispondente. Tali relazioni funzionali prendono il nome di **relazioni costitutive** e i successivi assiomi serviranno a caratterizzarle meglio, mentre specificazioni ulteriori sulla loro forma individueranno i vari materiali.

Una prima precisazione viene dal fatto che le relazioni costitutive inserite nelle equazioni di bilancio devono renderle soddisfatte, dunque non sono tutte tra loro indipendenti. Ad esempio, assegnati il moto e le grandezze di flusso, le \mathcal{G}_α sono determinate dai funzionali $\hat{\mathcal{F}}_\alpha$ e $\hat{\mathcal{H}}_\alpha$. Viceversa, come più frequentemente accade, assegnate le forze di massa $\hat{\mathcal{G}}_\alpha$ e le grandezze di flusso $\hat{\mathcal{H}}_\alpha$, il moto $\hat{\mathcal{F}}_\alpha$ è determinato, dovendo soddisfare le equazioni di bilancio.

Tenuto conto che gli $\hat{\mathcal{H}}_\alpha \neq 0$ sono solo quattro, basta dunque assegnare, mediante le relazioni costitutive corrispondenti, quattro funzionali $\hat{\mathcal{H}}_\alpha$ per riuscire a pervenire ad un problema determinato. In realtà conviene scegliere, in alternativa, i seguenti quattro funzionali (uno tensoriale, uno vettoriale, due scalari):

$$T, \mathbf{h}, e, \eta,$$

ovvero, posto $\Psi = e - \theta\eta$ (Ψ : *energia libera*),

$$T, \mathbf{h}, \Psi, \eta.$$

Inoltre, se indichiamo con \mathcal{H}_2 lo stress T , sappiamo che $T = T^T$ e dunque il corrispondente funzionale $\hat{\mathcal{H}}_2$ deve essere un campo tensoriale doppio simmetrico.

Possiamo allora definire **corpo materiale** l'insieme:

$$\{\mathcal{B}, \chi^t, \theta^t, F^t, \hat{\mathcal{F}}_\alpha, \hat{\mathcal{H}}_\alpha\}, \text{ con } (\hat{\mathcal{H}}_2^T = \hat{\mathcal{H}}_2),$$

dove \mathcal{B} fornisce la struttura topologica del corpo, $\{\chi^t, \theta^t, F^t\}$ forniscono la sua storia e $\hat{\mathcal{F}}_\alpha, \hat{\mathcal{H}}_\alpha$ ne specificano la struttura materiale; in questo modo

le equazioni di bilancio e le relazioni costitutive per \mathcal{F}_α e \mathcal{H}_α caratterizzano completamente la risposta (moto, deformazione, temperatura, ecc...) del corpo alle sollecitazioni esterne. Si noti che nella definizione compaiono sia i funzionali di \mathcal{F}_α che di \mathcal{H}_α , in quanto il moto è una delle grandezze che caratterizzano il corpo.

2) PRINCIPIO DI AZIONE LOCALE:

i funzionali $\hat{\mathcal{F}}_\alpha$ e $\hat{\mathcal{H}}_\alpha$ dipendono, punto per punto, solo dal passato di un intorno del punto e non da tutto il corpo.

3) PRINCIPIO DI EQUIPRESENZA:

una grandezza che compaia in una relazione costitutiva va supposta presente in tutte, ossia i funzionali dipendono tutti dalle stesse variabili. Eventuali assenze vanno dimostrate.

4) PRINCIPIO DI DISSIPAZIONE UNIVERSALE:

deve valere il principio di irreversibilità, pertanto i funzionali $\hat{\mathcal{F}}_\alpha$ e $\hat{\mathcal{H}}_\alpha$ devono soddisfare la disuguaglianza di dissipazione.

5) PRINCIPIO DI INDIFFERENZA MATERIALE (*frame-indifference*):

se le relazioni costitutive servono a caratterizzare un materiale non devono dipendere dall'osservatore, cioè dal sistema di riferimento, nel senso che, ripetendo l'esperimento con le stesse modalità relative, l'esito deve essere lo stesso, relativamente ai due osservatori distinti. Assunti due riferimenti \mathcal{T} e \mathcal{T}^* e dette χ_t^* , θ_t^* le grandezze valutate in \mathcal{T}^* :

1. nel caso di funzionali a valori scalari, dovrà essere, per il generico funzionale costitutivo, che indicheremo con $\hat{\mathcal{F}}(\chi_t, \theta_t, P)$:

$$\hat{\mathcal{F}}(\chi_t, \theta_t, P) = \hat{\mathcal{F}}(\chi_t^*, \theta_t^*, P).$$

Ad esempio, se si ha una molla per la quale valga la legge di Hooke, ci si aspetta, per ugual allungamento, ugual sforzo, in qualunque riferimento ci si ponga, avendo effettuato l'esperimento con le stesse modalità relative.

2. Se si tratta di funzionali a valori vettoriali, dovrà essere:

$$\hat{\mathcal{F}}(\chi_t, \theta_t, P) = Q \hat{\mathcal{F}}(\chi_t^*, \theta_t^*, P), \quad Q \in \text{Orth}^+,$$

in quanto bisognerà tener conto della rotazione del sistema di riferimento del secondo osservatore rispetto al primo. Chiamato per semplicità \mathbf{u} il vettore in questione, è infatti:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{u}^* = u^{i*} \mathbf{e}_i^* \in \mathcal{T}^*,$$

ma, per il principio ora enunciato, è $u^i = u^{i*}$ e $\mathbf{e}_i = Q\mathbf{e}_i^*$, dove Q è un tensore ortogonale proprio. Dunque:

$$\mathbf{u} = u^i Q\mathbf{e}_i^* = Qu^{i*}\mathbf{e}_i^* = Q\mathbf{u}^*.$$

3. Nel caso di tensori doppi, ne segue:

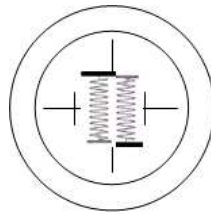
$$\hat{\mathcal{F}}(\chi_t, \theta_t, P) = Q\hat{\mathcal{F}}(\chi_t^*, \theta_t^*, P)Q^T, \quad Q \in \text{Orth}.$$

Infatti, $\forall \mathbf{u}$ soddisfacente tale principio, indicati per brevità con $\hat{\mathcal{F}}$ e $\hat{\mathcal{F}}^*$ i valori di $\hat{\mathcal{F}}$ nei due riferimenti, sarà:

$$\hat{\mathcal{F}}\mathbf{u} = Q(\hat{\mathcal{F}}\mathbf{u})^* = Q\hat{\mathcal{F}}^*\mathbf{u}^* = Q\hat{\mathcal{F}}^*Q^T\mathbf{u}.$$

6) PRINCIPIO DI SIMMETRIA MATERIALE:

Si consideri un anello elastico avente due diametri ortogonali costituiti da due molle elastiche. È chiaro che, ruotando l'anello di multipli interi di 90° , non verrà alterata alcuna esperienza meccanica (nel piano) cui si voglia sottoporre l'anello.



In altri termini, non si potrà, mediante misure di forze e deformazioni, pensare di riuscire a distinguere configurazioni di riferimento ruotate fra loro di $k\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Rotazioni di angoli diversi da $k\frac{\pi}{2}$ sono invece identificabili, danno cioè luogo a misure-forze-deformazioni diverse. Le rotazioni di un angolo $k\frac{\pi}{2}$ costituiscono quello che si chiama *gruppo di simmetria* per il corpo in questione.

In generale il principio di simmetria materiale asserisce che per ogni corpo materiale esiste un gruppo di simmetria \mathcal{S}_χ (definito punto per punto), relativo alla configurazione di riferimento χ tale che, detta $\tilde{\chi}$ la nuova configurazione ottenuta da χ mediante un elemento del gruppo, è:

$$\hat{\mathcal{F}}(\chi, \dots) = \hat{\mathcal{F}}(\tilde{\chi}, \dots),$$

cioè il funzionale è invariante sull'azione del gruppo in una configurazione di riferimento scelta. Naturalmente $\tilde{\chi}$ può essere assunta come nuova configurazione di riferimento, indistinguibile dalla precedente, dal punto di vista delle risposte a prove termodinamiche (consentite). Il gruppo \mathcal{S}_χ caratterizza classi di materiali. Introduciamo ora alcune definizioni.

Un corpo si dice solido se $\exists \chi : \mathcal{S}_\chi \subset \text{Orth}$; la configurazione di χ prende il nome di configurazione indeformata, ed è quindi quella per cui il gruppo di simmetria rende indistinguibili le configurazioni da essa ottenute (non tutte le configurazioni di riferimento sono indeformate).

Un materiale si dice isotropo se $\exists \chi : \mathcal{S}_\chi \supseteq \text{Orth}^+$; come prima, la configurazione χ prende il nome di configurazione indeformata. In tal caso il gruppo \mathcal{S}_χ prende il nome di gruppo di isotropia.

Un materiale solido isotropo sarà allora caratterizzato dal gruppo di simmetria: $\mathcal{S}_\chi = \text{Orth}^+$, poiché il gruppo ortogonale proprio è sottogruppo massimale del gruppo ortogonale. Se $\mathcal{S}_\chi \subset \text{Orth}^+$, allora si parla di corpo solido aleotropo (il caso visto dell'anello).

Definiamo ancora: crystallo fluido: $\exists \chi : \mathcal{S}_\chi \not\subset \text{Orth}$, ma $\mathcal{S}_\chi \subseteq \mathcal{U}$ ($\mathcal{U} \equiv$ gruppo unimodulare proprio su E_3) ed è dunque un materiale non solido.

Fluido: crystallo fluido per cui $\forall \chi, \tilde{\chi}$ si ha $\mathcal{S}_\chi = \mathcal{S}_{\tilde{\chi}}$. In tal caso \mathcal{S}_χ o si riduce al gruppo banale (sistemi triclini) o coincide con tutto il gruppo unimodulare.

Valgono le proprietà:

1. ogni materiale isotropo o è solido o è fluido;
2. ogni fluido è isotropo;
3. un materiale isotropo è un fluido se e solo se ogni sua configurazione è indeformata.

Come si è visto fin dall'inizio, un moto è stato caratterizzato da un'applicazione differenziabile tra la configurazione attuale e quella di riferimento, cioè la funzione di deformazione (e il suo gradiente). Il principio di azione locale stabilisce che si ha dipendenza funzionale, nelle relazioni costitutive, solo da grandezze locali (o meglio, dalla loro storia).

Definizione 4.1 *Un materiale si dice semplice se, per ogni moto, si ha dipendenza solo dal punto P e dalla storia di \mathcal{B} : gradiente di deformazione, temperatura, gradiente di temperatura. Tale richiesta è in accordo con il principio di azione locale:*

$$\mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}}(F^t, \theta^t, \text{grad}\theta^t; P).$$

Se non vi è dipendenza dal punto P , il materiale si dice *omogeneo*.

Le relazioni costitutive, per esteso, saranno allora:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \hat{T}(F^t, \theta^t, \text{grad}\theta^t; P) \\ h = \hat{h}(F^t, \theta^t, \text{grad}\theta^t; P) \\ \Psi = \hat{\Psi}(F^t, \theta^t, \text{grad}\theta^t; P) \\ \eta = \hat{\eta}(F^t, \theta^t, \text{grad}\theta^t; P) \end{array} \right.$$

essendo Ψ la *densità di energia libera*. Le rimanenti $\hat{\mathcal{F}}_\alpha$ saranno note tramite le equazioni di bilancio in forma locale, nelle quali si siano sostituite le attuali relazioni costitutive, avendo assegnato le $\hat{\mathcal{G}}_\alpha$ come campi noti. Si ricordi che la specificazione dei funzionali dipende dalla scelta della configurazione di riferimento, e quindi si dovrebbe scrivere:

$$T_\chi = \hat{T}_\chi(F_\chi^t, \theta_\chi^t, (\text{grad}\theta^t)_\chi; P)$$

ma per semplicità si omette tale indice χ .

I materiali semplici ricoprono una classe piuttosto vasta di materiali; materiali non semplici sono quelli in cui, ad esempio, vi è dipendenza dalle derivate temporali di F (materiali viscosi) e di θ (il principio di azione locale resta ancora soddisfatto).

Definizione 4.2 *Un materiale semplice si dice termoelastico se i funzionali costitutivi dipendono solo dai valori attuali dei loro argomenti e non dalla storia del corpo. Ad esempio:*

$$T = \hat{T}(F, \theta, \nabla\theta; P).$$

Tali materiali sono quindi privi di memoria e costituiscono una sottoclasse particolarmente importante dei materiali semplici.

Si consideri ora la legge di cambiamento di riferimento:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + Q(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*), \quad Q \in \text{Orth}^+ \quad (\text{coerente con } \mathbf{u} = Q\mathbf{u}^*).$$

Ne segue che:

$$F = QF^* \Leftrightarrow F^* = Q^T F,$$

che rappresenta la legge di cambiamento del gradiente di deformazione (dunque F non è oggettivo).

Gli assiomi costitutivi richiedono invece che il funzionale, che assegna il tensore degli sforzi T , soddisfi il principio di oggettività:

$$\hat{T} = Q\hat{T}^*Q^T \Leftrightarrow \hat{T}^* = Q^T\hat{T}Q.$$

Per un materiale termoelastico è, come detto:

$$T = \hat{T}(F, \theta, \text{grad}\theta; P)$$

e dunque:

$$\hat{T}^* = Q^T\hat{T}(Q^T F, \theta, \text{grad}\theta; P)Q.$$

Per il teorema di decomposizione polare è:

$$F = RU$$

e dunque:

$$\hat{T}(Q^T F, \dots) = \hat{T}(Q^T RU, \dots).$$

Tale identità deve valere qualunque sia Q e quindi anche per $Q = R$; da cui:

$$\hat{T}^* = R^T\hat{T}(U, \theta, \text{grad}\theta; P)R,$$

ovvero:

$$T = \hat{T}(U, \theta, \text{grad}\theta; P) = R\hat{T}^*R^T.$$

Tale relazione costitutiva, detta relazione costitutiva ridotta, ci dice che la funzione \hat{T} , il cui primo argomento è un tensore doppio simmetrico definito positivo, è frame-indifferent, ovvero soddisfa il principio di oggettività.

Dal principio di dissipazione si può dedurre che la funzione Ψ non dipende da $\text{grad}\theta$ e che, per una dimostrazione omessa, anche η e T non ne dipendono. Una ulteriore conseguenza di tale principio è che è sufficiente assegnare la

funzione $\Psi = \Psi(U, \theta, P)$ per conoscere η e T , tramite le equazioni dette ancora costitutive:

$$\begin{cases} T = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial U} F^T = \rho F \left(\frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^T \\ \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \end{cases}$$

(si ricordi che è: $T^T = T$).

In un materiale termoelastico, per quanto visto, è quindi sufficiente la conoscenza di una sola funzione scalare, detta densità di energia accumulata, o, più semplicemente, potenziale termoelastico, per pervenire a tutte le relazioni costitutive. In termini della funzione $e = \hat{e}(U, \eta, P)$, tramite la trasformazione di Legendre: $\hat{e} = \hat{\Psi} + \theta\eta$, si ottengono le equazioni costitutive in forma alternativa:

$$T = \rho \frac{\partial \hat{e}}{\partial U} F^T, \quad \theta = \frac{\partial \hat{e}}{\partial \eta}.$$

Definizione 4.3 *Un materiale si dice elastico se la relazione costitutiva che fornisce il tensore degli sforzi è indipendente dalla temperatura θ ed è definita da:*

$$T = \hat{T}(F; P).$$

Definizione 4.4 *Un materiale termoelastico si dice iperelastico se esiste una funzione $\Psi = \hat{\Psi}(F; P)$ tale che: $T = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial U} F^T$, da cui:*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial e}{\partial \eta} = 0,$$

cioè è soggetto a trasformazioni isoterme o isoentropiche.

Evidentemente la classe dei materiali iperelastici è l'intersezione di quella dei materiali termoelastici e di quella dei materiali elastici.

La funzione $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(U, p)$ prende il nome di (densità di) energia di deformazione o potenziale elastico.

Ricordando i legami tra U , V , C , B e F (i vari tensori di deformazione precedentemente introdotti) si può esprimere l'energia di deformazione in termini di ciascuno di essi:

$$\hat{\Psi}(U) = \hat{\Psi}[U(C)] = \tilde{\Psi}(C), \text{ ecc...}$$

Le corrispondenti equazioni costitutive si ricavano applicando il teorema della derivata di funzione composta, ottenendo le espressioni equivalenti (dove scriveremo solo Ψ , invece di $\hat{\Psi}$, $\tilde{\Psi}$, ecc.):

$$T = \rho F \left(\frac{\partial \Psi}{\partial F} \right)^T = 2\rho B \left(\frac{\partial \Psi}{\partial B} \right) = 2\rho F \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C} \right) F^T = \dots$$

Nel caso si volesse utilizzare il tensore di Piola-Kirchhoff, cioè si facesse ricorso ad una funzione materiale, si avrebbe (tanto nel caso termoelastico che iperelastico, avendosi differenza, come si è visto, tra i due casi solo per la dipendenza o meno dalla temperatura assoluta θ della funzione Ψ):

$$T_k = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial F}.$$

Capitolo 5

Elasticità

Si consideri un corpo elastico \mathcal{B} . Come visto, per i materiali di questo tipo la relazione costitutiva per il tensore degli sforzi di Cauchy si riduce a (avendo tolto per brevità il “cappello”):

$$T = T(F; P),$$

dove F è un tensore doppio a determinante positivo (equivale a richiedere che $F \in \text{Lin}^+$) e $P \in \mathcal{B}$; spesso si vuole specificare la dipendenza di T dai punti della configurazione attuale, pertanto invece di P si scrive \mathbf{x} o \mathbf{X} , a seconda che si usi la formulazione euleriana o lagrangiana:

$$T = T(F; \mathbf{x}), \quad T = T(F; \mathbf{X}).$$

Per semplicità di notazione, d’ora in poi ometteremo di indicare la dipendenza di T dal punto P , scrivendo semplicemente: $T = T(F)$.

Vogliamo verificare che l’insieme $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}$ delle trasformazioni ortogonali che lasciano invariato lo stress in \mathbf{x} , cioè l’insieme dei tensori $Q \in \text{Orth}^+$ tali che:

$$T(F) = T(FQ),$$

è un sottogruppo (proprio o improprio) di Orth^+ .

A tale scopo occorre dimostrare che:

1. se $Q \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \Rightarrow Q^{-1} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}$,
2. $\forall Q, H \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \Rightarrow QH \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}$.

Dimostrazione:

1. qualunque siano $Q \in \mathcal{T}_\chi$ ed $F \in \text{Lin}^+$, si ha che $FQ^{-1} \in \text{Lin}^+$ (infatti è $\det F > 0$ e $\det(Q^{-1}) = 1$), dunque è:

$$T(FQ^{-1}) = T(FQ^{-1}Q) = T(F) \Rightarrow Q^{-1} \in \mathcal{T}_\chi;$$

2. $T(F) = T(FQ) = T[(FQ)H] = T[F(QH)] \Rightarrow QH \in \mathcal{T}_\chi$.

□

Dunque \mathcal{T}_χ è un sottogruppo di Orth^+ e T è invariante per l'azione di \mathcal{T}_χ ; possiamo allora identificare \mathcal{T}_χ con il gruppo di simmetria \mathcal{S}_χ di questo corpo.

Vale la seguente proprietà:

$$\forall Q \in \mathcal{S}_\chi \Rightarrow QT(F)Q^T = T(QFQ^T).$$

Infatti:

$$T(QFQ^T) = T(QF) \quad \text{essendo } Q^T \in \mathcal{S}_\chi \text{ per quanto appena visto;}$$

$$T(QF) = T(F^*) = T^* \quad \text{perché } F \text{ non è oggettivo;}$$

$$T^* = QT(F)Q^T \quad \text{per l'assioma di indifferenza materiale.}$$

Per la transitività dell'uguaglianza, si ha quanto detto. Valgono espressioni analoghe per U e C , per quanto visto in generale sui materiali termoelastici:

$$Q\tilde{T}(U)Q^T = \tilde{T}(QUQ^T),$$

$$Q\bar{T}(C)Q^T = \bar{T}(QCQ^T).$$

Definizione 5.1 *Si dice funzione isotropa una funzione di argomento tensoriale invariante sotto l'azione del gruppo ortogonale.*

Se è una funzione ϕ a valori scalari, sarà: $\phi(A) = \phi(QAQ^T)$; se è una funzione Φ a valori tensoriali, sarà: $Q\Phi(A)Q^T = \Phi(QAQ^T)$.

Valgono i seguenti teoremi (di cui diamo soltanto l'enunciato).

Teorema 5.1 *Se un materiale elastico è isotropo, la funzione di risposta T (o \tilde{T} , o \bar{T}) è una funzione isotropa. Non solo, ma, in tal caso, essendo $V = RUR^T$ e $B = RCR^T$, con $R \in Orth^+$, anche le analoghe $\tilde{T}(V)$ e $\bar{T}(B)$ sono funzioni isotrope.*

Teorema 5.2 (T. di rappresentazione delle funzioni isotrope).

Sia $\phi(A)$ una funzione scalare, isotropa ad argomento tensoriale; vale la seguente rappresentazione:

$$\phi(A) = \phi(I_A, II_A, III_A) = \phi(\mathcal{I}_A),$$

dove si è indicato con \mathcal{I}_A l'insieme degli invarianti principali di A .

Si dimostra (Cfr. Gurtin, Appendice), sfruttando anche i teoremi precedenti, che possiamo rappresentare l'equazione costitutiva per un materiale elastico isotropo in una delle equivalenti forme:

$$\begin{aligned} T &= \beta_0(\mathcal{I}_B)I + \beta_1(\mathcal{I}_B)B + \beta_2(\mathcal{I}_B)B^{-1} = \\ &= \alpha_0(\mathcal{I}_B)I + \alpha_1(\mathcal{I}_B)B + \alpha_2(\mathcal{I}_B)B^2 = \\ &= \gamma_0(\mathcal{I}_C)I + \gamma_1(\mathcal{I}_C)C + \gamma_2(\mathcal{I}_C)C^2 = \dots \end{aligned}$$

dove \mathcal{I}_B e \mathcal{I}_C sono gli insiemi degli invarianti principali di B e C , e β_s , α_s , γ_s ($s = 0, 1, 2$), essendo funzioni isotrope scalari di B e C , sono funzioni dei loro invarianti principali.

È sufficiente dunque assegnare tre funzioni scalari, dipendenti dalle caratteristiche (tensori) di deformazione tramite i loro invarianti principali, per determinare completamente il tensore degli sforzi, che risulta simmetrico, poiché tali sono I , B , C , i loro quadrati e i loro inversi.

Teorema 5.3 *Si consideri un corpo elastico isotropo incomprimibile, cioè tale da verificare, per ogni moto, il vincolo di incomprimibilità:*

$$\det F = 1;$$

in questo caso la relazione costitutiva si riduce a:

$$T = -pI + \phi_1 B + \phi_2 B^2$$

(o altre analoghe), dove p è una costante indeterminata detta pressione idrostatica, ϕ_1 e ϕ_2 sono funzioni che dipendono solo dagli invarianti primo e secondo di B (ovviamente, essendo $\det B = \det F$, l'invariante terzo di B è uguale a uno).

Le equazioni di campo in termini del tensore di Cauchy sono dunque, per un corpo elastico isotropo:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{bilancio della massa,}$$

$$\operatorname{div} T + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad \text{bilancio della quantità di moto,}$$

$$T = \beta_0 I + \beta_1 B + \beta_2 B^{-1} \quad \text{equazione costitutiva,}$$

$$B = FF^T, \quad F = \nabla \mathbf{x} \quad \text{legame tra deformazione e spostamento.}$$

Si tratta, ovviamente, di relazioni in forma euleriana, che si traducono analiticamente in equazioni differenziali del secondo ordine a derivate parziali (rispetto a t e a \mathbf{X}), non lineari, nell'incognita $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$. A tale sistema vanno aggiunte le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Le condizioni iniziali sono:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{x}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{x}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{su tutto } \mathcal{B},$$

essendo \mathbf{x}_0 e $\dot{\mathbf{x}}_0$ funzioni opportunamente regolari di punto.

Le condizioni al contorno si assegnano, in generale, spezzando la frontiera $\partial \mathcal{B}$ in due domini S_1 ed S_2 tali che:

$$S_1 \cup S_2 = \partial \mathcal{B} \quad \text{e} \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset,$$

in modo che siano definite su S_1 *condizioni di posizione* (geometrico-cinematiche) e su S_2 *condizioni di trazione* (dinamiche):

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} \quad \text{su } S_1 \times [0, \infty[\quad (\text{condizione di posizione})$$

$$T \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{su } S_2 \times [0, \infty[\quad (\text{condizione di trazione})$$

essendo $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$ funzioni note, assegnate, sui loro domini. Se i domini S_1 ed S_2 sono porzioni della frontiera della configurazione attuale, allora risultano incogniti; parrebbe allora più naturale assegnare le condizioni sulla frontiera di una configurazione nota, quale è la configurazione di riferimento. In tal caso occorre far capo ad una formulazione in termini del tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff. Ricordando il legame tra il tensore di Piola-Kirchhoff e quello di Cauchy:

$$T_k = (\det F) T (F^T)^{-1},$$

le equazioni di campo in forma lagrangiana sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \det F = \rho_0, \\ \operatorname{Div} T_k + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \mathbf{A}, \\ T_k = (\tilde{\beta}_0 I + \tilde{\beta}_1 C + \tilde{\beta}_2 C^{-1}) F^{-T} \det F, \\ C = F^T F, \\ F = \nabla \mathbf{x} \end{array} \right.$$

dove $\tilde{\beta}_s$ ($s = 0, 1, 2$) sono funzioni scalari isotrope di C , cioè funzioni di C tramite i suoi tre invarianti principali. Le condizioni iniziali non cambiano, mentre quelle al contorno diventano:

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} \text{ su } S_1^* \times [0, \infty[, \quad T_k \mathbf{N} = \hat{\mathbf{T}} \text{ su } S_2^* \times [0, \infty[,$$

dove: $S_1^* \cup S_2^* = \partial \mathcal{B}$ e $S_1^* \cap S_2^* = \emptyset$.

In qualche caso, tuttavia, ha senso assegnare condizioni al contorno sulla configurazione attuale, ad esempio assegnare la pressione (si pensi ad un corpo deformabile immerso in un fluido): in tal caso la condizione al contorno corrispondente sarà:

$$T \mathbf{n} = -p_0 \mathbf{n},$$

essendo \mathbf{n} la normale alla frontiera nella configurazione attuale e p_0 la pressione.

In termini del tensore di Piola-Kirchhoff sarebbe:

$$T_k \mathbf{N} = -p_0 (\det F) F^{-T} \mathbf{N},$$

dove \mathbf{N} è il versore normale alla superficie $\partial \mathcal{B}$ della configurazione di riferimento (e dunque nota), ma $\det F$ ed F stesso dipendono dalla deformazione, che non è nota; dunque tale condizione al contorno non è di quelle considerate, in cui il secondo membro è assegnato.

Si possono assegnare altri tipi di condizioni al contorno come, ad esempio, i cosiddetti “carichi vivi” (cioè dipendenti dalla deformazione), o forze variabili nel tempo, ecc..., ma la nostra analisi si arresta a questo punto.

Una terza possibilità di esplicitare le equazioni di campo, si ha introducendo il cosiddetto tensore di Piola-Kirchhoff di seconda specie. Si tratta di un tensore simmetrico definito da:

$$P = F^{-1} T_k \iff T_k = F P.$$

Si ricordi che, dalla definizione di $T_k = (\det F)TF^{-T}$, segue

$$T_k F^T = F T_k^T,$$

essendo $T = T^T$; quindi si ha:

$$T_k F^T = F P F^T \text{ e } F T_k^T = F P^T F^T,$$

da cui deduciamo $P = P^T$, cioè P è simmetrico.

Sarà infine:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \det F = \rho_0 \\ \text{Div}(FP) + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \mathbf{A} \\ P = \hat{P}(C) \\ P = P^T \\ C = F^T F \\ F = \nabla \mathbf{x} \\ P\mathbf{N} = \hat{\mathbf{T}} \text{ su } S_2^* \times [0, \infty[, \end{array} \right.$$

restando invariate le rimanenti condizioni.

Le equazioni dell'elastostatica

Nel caso statico (elastostatica) tutti i campi sono indipendenti dal tempo e le equazioni di campo, ovvero le equazioni di equilibrio, in forma materiale sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \det F = \rho_0 \\ \text{Div} T_K + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{o} \\ T_K = T_K(C), T_K F^T = F T_K^T \\ C = F^T F \\ F = \nabla \mathbf{x} \end{array} \right.$$

con le condizioni al contorno (non si hanno ovviamente condizioni iniziali):

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} \quad \text{su } S_1^*,$$

$$T_K \mathbf{N} = \hat{\mathbf{T}} \quad \text{su } S_2^*.$$

Si è scelta una formulazione lagrangiana in termini del tensore di Piola-Kirchhoff di prima specie, in quanto è quella consueta nel caso dei solidi.

Se $S_1^* = \emptyset$ si parla di problema di sola trazione. In tal caso, essendo $S_2^* = \partial\mathcal{B}$, l'equazione di bilancio della quantità di moto di \mathcal{B} , in forma integrale, è:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \hat{\mathbf{t}} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} dV = \mathbf{o}. \quad (5.1)$$

Dunque i dati del problema $(\hat{\mathbf{t}}, \rho_0, \mathbf{b})$ devono soddisfare questa condizione, necessaria perchè esista una soluzione (è una condizione di compatibilità sui dati). L'equazione di bilancio del momento della quantità di moto coinvolge anche la deformazione \mathbf{x} , dunque non è una condizione sui dati, ma è una condizione di compatibilità sulla soluzione: se i dati soddisfano la (5.1), ci aspettiamo che esista una soluzione e il corpo si deformerà fino a raggiungere una configurazione di equilibrio in cui anche l'equazione di momento sia soddisfatta.

Osservazioni

Si consideri una deformazione omogenea:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + F(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0),$$

con F costante, e un corpo elastico omogeneo:

$$T_K = T_K(F).$$

Allora anche T_K è costante e dunque sarà:

$$\text{Div} T_K = \mathbf{o},$$

cioè questo moto (\mathbf{x}, T_K) è soluzione del nostro problema (statico) con $\mathbf{b} = \mathbf{o}$. Dunque: un corpo elastico omogeneo può ammettere deformazioni omogenee con forze di massa nulle.

Si ricordi che, se T è tale che $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ per cui:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T\mathbf{n} = \sigma\mathbf{n}, \quad (|\mathbf{n}| = 1),$$

σ prende il nome di sforzo (stress) principale e \mathbf{n} è la direzione principale di sforzo. Poiché T è simmetrico, esistono tre direzioni principali tra loro ortogonali e tre sforzi principali relativi.

In generale \mathbf{t} non è parallelo ad \mathbf{n} (ovvero ortogonale a $\partial\mathcal{P}$). Si può allora decomporre \mathbf{t} in una parte parallela ad \mathbf{n} ed una ortogonale ad \mathbf{n} . Poiché

si pensa in termini di superficie $\partial\mathcal{P}$ si dirà che si decompone \mathbf{t} in una sua componente normale a $\partial\mathcal{P}$ ed una tangenziale (o di scorrimento). Sarà cioè:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}_n + \mathbf{t}_t$$

essendo:

$$\mathbf{t}_n = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{t} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})T\mathbf{n}$$

la forza normale, e:

$$\mathbf{t}_t = \mathbf{t} - \mathbf{t}_n = T\mathbf{n} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})T\mathbf{n} = (I - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})T\mathbf{n}$$

la forza di scorrimento. Ne segue che una direzione \mathbf{n} è direzione principale se e solo se la corrispondente forza di scorrimento è zero (in tal caso è ovviamente $\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$).

Esempio 5.1 Pressione idrostatica

È il caso di un fluido perfetto a riposo. Se il fluido è perfetto, non si hanno forze interne di scorrimento. Ogni direzione \mathbf{n} è direzione principale di sforzo. Per il teorema spettrale, lo spazio caratteristico di T è tutto E_3 , ovvero vale la rappresentazione:

$$T = -pI$$

essendo p uno scalare, detto pressione idrostatica del fluido. È dunque

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T\mathbf{n} = -p\mathbf{n}.$$

(Si è nel caso incomprimibile e p corrisponde al parametro p che compare nell'equazione costitutiva per i corpi incomprimibili. Nel caso del fluido perfetto è: $\phi_1 = \phi_2 = 0$.)

Esempio 5.2 Pura tensione o compressione

È il caso in cui, assegnato un versore \mathbf{e} si ha:

$$T = \sigma(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

($\sigma < 0$: compressione, $\sigma > 0$: tensione) È:

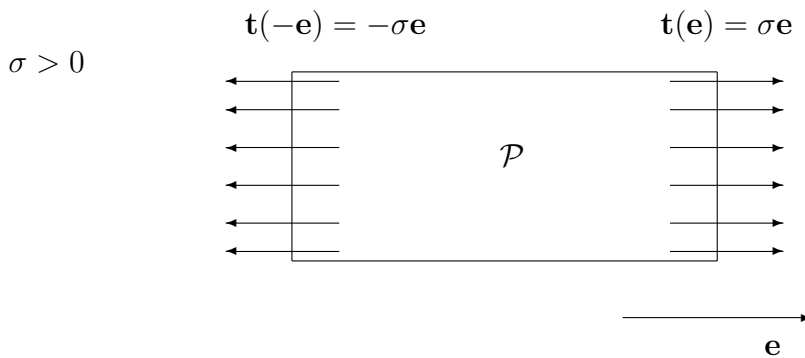
$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T\mathbf{n} = \sigma(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{n} = \sigma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e},$$

quindi:

$$\text{se } \mathbf{n} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{e}) = \sigma \mathbf{e},$$

$$\text{se } \mathbf{n} \perp \mathbf{e}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{o}.$$

Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ un rettangolo avente un lato parallelo a \mathbf{e} . La situazione è quella illustrata in figura:



Lo scalare σ prende il nome di tensione (scalare). Se $\sigma < 0$, le forze sono dirette verso l'interno di P , cioè occorre cambiare il verso.

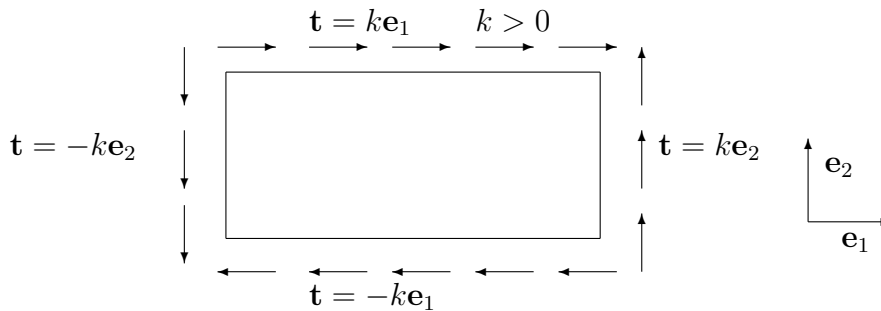
Esempio 5.3 Puro scorrimento (pure shear)

Si ha nel caso in cui, dati due versori ortonormali $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ è:

$$T = k(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ allora $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1$; se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ allora $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2$.

La situazione è quella illustrata in figura, dove \mathcal{P} è un rettangolo di lati paralleli a \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 rispettivamente:



Se lo sforzo k fosse negativo, occorrerebbe cambiare il verso a tutte le forze.

3.a) Se $T = k(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)$, e quindi $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = k(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\mathbf{n} = k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1$, si avrebbe forza di taglio solo sui lati paralleli a \mathbf{e}_1 ; se $T = k(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$, solo sui lati paralleli a \mathbf{e}_2 , ma questo è possibile solo se \mathcal{P} viene a coincidere con \mathcal{B} .

Questo caso è possibile solo per $\mathcal{P} \equiv \mathcal{B}$ (per $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$, non è possibile, dovendo T essere sempre simmetrico), poiché si traduce nelle condizioni al contorno, cioè nelle forze da noi imposte su parte della frontiera $\partial\mathcal{B}$. In tal caso, nelle parti di frontiera ove \mathbf{t} non è assegnato, nasce un campo di sforzi interni, tale che sia $T = T^T$. In altri termini, su $\partial\mathcal{B}$ (o parte di essa) si assegnano le forze e il corpo risponde in modo tale che in ogni suo punto, compresi quelli di $\partial\mathcal{B}$, si generi un campo tensoriale di sforzi interni simmetrici.

Si osservi che, posto $T = T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, nel caso 1) è $T^{ij} = -p\delta^{ij}$; nel caso 2) è $T^{11} = \sigma$ e $T^{ij} = 0$ per $i, j \neq 1$; nel caso 3) è $T^{11} = T^{22} = T^{33} = 0$, $T^{12} = T^{21} = k$ e $T^{13} = T^{23} = 0$. Si deduce allora il significato fisico di componenti di tensione (o compressione o sforzo normale) per le componenti T^{11}, T^{22}, T^{33} e di componenti di taglio (o di scorrimento) per le T^{12}, T^{23} . Se invece della porzione di corpo \mathcal{P} , si avesse tutto il corpo \mathcal{B} , questi sforzi corrisponderebbero alle condizioni al contorno sugli sforzi.

Il tensore di elasticità

Consideriamo un corpo materiale solido elastico: $T = T(F)$. Si supponga che la funzione $T(F)$ sia di classe almeno C^1 nell'intorno di $F = I$ (cioè per valori di F tali che $\|F - I\|^2 < h^2$, essendo h il raggio dell'intorno) e che abbia quindi l'espressione:

$$T(F) = T|_{F=I} + \left. \frac{\partial T}{\partial F} \right|_{F=I} (F - I) + o(\|F - I\|).$$

Definizione 5.2 *Definiamo una configurazione stato naturale o configurazione indeformata se in essa lo stress T è ovunque nullo.*

Assumendo allora come configurazione di riferimento uno stato naturale, per cui $F \equiv I$, sarà:

$$T(I) = T|_{F=I} = 0.$$

Se ora si pone:

$$C \equiv \left. \frac{\partial T}{\partial F} \right|_{F=I} \equiv \left. \frac{\partial T}{\partial H} \right|_{H=0},$$

si ha:

$$T = T(F) \cong C(F - I) = CH,$$

essendo $H = \nabla \mathbf{u}$ il gradiente di spostamento, tale che: $F = H + I$. In altri termini, la parte principale della funzione $T(F)$, per $\|H\| \rightarrow 0$, cioè non molto lontano da uno stato indeformato, è data da CH . Il tensore quadruplo $C \equiv [C_{ijkl}]$ prende il nome di tensore di elasticità del corpo \mathcal{B} . In termini di componenti sarà:

$$T_{ij} \cong C_{ijhkl} H^{hk} = C_{ij}^{hk} H_{hk},$$

ovvero

$$T^{ij} \cong C^{ijhkl} H_{hk} = C_{hk}^{ij} H^{hk}, \text{ ecc...}$$

Nel caso si voglia ricorrere ad una formulazione materiale (lagrangiana) occorrerà usare un tensore opportuno, ad esempio quello di Piola-Kirchhoff di prima specie. In tal caso è:

$$T_K = (\det F) T F^{-T},$$

quindi:

$$T_K |_{F=I} = T |_{F=I}$$

e dunque se $T |_{F=I} = 0$, anche $T_K |_{F=I} = 0$.

Considerando un intorno del tensore I possiamo scrivere:

$$T_K(F) = T_K(I) + \left. \frac{\partial T_K}{\partial F} \right|_{F=I} (F - I) + o(\|F - I\|).$$

Supponiamo ora che la configurazione di riferimento sia uno stato naturale $\Rightarrow T |_{F=I} = T_K |_{F=I} = 0$. Inoltre:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_K}{\partial F} \right|_{F=I} &= \left(\frac{\partial(\det F)}{\partial F} T F^{-T} + \det F \frac{\partial T}{\partial F} F^{-T} + (\det F) T \frac{\partial F^{-T}}{\partial F} \right) \Big|_{F=I} = \\ &= \det I \left. \frac{\partial T}{\partial F} \right|_{F=I} I^{-T} = \left. \frac{\partial T}{\partial F} \right|_{F=I}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$T_K \cong CH,$$

cioè anche la parte principale di T_K è data da CH e in questo ordine di approssimazione si ha:

$$T = T_K(\|H\| \rightarrow 0).$$

In altre parole T e T_K algebricamente sono uguali. Il tensore di elasticità ha $3^4 = 81$ componenti, ma vi sono alcune condizioni di simmetria che riducono il numero di quelle indipendenti.

Simmetrie minori

Per la simmetria di T , si ha:

$$T = T^T \Rightarrow CH = (CH)^T, \forall H \in \text{Lin},$$

da cui, passando alle componenti:

$$T_{ij} = C_{ijhk}H^{hk} = C_{jihk}H^{hk} = T_{ji}, \forall H^{hk},$$

quindi si ha la prima simmetria minore:

$$C_{ijhk} = C_{jihk}.$$

Si ricordi ora la proprietà di oggettività richiesta alla funzione T :

$$T(F) = T(FQ), \forall F \in \text{Lin}^+, \forall Q \in \text{Orth}^+.$$

Si ponga $F = I$:

$$T(I) = T(IQ) = T(Q);$$

ma $T(I) = 0$, dunque $T(Q) = 0, \forall Q \in \text{Orth}^+$. Si consideri un moto rigido a partire dalla configurazione “stato naturale”, ovvero una famiglia continua ad un parametro $Q = Q(t), t \in \mathbb{R}$, tale che $Q(0) = I$. Sarà:

$$\frac{d}{dt}T[Q(t)] = \frac{\partial T}{\partial Q}\dot{Q} = 0$$

e in particolare:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Q} \right|_{t=0} \dot{Q}(0) = 0.$$

Si dimostra che $\dot{Q}(0) \in \text{Skw}$. Infatti da $QQ^T = I$, si ha: $\frac{d}{dt}(QQ^T) = 0$, ossia

$$\dot{Q}Q^T = -Q\dot{Q}^T = -(\dot{Q}Q^T)^T \in \text{Skw}$$

e per $t = 0$ si ottiene:

$$\dot{Q}(0)Q^T(0) = \dot{Q}(0)I = \dot{Q}(0) \in \text{Skw}.$$

D'altro canto è:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial Q} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial Q} \right|_{Q=I} = C.$$

Essendo il moto arbitrario, tale è la sua velocità iniziale, ovvero $\dot{Q}(0)$. Allora possiamo scrivere:

$$\forall W = \dot{Q}(0) \in \text{Skw} \text{ si ha } CW = 0.$$

Abbiamo la seconda simmetria minore; in componenti: $\forall W^{hk} = -W^{kh}$ si ha $C_{ijhk}W^{hk} = 0$, allora:

$$C_{ijhk} = C_{ijkh}.$$

Simmetria maggiore

Definizione 5.3 *Un tensore del quarto ordine C si dice simmetrico se:*

$$\forall H, G \in \text{Lin} \text{ si ha } H \cdot (CG) = G \cdot (CH).$$

In termini di componenti:

$$C_{ijhk} = C_{hki j}.$$

Questa è l'unica simmetria non soddisfatta da tutti i tensori di elasticità.

Proprietà 5.1 *Il tensore di elasticità C è determinato dalla sua restrizione ai tensori doppi simmetrici. Infatti, essendo $H = E + W$, $E \in \text{Sym}$, $W \in \text{Skw}$, è $CH = C(E + W) = CE + CW = CE$. Si noti che è:*

$$E = \frac{1}{2}(H + H^T) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Proprietà 5.2 *Se un materiale è isotropo ed elastico, si ricordi che vale: $QT(F)Q^T = T(QFQ^T)$; nel nostro caso è: $T(F) \cong CE$, da cui segue:*

$$Q(CE)Q^T = C[QEQ^T].$$

Si tratta di condizioni sul tensore C che ne riducono ulteriormente il numero di componenti indipendenti. In questo caso C è simmetrico e dipende da due sole costanti λ e μ (costanti rispetto alle deformazioni ma dipendenti dal punto), dette moduli di elasticità di Lamé. Se il corpo è anche omogeneo λ e μ sono costanti, dipendenti solo dalle proprietà chimico-fisiche del materiale. Inoltre λ e μ sono quantità misurabili da un punto di vista dinamico, usando la velocità di propagazione delle onde.

Nel caso di un materiale elastico isotropo il cui tensore di elasticità C sia simmetrico vale la seguente espressione per le equazioni costitutive (qui non viene dimostrata):

$$T = CE = 2\mu E + \lambda(\text{tr} E)I, \quad \forall E \in \text{Sym}.$$

Esercizio: verificare che nel caso isotropo è: $C_{ijhk} = 2\mu\delta_{ih}\delta_{jk} + \lambda\delta_{ij}\delta_{hk}$.

Proprietà 5.3 *Se un materiale è iperelastico, C è simmetrico. Infatti è:*

$$C_{ijhk} = \left. \frac{\partial T_{ij}}{\partial H_{hk}} \right|_{F=I} = \left. \frac{\partial}{\partial H_{hk}} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial H_{ij}} \right|_{F=I} = \left. \frac{\partial}{\partial H_{ij}} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial H_{hk}} \right|_{F=I} = C_{hki j}.$$

Definizione 5.4 *Un tensore del quarto ordine C si dice definito positivo se:*

$$E \cdot [CE] > 0, \quad \forall E \in \text{Lin}(\text{non nullo}).$$

(In realtà, se C gode delle simmetrie minori, $E \in \text{Sym}$.)

Teorema 5.4 *Per un corpo elastico isotropo, C è definito positivo se e solo se:*

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

Dimostrazione:

Per l'isotropia è:

$$E \cdot (CE) = 2\mu E \cdot E + \lambda(\text{tr}E)E \cdot I.$$

Poiché $E \cdot I = \text{tr}E$, infatti: $E \cdot I = E_{ij}\delta^{ij} = \sum_{i=1}^3 E_{ii}$, sarà:

$$E \cdot (CE) = 2\mu \text{tr}(E^2) + \lambda(\text{tr}E)^2.$$

Si decomponga ora E nel modo seguente:

$$E = E_0 + \alpha I, \quad \text{tr}E_0 = 0.$$

Il numero α è univocamente determinato dalla relazione:

$$\text{tr}E = \text{tr}E_0 + \alpha \text{tr}I,$$

ovvero $\text{tr}E = 3\alpha$, da cui: $\alpha = \frac{1}{3}\text{tr}E$. Sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned} E \cdot (CE) &= 2\mu \text{tr}[(E_0 + \alpha I)^2] + 9\lambda\alpha^2 = 2\mu \text{tr}(E_0^2 + \alpha^2 I + 2\alpha E_0 I) + 9\lambda\alpha^2 = \\ &= 2\mu \text{tr}(E_0^2) + 6\mu\alpha^2 + 9\lambda\alpha^2 = 2\mu \text{tr}(E_0^2) + 3\alpha^2(2\mu + 3\lambda). \end{aligned}$$

(Si ricordi che $I \cdot I = \text{tr}I = 3$, $I \cdot E_0 = \text{tr}E_0 = 0$). Ora, se $\mu > 0$ e $3\lambda + 2\mu > 0$, certo $E \cdot (CE) > 0$, $\forall E \in \text{Sym}$. Viceversa, se si sceglie E tale che E_0 sia il tensore nullo, ne segue $3\lambda + 2\mu > 0$; se si sceglie E tale che $\alpha = 0$, ne segue $\mu > 0$.

Definizione 5.5 *Un tensore del quarto ordine si dice fortemente ellittico se, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E_3$ non nulli si ha:*

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot [C(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] > 0.$$

Proprietà 5.4

1. C definito positivo $\Rightarrow C$ fortemente ellittico.
Infatti $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ è un tensore doppio appartenente a Lin ; non vale invece il viceversa perchè, al variare di \mathbf{a} e \mathbf{b} in E_3 , il prodotto tensoriale $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ non esaurisce l'insieme dei tensori doppi.
2. C fortemente ellittico e materiale isotropo $\Leftrightarrow \mu > 0, 2\mu + \lambda > 0$.
Infatti, per l'isotropia, si ha:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot C(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 2\mu \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^2 + \lambda [\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})]^2, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E_3;$$

si prendano \mathbf{a} e \mathbf{b} tali che $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 0$. Allora, se C è fortemente ellittico:

$$2\mu(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^2 > 0,$$

da cui $\mu > 0$. Si osservi poi che $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^2 = [\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})]^2 + R$, essendo R una opportuna espressione residua. Si prendano \mathbf{a} e \mathbf{b} tali che $R = 0$. Allora:

$$[\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})]^2(2\mu + \lambda) > 0 \Rightarrow 2\mu + \lambda > 0.$$

3. $\mu > 0, 3\lambda + 2\mu > 0 \Rightarrow 2\mu + \lambda > 0$.
Infatti per un corpo elastico isotropo, $\mu > 0$ e $3\lambda + 2\mu > 0$ è equivalente al fatto che C sia fortemente ellittico. Il tutto implica che $2\mu + \lambda > 0$, per la proprietà 2.

Fluidi newtoniani

Ricordiamo che un fluido è un materiale per cui il gruppo di simmetria è unico per qualunque configurazione:

$$\forall \chi, \tilde{\chi} \Rightarrow \mathcal{S}_\chi = \mathcal{S}_{\tilde{\chi}}$$

ed inoltre $\forall \chi \Rightarrow \mathcal{S}_\chi \subseteq \mathcal{U}$ dove \mathcal{U} è il gruppo unimodulare di E_3 , ovvero il gruppo delle trasformazioni il cui modulo è uno.

Si può dimostrare che ogni fluido è isotropo: infatti se un corpo è un fluido allora $\mathcal{S}_\chi \subset \mathcal{U}$ ma poiché si può definire il gruppo ortogonale anche come il

gruppo di trasformazioni di modulo +1 o -1 ne segue che $\mathcal{U} \subset \text{Orth}^+$, quindi vale la catena

$$\mathcal{S}_x \subset \mathcal{U} \subset \text{Orth}^+$$

ed il materiale è isotropo.

In pratica tutto questo può essere riassunto dicendo che in un fluido:

- lo stress nel presente è determinato dalla storia del gradiente della funzione di deformazione, chiamato $G(s)$.
- si raggiunge la massima simmetria materiale possibile.

È possibile scrivere l'equazione costitutiva dei fluidi come

$$T = -\pi I + \tilde{\mathcal{D}}(G(s))$$

dove $\tilde{\mathcal{D}}$ è un funzionale, detto funzionale di risposta, e descrive il comportamento del fluido quando viene spostato dalla sua condizione di equilibrio. Richiederemo a $\tilde{\mathcal{D}}$ di soddisfare le uguaglianze che seguono:

- se il fluido è sempre stato a riposo (e quindi non ha storia, $G(s) = 0$) allora il funzionale di risposta deve essere nullo.

$$\tilde{\mathcal{D}}(0) = 0$$

- Il funzionale deve soddisfare la condizione di isotropia

$$Q\tilde{\mathcal{D}}(G(s))Q^T = \tilde{\mathcal{D}}(QG(s)Q^T), \quad \forall Q \in \text{Orth}^+ \quad \forall G(s)$$

Scegliamo inoltre di normalizzare $\tilde{\mathcal{D}}$ ponendo

$$\text{tr}\tilde{\mathcal{D}}(G(s)) = 0.$$

Da queste deriva la scelta della normalizzazione del tensore in modo che un fluido che non è mai stato mosso dallo stato di quiete (e che quindi non ha una storia, $G(s) = 0$) abbia funzionale di risposta nullo. Per esempio l'equazione costitutiva di un fluido perfetto, perfettamente incomprimibile e senza alcuna viscosità, sarà data da

$$T = -\pi I$$

Questo perchè un flusso perfetto non risente in nessun modo della sua storia.

Un tipo particolare di fluidi sono i **fluidi newtoniani**, fluidi incomprimibili che vengono completamente individuati dalla loro viscosità.

Definizione 5.6 *La viscosità è una forma di attrito presente nei fluidi che ritarda il moto relativo delle particelle e tende ad uniformare la velocità del liquido.*

Per rappresentare matematicamente questa forza si ricorre al gradiente della velocità:

$$L = \text{grad}\mathbf{v}$$

e si ottiene la seguente relazione costitutiva:

$$T = -\pi I + \mathbf{C}[L]$$

dove: T è il tensore degli sforzi di Cauchy, π è la pressione e \mathbf{C} è un operatore lineare. I fluidi che soddisfano questa equazione sono detti fluidi newtoniani e modellano con buona approssimazione la gran parte dei liquidi omogenei con cui si ha comunemente a che fare, come ad esempio l'acqua o l'olio.

In particolare poiché \mathbf{C} è un operatore lineare $\mathbf{C}[0] = 0$ quindi, un fluido newtoniano a riposo è perfetto, vale a dire dal punto di vista statico si comporta come un fluido incompressibile e non viscoso, quindi non si oppone in nessun modo allo scorrimento. Inoltre, il flusso è irrotazionale, vale a dire un corpo immerso in un fluido ideale non ruota sul proprio asse (a meno che tale rotazione non sia data in partenza).

Si può semplificare questa relazione costitutiva sfruttando il fatto che la pressione è definita a meno di una costante: sia $\beta(L)$ una qualunque funzione a valori reali di L ; si ponga

$$\mathbf{C}_\beta[L] = \mathbf{C}[L] + \beta(L)I$$

è possibile riscrivere l'espressione

$$T = -\pi I + \mathbf{C}[L]$$

come

$$T = -\{\pi + \beta(L)\}I + \mathbf{C}_\beta[L]$$

Si ponga quindi $\pi - \beta(L)$ e si normalizzi \mathbf{C} ponendo

$$\text{tr}\mathbf{C}[L] = 0$$

La pressione π sarà allora determinata dal tensore di Cauchy: calcolando l'equazione costitutiva dei fluidi newtoniani per $L = 0$ si ottiene

$$T = -\pi I \Rightarrow \pi = -\frac{1}{3}\text{tr}T$$

In particolare \mathbf{C} sarà una funzione del tipo

$$\mathbf{C} : \text{Lin}_0 \rightarrow \text{Sym}_0$$

dove

$$\text{Lin}_0 = \{F / F \text{ lineare, } \text{tr}F = 0\}; \text{Sym}_0 = \{G / G \text{ simmetrico, } \text{tr}G = 0\}$$

la pressione π è dunque unicamente determinata dallo stress (infatti si ha che $\pi = -\frac{1}{3}\text{tr}T$).

Definiamo come extra stress la forza

$$T_E = T + \pi I = T - \frac{1}{3}(\text{tr}T)I$$

Quindi il tensore di extra stress è la parte senza traccia del tensore di stress. La relazione costitutiva $T = -\pi I + \mathbf{C}[L]$ può essere allora riscritta come

$$T_E = \mathbf{C}[L].$$

Si può dare quindi una definizione alternativa di fluido newtoniano.

Definizione 5.7 *Un fluido newtoniano è un corpo incomprimibile tale da soddisfare le seguenti affermazioni:*

- *esiste una funzione lineare*

$$\mathbf{C} : \text{Lin}_0 \rightarrow \text{Sym}_0$$

tale che per tutti i processi dinamici isocori, la coppia posizione-tensore di stress, (\mathbf{x}, T) , obbedisce alla legge

$$T = \mathbf{C}[L]$$

- *la densità ρ_0 rimane costante;*

Poiché non è intuitivo capire cosa sia un fluido newtoniano, a partire da tale definizione troviamo un criterio per distinguere questi liquidi. Per fare questo è necessario usare il principio di indifferenza materiale.

Definizione 5.8 *Dati due riferimenti O e O^* che osservano il medesimo esperimento, le forze coinvolte soddisfano al principio di indifferenza materiale se*

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi_t, \theta_t, \mathbf{p}) = \tilde{\mathcal{F}}(\xi_t^*, \theta_t^*, \mathbf{p}^*)$$

Teorema 5.5 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un fluido sia newtoniano è che la funzione \mathbf{C} prima definita, che lega tensore di stress e gradiente della velocità, abbia la forma*

$$\mathbf{C}[L] = 2\mu D, \quad \forall L \in \text{Lin}$$

dove

$$D = \frac{1}{2} (L + L^T)$$

In questo caso chiamiamo lo scalare μ viscosità del fluido.

Dimostrazione:

Si supponga

$$\mathbf{C}[L] = 2\mu D, \quad \forall L \in \text{Lin}$$

sia $(\mathbf{x}, T) \in C$, dove C è la classe costitutiva del fluido. Allora (\mathbf{x}, T) è isocora e

$$T_E = 2\mu D.$$

Sia (\mathbf{x}^*, T^*) correlato a (\mathbf{x}, T) da un cambiamento del sistema di riferimento dato dal tensore ortogonale Q . Allora si può dimostrare che (\mathbf{x}^*, T^*) è isocoro. Inoltre si ha che

$$\begin{aligned} T^* &= QTQ^T \\ D^* &= QDQ^T; \end{aligned}$$

applicando l'operatore della traccia alla prima delle due equazioni si ottiene che

$$\text{tr}T^* = \text{tr}QTQ^T = \text{tr}TQ^TQ = \text{tr}T.$$

Poiché

$$T_E^* = T^* - \frac{1}{3}(\text{tr}T^*)I = QTQ^T - \frac{1}{3}\text{tr}TQ^TQ = QT_EQ^T = Q(2\mu D)Q^T = 2\mu D^*$$

Allora (\mathbf{x}^*, T^*) sono nella classe C del fluido e non dipendono dall'osservatore.

La dimostrazione della necessità della condizione richiede l'applicazione del seguente lemma:

Lemma 5.1 *Sia $L_0 \in \text{Lin}_0$. Allora esiste un moto \mathbf{x} con gradiente di velocità $L \equiv L_0$ e con $\mathbf{x}(\cdot, t)$ isocoro in ogni tempo t .*

Cerchiamo ora grazie al lemma di dimostrare che $\mathbf{C}[L] = 2\mu D$ è condizione necessaria affinché il fluido sia newtoniano.

Sopponiamo che valga il principio di invarianza, cioè che la risposta del fluido in questione non dipenda dall'osservatore. Sia $L_0 \in \text{Lin}_0$ arbitrario, sia \mathbf{x} il moto descritto nel lemma e sia $T = T_E$ il campo costante tale che $T_E = \mathbf{C}[L]$. Allora $(\mathbf{x}, T) \in C$.

Siano (\mathbf{x}^*, T^*) la coppia posizione-tensore di stress relativa ad un altro osservatore. Per il principio di invarianza anche $(\mathbf{x}^*, T^*) \in C$ e

$$T_E^* = \mathbf{C}[L^*]$$

Dove ovviamente L^* è il gradiente della velocità per il nuovo osservatore. Ma

$$\begin{aligned} T_E^* &= QT_0Q^T \\ L^* &= QLQ^T + \dot{Q}Q^T. \end{aligned}$$

Da questo deriva che

$$QT_0Q^T = \mathbf{C}[QLQ^T + \dot{Q}Q^T].$$

Poiché $T_E = \mathbf{C}[L]$ e $L \equiv L_0$ si ha che

$$Q\mathbf{C}[L_0]Q^T = \mathbf{C}[QL_0Q^T + \dot{Q}Q^T].$$

Questa relazione vale per ogni $L_0 \in \text{Lin}_0$ (nel dominio di \mathbf{C}) e per ogni funzione di classe \mathcal{C}^3 , $Q : R \rightarrow \text{Orth}^+$. Si fissi ora L_0 e sia Q una rotazione

$$Q(t) = e^{-W_0 t}$$

dove

$$W_0 = \frac{1}{2}(L + L^T)$$

allora

$$Q(0) = \mathbf{I} \quad \dot{Q} = -W_0$$

quindi l'identità

$$Q\mathbf{C}[L_0]Q^T = \mathbf{C}[QL_0Q^T + \dot{Q}Q^T]$$

calcolata in $t = 0$ diventa

$$\mathbf{C}[L_0] = \mathbf{C}[L_0 - W_0] = \mathbf{C}[D_0]$$

dove

$$D_0 = \frac{1}{2}(L_0 + L_0^T).$$

In questo modo \mathbf{C} è completamente determinata su tutto Sym_0 .

Sia ora Q una funzione costante che prende valori in Orth^+ . Calcoliamo

$$Q\mathbf{C}[L_0]Q^T = \mathbf{c}[QL_0Q^T + \dot{Q}Q^T]$$

ponendo $L_0 = D_0$ si ottiene l'uguaglianza

$$Q\mathbf{C}[D_0]Q^T = \mathbf{c}[QD_0Q^T], \quad \forall Q \in \text{Orth}^+, \forall D_0 \in \text{Sym}_0.$$

Se ne deduce che la restrizione a Sym_0 di \mathbf{C} è isotropica (applicare la funzione lineare \mathbf{C} non varia l'orientamento dei vettori) e possiamo rappresentarla come

$$\mathbf{C}[D_0] = \mu D$$

per una costante μ reale per ogni tensore $D_0 \in \text{Sym}_0$.

□

Equazioni di Navier-Stokes

Guardiamo ora come si muove un fluido newtoniano. Prendiamo un liquido di densità costante ρ_0 e consideriamo \mathbf{b} campo delle forze applicate al fluido. La relazione costitutiva per i fluidi newtoniani ha forma

$$T = -\pi I + 2\mu D$$

Dove $D = \frac{1}{2}(L + L^T)$ e L è il gradiente della velocità. L'equazione del moto $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ si scrive come:

$$\rho_0\mathbf{a} = \text{div}T + \mathbf{b}.$$

Calcoliamo esplicitamente $\text{div}T$:

$$\begin{aligned} \text{div}T &= \text{div}(-\pi I) + \mu \text{div}(2D) = -\text{grad}\pi + \mu \text{div}(L + L^T) = \\ &= -\text{grad}\pi + \mu \text{div}(\text{grad}\mathbf{v} + (\text{grad}\mathbf{v})^T) = -\text{grad}\pi + \mu\Delta\mathbf{v} \end{aligned}$$

si ricordi che \mathbf{a} è l'accelerazione in forma euleriana, che può anche essere espressa in termini di \mathbf{v} e delle sue derivate. Vale infatti l'uguaglianza

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' + (\text{grad}\mathbf{v})\mathbf{v}$$

Si ponga ora l'ulteriore ipotesi che il flusso sia isocoro. Questo succede se e solo se

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Si arriva ad una prima formulazione delle equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \rho_0[\mathbf{v}' + (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v}] = \mu \Delta \mathbf{v} - \operatorname{grad} \pi + \mathbf{b} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Può essere utile riscrivere tale sistema ponendo

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0}; \quad \pi_0 = \frac{\pi}{\rho_0}; \quad \mathbf{b}_0 = \frac{\mathbf{b}}{\rho_0}$$

ν prende il nome di viscosità cinematica. Le equazioni di Navier-Stokes possono allora essere riscritte come:

$$\begin{cases} \mathbf{v}' + (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \operatorname{grad} \pi_0 + \mathbf{b}_0 \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Mettiamoci ora in un sistema in cui il flusso sia stazionario oppure la velocità del fluido sia molto piccola. Il termine non lineare $((\nu \operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v})$ sarà rispettivamente nullo o trascurabile. Le equazioni si riducono a

$$\begin{cases} \nu \Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} \pi_0 - \mathbf{b}_0 \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di queste equazioni approssimate sono dette flussi di Stokes.

Torniamo alle equazioni generali di Navier-Stokes. Una delle differenze fondamentali tra i flussi descritti da queste equazioni ed i flussi di fluidi lineari o elastici è il modo in cui sono trasmesse la rotazione e il movimento circolare.

Teorema 5.6 *Si consideri un flusso di un fluido newtoniano sottoposto ad una forza conservativa, la cui velocità \mathbf{v} sia almeno di classe C^3 . Allora*

$$\dot{W} + DW + WD = \mu \Delta W$$

e per ogni curva chiusa \mathbf{c}

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{c}_t} \mu(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \nu \int_{\mathbf{c}_t} \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x}$$

Se inoltre il flusso è piano $W = \nu \Delta W$.

Dimostrazione

Poiché il $\mathbf{v}' + (\text{grad}\mathbf{v})\mathbf{v}$ rappresenta l'accelerazione euleriana $\dot{\mathbf{v}}$ e $\mathbf{b}_0 = -\text{grad}\beta$, vale che

$$\dot{\mathbf{v}} = \nu\Delta\mathbf{v} - \text{grad}(\pi_0 + \beta)$$

Si arriva così all'equazione

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{c}_t} \mu(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \nu \int_{\mathbf{c}_t} \Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x}$$

dato che \mathbf{c} è una curva chiusa. Inoltre

$$\text{grad}\dot{\mathbf{v}} = \nu\Delta\text{grad}\mathbf{v} - \text{grad}(\text{grad}(\pi_0 + \beta))$$

Poiché $\Delta\text{grad} = \text{grad}\Delta$. Prendendo la parte antisimmetrica di questa equazione, considerando il fatto che $\text{grad}(\text{grad}(\pi_0 + \beta))$ è simmetrico si arriva alla conclusione che

$$\frac{1}{2}(\text{grad}\dot{\mathbf{v}} - \text{grad}\dot{\mathbf{v}}^T) = \nu\Delta W.$$

La viscosità è una componente che disperde la velocità del flusso. Guardiamo allora a come varia l'energia in un fluido newtoniano: vale il seguente teorema, di cui è omessa la dimostrazione.

Teorema 5.7 *Si consideri il flusso di un fluido newtoniano, allora*

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{v}^2}{2} \rho_0 dV + 2\mu \int_{\mathcal{P}_t} |D|^2 dV$$

per ogni porzione di corpo \mathcal{P}

Questo teorema fornisce un bilancio energetico di un fluido newtoniano in movimento. Il termine

$$2\mu \int_{\mathcal{P}_t} |D|^2 dV$$

rappresenta l'energia dissipata dal fluido, mentre

$$\int_{\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{v}^2}{2} \rho_0 dV$$

è l'energia cinetica totale. Queste devono eguagliare la somma di

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}dV$$

data dalle forze agenti sulla frontiera e dalle forze interne.

Il classico problema di flusso per le equazioni di Navier-Stokes è il seguente.

Esercizio 5.1

Assegnate le seguenti ipotesi

- regione regolare \mathcal{R} ,
- viscosità cinematica $\nu > 0$,
- campo di forze \mathbf{b} su $\mathcal{R} \times (0, \infty)$,
- condizioni iniziali del tipo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ su \mathcal{R} ,
- condizioni al contorno di tipo $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{R} \times (0, \infty)$,

trovare un campo di velocità \mathbf{v} di classe \mathcal{C}^2 ed un campo di pressione continuo π che soddisfino

$$\begin{cases} \mathbf{v}' + (\text{grad}\mathbf{v})\mathbf{v} = \nu\Delta\mathbf{v} - \text{grad}\pi_0 + \mathbf{b}_0 \\ \text{div}\mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di un problema di flusso dato dalle equazioni di Navier-Stokes godono di alcune proprietà:

Teorema 5.8 *Siano (\mathbf{v}_1, π_1) e (\mathbf{v}_2, π_2) le soluzioni dello stesso problema viscoso; allora*

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad \pi_1 = \pi_2 + \alpha$$

dove α è una costante dello spazio ($\text{grad}\alpha = \mathbf{0}$).

Le soluzioni di questo problema godono anche di una certa stabilità a piccole perturbazioni; vale infatti il seguente:

Teorema 5.9 (Teorema di stabilità) *Si consideri il problema viscoso con condizioni al contorno nulle ed in cui le forze agenti siano conservative:*

$$\hat{\mathbf{v}} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{R}$$

$$\mathbf{b} = \text{grad}\beta$$

Ammettiamo che questo problema ammetta soluzione (\mathbf{v}, π) . Allora esiste una costante λ positiva tale che

$$\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}_0\| e^{-\lambda t}$$

Capitolo 6

Elasticità lineare

L'idea base dell'elasticità lineare consiste nel considerare come tensore di deformazione il tensore di elasticità linearizzato

$$E = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

che abbiamo già incontrato nel capitolo 5. Ogni volta che compaiono espressioni contenenti il gradiente di spostamento considereremo la linearizzazione di tale termine. Posto

$$H = \nabla \mathbf{u}$$

il gradiente di deformazione ed il tensore di elasticità linearizzato diverranno

$$F = H + I, \quad E = \frac{1}{2} (H + H^T).$$

Si consideri ora il tensore di Piola-Kirchhoff e la relativa equazione costitutiva:

$$T_K = T_K(F).$$

Si faccia l'ipotesi che la configurazione di riferimento sia una configurazione naturale, cioè che sia $T_K(I) = 0$. Se la relazione costitutiva $T_K(F)$ è sufficientemente regolare si può farne una rappresentazione approssimata:

$$T_K(F) = T_K(I) + \left. \frac{\partial T_K}{\partial F} \right|_{F=I} (F - I)$$

ovvero, trascurando il termine di ordine superiore ed esprimendo lo sforzo in termini della deformazione E :

$$T_K = T_K(E) = CE.$$

Ne segue che il tensore di Piola-Kirchhoff di prima specie è simmetrico nella teoria lineare e la relazione costitutiva che lo assegna è di tipo lineare nel tensore di deformazione “infinitesima” E . L'errore commesso nel considerare la sola parte lineare di $T_K(E)$ è dell'ordine di $\|\nabla \mathbf{u}\|$. La quantità $T_K(I)$ è detta stress residuo; la condizione $T_K(I) = 0$ si traduce nel fatto che il corpo regge meglio agli sforzi.

Le equazioni di bilancio dell'elasticità lineare sono allora:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div} T_k + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \\ T_K = CE \\ E = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\ \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \end{array} \right.$$

a cui si devono aggiungere le condizioni al contorno e le condizioni iniziali.

In termini di componenti si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_j T_{ij} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{u}_i \\ T_{ij} = C_{ij}^{hk} E_{hk} \\ E_{hk} = \frac{1}{2} (\partial_h u_k + \partial_k u_h) \\ u_h = x_h - X_h \end{array} \right.$$

Per semplicità di scrittura si è omessa la lettera K per le componenti del tensore di Piola-Kirchhoff. Si ricordi che tali equazioni sono valide nelle ipotesi che sia $T_K(I) = 0$ e $\|\nabla \mathbf{u}\| \rightarrow 0$.

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali lineari in \mathbf{u}, E, T_K . Si ricordi che uno spostamento rigido infinitesimo è caratterizzato da un campo di spostamenti del tipo

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{Y}) + W(\mathbf{X} - \mathbf{Y}),$$

essendo W il tensore di spin ($W \in \text{Skw}$). In questo caso è $W = \nabla \mathbf{u}$, quindi $\nabla \mathbf{u} \in \text{Skw}$.

Se ne conclude che in un moto rigido infinitesimo $E = 0$ implica $T_K = 0$, cioè E è una caratteristica di deformazione.

Se il corpo è isotropo ed omogeneo, si ha

$$T_K(E) = 2\mu E + \lambda(\text{tr}E)I,$$

dove i moduli elastici λ e μ sono le costanti di Lamé. L'equazione di moto diviene

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\text{Div}\mathbf{u} + \rho_0\mathbf{b} = \rho_0\ddot{\mathbf{u}}.$$

Infatti si ha

$$\text{Div}T_K = \text{Div}(CE) = \text{Div}[2\mu E + \lambda(\text{tr}E)I],$$

ed è

$$\text{Div}E = \frac{1}{2}\text{Div}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) = \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{u} + \nabla\text{Div}\mathbf{u})$$

in componenti, con la convenzione che indici ripetuti sottintendano comunque la somma

$$\partial_h(\partial_h u_k + \partial_k u_h) = \partial_h \partial_h u_k + \partial_k \partial_h u_h,$$

nonché

$$\text{Div}[\text{tr}(E)I] = \nabla\text{Div}\mathbf{u},$$

infatti: $\text{Div}[\text{tr}(E)I]_k = \partial_i[(\partial_h u_h)\delta_{ik}] = \partial_k \partial_h u_h = [\nabla\text{Div}\mathbf{u}]_k$, da cui

$$\text{Div}T_K = \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\text{Div}\mathbf{u}.$$

Nel caso statico, ponendo cioè $\ddot{\mathbf{u}} = 0$, si hanno le equazioni di equilibrio in termini dello spostamento. Se si pone anche $\mathbf{b} = 0$, le equazioni di equilibrio diventano:

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\text{Div}\mathbf{u} = 0,$$

ovvero, in componenti

$$\mu\partial_h \partial_h u_k + (\lambda + \mu)\partial_k \partial_h u_h = 0.$$

Supponiamo che $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^4$ sia una soluzione del problema; se deriviamo la precedente equazione ancora una volta rispetto alle coordinate X^k , otteniamo

$$\mu\partial_k \partial_h \partial_h u_k + (\lambda + \mu)\partial_k \partial_k \partial_h u_h = 0$$

e poiché valgono le uguaglianze

$$\mu\partial_k \partial_h \partial_h u_k = \partial_h \partial_h \partial_k u_k = \partial_k \partial_k \partial_h u_h,$$

si ha

$$\partial_h \partial_h \partial_k u_k = 0$$

ovvero

$$\Delta \text{Div} \mathbf{u} = 0,$$

cioè il campo $\text{Div} \mathbf{u}$ è armonico.

Analogamente si prova che anche $\text{Rot} \mathbf{u}$ è armonico:

$$\Delta \text{Rot} \mathbf{u} = 0.$$

Derivando le equazioni di equilibrio due volte rispetto alle X^k e sommando sugli indici ripetuti si ha ancora:

$$\mu \partial_i \partial_i \partial_h \partial_h u_k + (\lambda + \mu) \partial_i \partial_i \partial_k \partial_h u_h = 0,$$

ma, da $\Delta \text{Div} \mathbf{u} = 0$, si ha $\partial_k \partial_i \partial_i \partial_h u_h = 0$ e dunque \mathbf{u} è bi-armonico:

$$\Delta \Delta \mathbf{u} = 0.$$

In ogni caso se $\mathbf{b} = 0$, ogni campo statico \mathbf{u} con $E = \text{costante}$ genera una possibile soluzione del problema $\text{Div} T_K = 0$, cioè $T_K = \text{costante}$.

Esaminiamo ora brevemente alcuni casi semplici di relazioni costitutive, nel caso sempre di corpi isotropi omogenei, per classi di deformazioni fondamentali, mettendo in luce il significato di alcuni coefficienti di elasticità.

1. **Scorrimento semplice:** in questo caso il campo degli spostamenti è dato da: $\mathbf{u} = \gamma X_2 \mathbf{e}_1$, da cui, ricordando che $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$, si ricava:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma X_2 + X_1, & x_2 &= X_2, & x_3 &= X_3; \\ u_1 &= \gamma X_2, & u_2 &= 0, & u_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$E = [E_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda E_{hh} \delta_{ij}$ da cui $T_{12} = T_{21} = k = \mu\gamma$; dunque lo sforzo di taglio k è proporzionale alla deformazione γ e la costante di proporzionalità è proprio la costante di Lamé μ ; resta così giustificato il nome di *modulo di shear* (scorrimento) per μ .

Gli sforzi normali sono tutti nulli, in contrasto con quanto accade nella teoria esatta.

2. Compressione uniforme: in tal caso si ha uno spostamento puramente radiale $\mathbf{u} = d(\mathbf{X} - \mathbf{O})$, da cui si ricava:

$$E = dI, \quad T_K = -pI,$$

avendo posto $p = -3kd$, ovvero $k = \frac{2}{3}\mu + \lambda$; il coefficiente k prende il nome di modulo di compressione ed è proprio il coefficiente di proporzionalità, a meno di un fattore -3, tra sforzo e deformazione; infatti si ha:

$$T_K = 2\mu E + \lambda(\text{tr}E)I = (2\mu + 3\lambda)dI = -pI,$$

da cui

$$p = -(2\mu + 3\lambda)d = -3\left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)d = -3kd.$$

Quest'ultima relazione dice che più è grande k meno è comprimibile il corpo.

3. Pura tensione: è il caso in cui il tensore degli sforzi ha una sola componente non nulla $T_{11} = \sigma$, $T_{ij} = 0$ (con i, j non contemporaneamente uguali ad 1). Risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} T_{12} = T_{21} = 2\mu E_{12} = 0 \\ T_{13} = T_{31} = 2\mu E_{13} = 0 \\ T_{23} = T_{32} = 2\mu E_{23} = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} T_{11} = 2\mu E_{11} + \lambda \text{tr}E = \sigma \\ T_{22} = 2\mu E_{22} + \lambda \text{tr}E = 0 \\ T_{33} = 2\mu E_{33} + \lambda \text{tr}E = 0 \end{cases}$$

Si ricava:

$$E_{11} = \frac{\sigma}{\mathcal{E}}, \quad E_{22} = E_{33} = -\nu E_{11}, \quad E_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

Dall'equazione costitutiva $T_K = 2\mu E + \lambda(\text{tr}E)I$, per confronto, si ricava per i moduli di elasticità \mathcal{E} e ν le espressioni seguenti, in termini delle costanti di Lamé:

$$\mathcal{E} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

e prendono rispettivamente il nome di modulo di Young (\mathcal{E}) e modulo di Poisson (ν).

Se il tensore di elasticità C gode della simmetria maggiore nella teoria lineare non c'è differenza fra materiale elastico ed iperelastico. Infatti si può sempre definire una funzione di stato $\psi(E)$, detta potenziale elastico linearizzato, tale che

$$T_K = \left(\frac{\partial \psi}{\partial E} \right)$$

1. Se il corpo è omogeneo ed isotropo, questo è immediato. Basta infatti porre:

$$\psi(E) = \mu |E|^2 + \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} E)^2$$

2. In generale, si pone

$$\psi(E) = \frac{1}{2} E \cdot (CE).$$

Poiché in generale $\frac{\partial}{\partial E}[E \cdot (CE)] = CE + C^T E = (C + C^T) E$, allora

$$\frac{\partial \psi}{\partial E} = \frac{1}{2} (C + C^T) E$$

se $C = C^T$ si ha $T_K = CE$ e viceversa. Dunque la simmetria di C è condizione necessaria e sufficiente per l'iperelasticità.

Se C è definito positivo, allora la funzione $\psi(E)$ è una forma quadratica definita positiva in E ; questa proprietà si ha sempre quando la linearizzazione si fa nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile; infatti in tal caso, data la funzione di stato $\psi(E)$ si può sviluppare in termini di E nell'intorno di $E = 0$:

$$\psi(E) = \psi(0) + \frac{\partial \psi}{\partial E}(0)E + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial E^2} + o(|E|).$$

Se la configurazione in cui è $E = 0$ è una configurazione indeformata, si ha $\frac{\partial \psi}{\partial E}(0) = T_K(I) = 0$, trascurando il termine $o(|E|)$ e la costante inessenziale $\psi(0)$, si ha per $\psi(E)$ l'espressione $\frac{1}{2} E \cdot (CE)$, essendo $C = \frac{\partial^2 \psi}{\partial E^2}(0)$, in accordo con la definizione di tensore di elasticità.

La condizione di stabilità si traduce nella proprietà delle componenti di C di essere i coefficienti di una forma quadratica definita positiva, cioè nella definita positività di C .

Le ipotesi di simmetria e positività del tensore di elasticità C consentono di dimostrare alcuni teoremi fondamentali dell'elastostatica lineare. A tale

scopo, definiamo come stato elastico corrispondente ad un campo vettoriale \mathbf{b} , assegnato su \mathcal{B} , una terna $[\mathbf{u}, E, T_K]$ definita su \mathcal{B} , che soddisfi le equazioni di bilancio dell'elastostatica lineare:

$$\begin{cases} E = \text{Sym}\nabla\mathbf{u} \\ T_K = CE \\ \text{Div}T_K + \rho_0\mathbf{b} = \mathbf{o} \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni, tenuto conto che C gode delle simmetrie minori, si ricava che E e T_K sono simmetrici. Supponiamo inoltre che il corpo sia limitato e premettiamo il seguente

Lemma 6.1 *Siano T_K un campo tensoriale simmetrico regolare definito su \mathcal{B} ed $\hat{\mathbf{u}}$ un campo vettoriale regolare arbitrario su \mathcal{B} , tale da soddisfare le relazioni:*

$$\text{Div}T_K + \rho_0\mathbf{b} = \mathbf{o}, \quad \hat{E} = \text{Sym}\nabla\hat{\mathbf{u}}$$

vale allora l'uguaglianza

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_K\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}}dV = \int_{\mathcal{B}} T_K \cdot \hat{E}dV$$

dove il primo membro dell'uguaglianza rappresenta la somma del lavoro virtuale di \mathbf{t} e di quello di \mathbf{b} , mentre il secondo membro è il lavoro virtuale dello stress. Si parla di lavoro virtuale in quanto $\hat{\mathbf{u}}$ è un generico campo vettoriale, non una soluzione del sistema precedente.

Dimostrazione (segue dalla simmetria di T_K e dal teorema della divergenza)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{B}} T_K\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}dA &= \int_{\partial\mathcal{B}} T_K\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}dA = \int_{\mathcal{B}} \text{Div}(T_K\hat{\mathbf{u}})dV = \\ &= \int_{\mathcal{B}} (\text{Div}T_K) \cdot \hat{\mathbf{u}} + T_K \cdot \nabla\hat{\mathbf{u}}dV. \end{aligned}$$

D'altro canto si ha $\text{Div}T_K = -\rho_0\mathbf{b}$, $T_K \cdot \nabla\hat{\mathbf{u}} = T_K \cdot \hat{E}$, da cui segue la tesi

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_K\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}}dV = \int_{\mathcal{B}} T_K \cdot \hat{E}dV$$

Teorema 6.1 (Teorema del lavoro e dell'energia) *Sia $[\mathbf{u}, E, T_K]$ uno stato elastico corrispondente ad un campo di forze \mathbf{b} . Vale*

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_K \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV = 2U(E)$$

dove la funzione $U(E)$ è definita

$$U(E) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} E \cdot (CE) dV = \int_{\mathcal{B}} \psi(E) dV$$

e prende il nome di energia di deformazione.

La dimostrazione segue immediatamente dal precedente lemma. Possiamo interpretare

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_K \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV$$

come il lavoro compiuto dalle forze esterne sul corpo \mathcal{B} ; il teorema implica che tale lavoro è uguale al doppio dell'energia di deformazione. Si noti che, quando C è definito positivo, $U(E) \geq 0$, cioè il lavoro non è negativo.

Abbiamo visto in precedenza che l'ipotesi di simmetria di C fa sì che, in elasticità lineare, non vi sia differenza tra materiale elastico ed iperelastico: in altri termini la simmetria di C è una condizione necessaria per l'esistenza dell'energia di deformazione (e, sotto ulteriore ipotesi sul dominio, è anche una condizione sufficiente). Il seguente teorema, a sua volta, può essere visto come condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'energia di deformazione, ovvero per l'iperelasticità del corpo elastico. Si può dimostrare che è ancora valido, anche per piccole deformazioni sovrapposte ad una configurazione comunque deformata, cioè è un criterio per l'iperelasticità di un corpo elastico. Si tratta del teorema di reciprocità di Betti.

Teorema 6.2 (Teorema di Betti) *Supponiamo che C sia simmetrico. Siano $[\mathbf{u}_1, E_1, T_1]$ e $[\mathbf{u}_2, E_2, T_2]$ due stati elastici corrispondenti rispettivamente ai campi di forze \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 sullo stesso corpo \mathcal{B} . Allora:*

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_2 dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}_2 dV = \int_{\partial\mathcal{B}} T_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{u}_1 dV$$

Dimostrazione

Per il precedente lemma è

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_2 dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}_2 dV = \int_{\mathcal{B}} T_1 E_2 dV$$

e, d'altro lato,

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{u}_1 dV = \int_{\mathcal{B}} T_2 E_1 dV.$$

Consideriamo ora le relazione sforzo-deformazione; tenuto conto che il tensore di elasticità è simmetrico si ottiene:

$$T_1 E_2 = (C E_1) \cdot E_2 = E_1 \cdot (C E_2) = E_1 T_2 = T_2 E_1$$

da cui segue la tesi. □

La tesi asserisce che, dati i due stati elastici relativi a due distinti campi di forze, il lavoro compiuto dal primo campo sullo spostamento del secondo stato è uguale al lavoro compiuto dal secondo campo sul primo spostamento.

È chiaro che questa affermazione è vera se e solo se C è simmetrico, dunque, se è valido il teorema di Betti il corpo è iperelastico e, viceversa, se il corpo è iperelastico vale il teorema di Betti.

Osservazione

Il teorema di Betti ha una portata molto generale, che si estende alle teorie di campo lineari (non solo all'elasticità); è, in pratica, una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del potenziale ogni volta che ci si trova ad avere una matrice simmetrica che lega quantità cinematiche a quantità dinamiche.

Siano ora S_1 ed S_2 due porzioni regolari complementari della frontiera di \mathcal{B} , così che $S_1 \cup S_2 = \partial\mathcal{B}$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$; il problema misto della elastostatica lineare può essere formulato come segue: dati \mathcal{B} , S_1 , S_2 , un tensore elastico C , un campo di forze \mathbf{b} , un campo di spostamenti superficiali $\hat{\mathbf{u}}$ su S_1 e di trazioni superficiali $\hat{\mathbf{t}}$ su S_2 , trovare uno stato elastico $[\mathbf{u}, E, T_K]$ corrispondente a \mathbf{b} che soddisfi le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} & \text{su } S_1 \\ T_K \mathbf{n} &= \hat{\mathbf{t}} & \text{su } S_2. \end{aligned}$$

Uno stato elastico siffatto viene chiamato soluzione del sistema misto assegnato.

Enunciamo ora un fondamentale teorema di unicità.

Teorema 6.3 *Sia il tensore di elasticità C definito positivo; siano date due soluzioni dello stesso problema misto: $[\mathbf{u}_1, E_1, T_1]$ e $[\mathbf{u}_2, E_2, T_2]$. Ne segue che*

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}, \quad E_1 = E_2, \quad T_1 = T_2,$$

dove \mathbf{w} è uno spostamento rigido infinitesimo, ossia la soluzione del problema misto assegnato è unica a meno di rotazioni rigide infinitesime.

Dimostrazione

Si ponga: $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $E = E_1 - E_2$, $T = T_1 - T_2$. Allora $[\mathbf{w}, E, T]$ è uno stato elastico corrispondente al campo di forze nullo $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ e soddisfacente alle condizioni al contorno $\mathbf{w} = \mathbf{o}$ su S_1 e $T\mathbf{n} = \mathbf{o}$ su S_2 . È dunque $T\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0$ su $\partial\mathcal{B}$ e poiché

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_K \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV = \int_{\mathcal{B}} T_K \cdot \hat{E} dV$$

si conclude che

$$\int_{\mathcal{B}} E \cdot (CE) dV = 0$$

Poiché C è definito positivo, questa relazione può essere valida se e solo se $E = 0$; questo implica che $T = 0$ e che \mathbf{w} è uno spostamento rigido infinitesimo, in quanto deve essere $\nabla \mathbf{w} = -\nabla \mathbf{w}^T$. Infine si conclude che la soluzione del problema misto assegnato è unica, a meno di rotazioni rigide infinitesime; abbiamo infatti ottenuto:

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \\ T_1 = T_2 \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w} \end{cases}$$

□

Nel caso che $S_1 = \partial\mathcal{B}$ ($S_2 = \emptyset$) le condizioni al contorno diventano

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ su } \partial\mathcal{B}$$

ed il problema misto diventa un problema di spostamento; d'altra parte, se $S_2 = \partial\mathcal{B}$ ($S_1 = \emptyset$) le condizioni diventano

$$T_K \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{su} \quad \partial\mathcal{B}$$

e si parla di problema di sola trazione.

La soluzione del problema misto, se esiste, può anche essere caratterizzata come lo stato elastico che rende minimo il valore di un opportuno funzionale, cioè possiamo caratterizzare il problema misto come un problema di minimo. A tale scopo premettiamo la seguente definizione:

Definizione 6.1 *Prende il nome di stato cinematicamente ammissibile l'insieme $s = [\mathbf{u}, E, T_K]$ dove \mathbf{u} , E e T_K sono campi regolari su \mathcal{B} che soddisfano le equazioni:*

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\ T_K = T_K(E) = CE \end{cases}$$

e la condizione al contorno $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ su S_1 .

Sia $\Phi : s \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale definito sull'insieme degli stati cinematicamente ammissibili, ovvero:

$$\Phi(s) = U(E) - \int_{\partial\mathcal{B}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV.$$

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema:

Teorema 6.4 (Principio di minimo dell'energia potenziale).

Sia C simmetrico e definito positivo, sia $s = [\mathbf{u}, E, T_K]$ una soluzione del problema misto. Allora

$$\Phi(s) \leq \Phi(\tilde{s})$$

per ogni stato cinematicamente ammissibile $\tilde{s} = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{E}, \tilde{T}_K]$ e l'uguaglianza sussiste se e solo se $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, con \mathbf{w} spostamento rigido infinitesimo.

Dimostrazione

Si ponga $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, $\bar{E} = \tilde{E} - E$; poiché s è una soluzione e \tilde{s} è uno stato cinematicamente ammissibile deve essere:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ su } S_1.$$

Da $T_K = CE$, per la simmetria di C , si ricava

$$\begin{aligned} \tilde{E} \cdot C\tilde{E} &= E \cdot CE + \bar{E} \cdot C\bar{E} + E \cdot C\bar{E} + \bar{E} \cdot CE = \\ &= E \cdot CE + \bar{E} \cdot C\bar{E} + 2T_K \cdot \bar{E} \end{aligned}$$

da cui, ricordando che $U(E) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} E \cdot CE dV$, si trova

$$U(\tilde{E}) - U(E) = U(\bar{E}) + \int_{\mathcal{B}} T_K \cdot \bar{E} dV.$$

Poiché s è una soluzione, concludiamo da

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} \text{ su } S_1, \quad T_K \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \text{ su } S_2$$

e da

$$\int_{\partial \mathcal{B}} T_K \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV = \int_{\mathcal{B}} T_K \cdot \bar{E} dV,$$

che:

$$\int_{\mathcal{B}} T_K \cdot \bar{E} dV = \int_{\partial \mathcal{B}} T_K \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV = \int_{S_2} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV$$

In base alla definizione di $\Phi(s) = U(E) - \int_{\partial \mathcal{B}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV$ ed alle ultime due relazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{s}) - \Phi(s) &= U(\tilde{E}) - U(E) - \int_{S_2} \hat{\mathbf{t}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dA - \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dV + \int_{S_2} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA - \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV = \\ &= U(\bar{E}) + \int_{S_2} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV - \int_{S_2} \hat{\mathbf{t}} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA - \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dV = U(\bar{E}) \end{aligned}$$

In questo modo, poiché C è definito positivo, si ha

$$\Phi(s) \leq \Phi(\tilde{s})$$

e $\Phi(s) = \Phi(\tilde{s})$ solo quando $\bar{E} = 0$, cioè solo quando $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ è uno spostamento rigido infinitesimo.

□

In altri termini, il principio di minimo dell'energia potenziale asserisce che la differenza fra l'energia di deformazione e il lavoro fatto dal campo di forze esterne e dalla trazione superficiale assegnata assume, in corrispondenza alla soluzione del problema misto, un valore più basso che in qualunque altro stato cinematicamente ammissibile.

Su questo principio di minimo è basato un metodo per calcolare soluzioni approssimate di problemi a valori al contorno. Ci limiteremo ad introdurre questo metodo nel caso di problemi di sola trazione. Si suppone di considerare una soluzione approssimata del problema scritta nella forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{g}_n(\mathbf{X}), \quad N \in \mathbb{Z}^+$$

dove $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N$ sono dei campi vettoriali assegnati su \mathcal{B} ed $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ delle costanti reali, a priori incognite, che cercheremo di determinare in modo da rendere minimo il funzionale Φ , che diventa così funzione delle α_n e può essere scritto nella forma:

$$\Phi = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} K_{nm} \alpha_n \alpha_m - \sum_n \phi_n \alpha_n,$$

espressione che si ottiene sostituendo $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{g}_n(\mathbf{X})$ al secondo mem-

bro di $\Phi(s) = U(E) - \int_{\partial\mathcal{B}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV$, dove abbiamo posto

$$K_{mn} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{G}_m \cdot (C \mathbf{G}_n) dV$$

$$\mathbf{G}_n = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{g}_n + \nabla \mathbf{g}_n^T)$$

$$\phi_n = \int_{\partial\mathcal{B}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{g}_n dA + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{g}_n dV$$

Sia K la matrice di elementi K_{mn} . Se C è simmetrico e definito positivo, K è simmetrica e semidefinita positiva; allora $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ avrà un minimo in corrispondenza del vettore $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ se e solo se il vettore è soluzione dell'equazione:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} = \sum_m K_{mn} \alpha_m - \phi_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \alpha = \phi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = K^{-1} \phi,$$

dove α e ϕ sono i vettori di componenti α_n e ϕ_n , rispettivamente.

Il problema è stato ora ridotto alla risoluzione di una equazione matriciale; la corrispondente soluzione rappresenta il campo di spostamenti dato dalla soluzione approssimata

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{g}_n(\mathbf{X})$$

che è la migliore approssimazione della soluzione esatta.

La matrice K , che caratterizza la risposta del sistema, è generalmente chiamata “matrice di risposta del sistema” o “matrice di stiffness”. La parte cruciale del metodo consiste nella scelta delle funzioni $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ (una famiglia specifica di queste genera quello che è noto come il metodo degli elementi finiti); in particolare, è importante il caso in cui si passi ad una rappresentazione di tipo serie, quando cioè N tenda all’infinito; in tal caso il problema di convergenza della serie presenta difficoltà non trascurabili. Tale argomento è però al di fuori degli scopi di questo corso e pertanto scegliamo di terminare qui.

Capitolo 7

Stabilità

Definizione di stabilità

Non esiste una definizione univoca di stabilità. Differenti problemi e differenti aree di ricerca hanno condotto a differenti significati ed a modi stessi diversi di affrontare l'argomento. Anche dal punto di vista storico si può notare come ci siano stati fin dall'origine due punti di vista diversi.

Aristotele studiò la stabilità del moto analizzando il moto perturbato relativamente allo stato imperturbato, di cui si vuole determinare la stabilità. Questo modo di procedere dà luogo al cosiddetto metodo cinetico, usato in astronomia con continuità nei secoli, mentre in altre discipline meccaniche fu tralasciato fin dai tempi di Galileo, per poi conoscere in tempi recenti una ripresa di interesse nello studio del comportamento dei sistemi e strutture meccaniche.

In Archimede trova la sua origine un altro metodo, il metodo geometrico, che consiste nel prendere in considerazione proprietà puramente geometriche del sistema, dopo aver perturbato lo stato di cui si discute la stabilità. È il metodo che conduce al principio di Torricelli, ad esempio, o, più in generale, alla classificazione di stabilità dell'equilibrio tipica della fisica (equilibrio stabile, instabile, indifferente a seconda del segno del lavoro compiuto nel passaggio dallo stato imperturbato a uno perturbato) e che fu alla base del metodo di Lagrange nello studio della stabilità orbitale nel moto dei pianeti in meccanica celeste; tale metodo dominò in meccanica dal XVII al XIX secolo.

Il caso della meccanica celeste meglio chiarisce la differenza tra i due approcci. Secondo Lagrange, un'orbita di un pianeta, o di un satellite, è stabile se, avendo perturbato di poco i parametri dell'orbita stessa, ad esempio il semiasse maggiore, questi restano limitati, cioè l'orbita nuova differisce di poco da quella di partenza. Si tratta di un metodo chiaramente geometrico.

Invece, secondo il metodo cinetico, usato in questo caso da Poisson, l'orbita è stabile se, avendo introdotto una perturbazione, il corpo celeste si muove di un moto che è arbitrariamente vicino a quello imperturbato, nel senso che anche la legge di percorrenza differisce di poco. In questo caso, la stabilità cinetica implica quella geometrica.

Un terzo metodo, di origine più recente, è detto metodo dell'energia e si basa sul fatto che in molti casi la stabilità è correlata a proprietà di minimo (o di massimo) di funzioni o funzionali aventi il significato di "energia" del sistema. Questo metodo è stato molto usato in elasticità ed è parso anche che, a partire da esso, si potesse pervenire ad una teoria unificata valida per ogni problema meccanico. L'esito non è stato del tutto positivo, da un lato perchè è più agevole usare metodi diversi per problemi diversi, e in tal senso si sono sviluppate teorie indipendenti, cosicchè per problemi dinamici il metodo cinetico è predominante, mentre in statica si usa piuttosto il metodo geometrico e quello dell'energia; d'altro canto, i tentativi di generalizzazione non sono del tutto riusciti per la difficoltà di includere in una unica definizione la stabilità: i risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov, pur universalmente accettati e riconosciuti nella loro validità, non includono tutti gli aspetti, non sono talora facilmente applicabili e spesso sono troppo ristretti, in quanto valgono per una classe di perturbazioni, quella delle condizioni iniziali, mentre si possono avere problemi di stabilità relativi ad altri tipi di perturbazioni.

Per ora ci limiteremo a cercare di formulare il problema nella maggior generalità possibile. Occorre anzitutto ricordare che la stabilità è una proprietà relativa, cioè bisogna fissare il riferimento in cui si studia il problema. Si considera, in tale riferimento, un sistema fisico e le equazioni che ne definiscono il modello. Si specifica una soluzione del problema di cui si vuole indagare la stabilità: tale soluzione prende il nome di *stato imperturbato*. Si perturba questo stato, secondo modalità che vanno ben definite, e si ottiene così uno *stato perturbato*. Si introducono certe grandezze caratteristiche, la cui misura si ottiene introducendo una opportuna norma, che definiscono gli stati ad ogni istante. Le variazioni di tali norme, al passare dallo stato perturbato a quello imperturbato, forniscono informazioni sulla stabilità della soluzione.

Definizione 7.1 Diremo che uno stato è stabile se, definita una misura della norma delle perturbazioni, per valori della stessa che non eccedano valori assegnati, le variazioni nei moti corrispondenti abbiano norme limitate arbitrariamente.

Tale definizione è generale, ma anche generica e vaga: l'analisi infatti dipende dalla scelta dello stato imperturbato, dalla misura e dalla norma scelta, dal tipo di perturbazione. Si osservi che secondo questo punto di vista si ha solo stabilità o instabilità; l'equilibrio indifferente, che si può avere nella descrizione geometrica in problemi di statica, rientra nell'instabilità.

I tipi di perturbazione più importanti sono: la perturbazione delle condizioni iniziali, la perturbazione dei parametri strutturali, le perturbazioni continue.

Restringiamo ora per semplicità l'attenzione a problemi fisici che possano essere descritti da modelli deterministici del tipo “problema di Cauchy”, cioè da sistemi di equazioni differenziali ordinarie, che supponiamo, senza perdita di generalità, della forma:

$$x' = F(x, a, t)$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0$$

dove x è un vettore di \mathbb{R}^n le cui componenti $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sono le coordinate (locali) generalizzate che descrivono la configurazione del sistema all'istante t , che supponiamo essere di opportuna classe di differenziabilità in un intervallo $T = (T_1, T_2) \subseteq] -\infty, +\infty[$, a è il vettore di \mathbb{R}^m le cui componenti a_k ($k = 1, \dots, m$) sono costanti reali aventi il significato di parametri strutturali del sistema (si pensi alla massa, al tensore di inerzia per un corpo rigido, a costanti di elasticità in corpi deformabili, ecc); F è il vettore di \mathbb{R}^n le cui componenti F_i sono funzioni continue nei loro argomenti e rappresentano le forze generalizzate e vengono supposte note.

La **perturbazione delle condizioni iniziali**, insieme con il metodo cinetico, conduce alla definizione di stabilità alla Lyapunov.

Lo stato imperturbato sia rappresentato da una soluzione nota del problema

$$x' = F(x, a, t)$$

$$x(0) = x_0$$

che indichiamo con $x = x(t)$, mentre lo stato perturbato sia rappresentato da $x^* = x^*(t)$, soluzione del problema di Cauchy dato quando al posto delle condizioni iniziali $x(0) = x_0$ si assegnino delle condizioni iniziali “perturbate” $x(0) = x_0^*$; la perturbazione iniziale è data da $u_0 = x_0 - x_0^*$ e la perturbazione durante il moto è data dalle funzioni, ancora di classe \mathcal{C}^n :

$$u(t) = x(t) - x^*(t)$$

Definizione 7.2 Diciamo che la soluzione $x(t)$ è stabile, secondo Lyapunov, se detta $d[x(t), x^*(t)]$ la distanza all'istante t tra x e x^* , in \mathbb{R}^n , in una metrica ivi adottata, vale che:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) > 0 / d[x_0, x_0^*] \leq \eta \Rightarrow d[x, x^*] < \epsilon \quad \forall t \in T$$

In questo caso d è la norma in \mathbb{R}^n ; se si usa la metrica euclidea sarà

$$d[x, x^*] = |x - x^*|.$$

La **perturbazione dei parametri** si ottiene quando si variano i valori delle costanti a_k . Poiché la soluzione del problema di Cauchy dipende, oltre che dai valori iniziali, anche dai parametri, al loro variare si avrà una famiglia (o più famiglie) di soluzioni e può accadere che si abbiano comportamenti qualitativi molto diversi delle soluzioni stesse, ad esempio che per certi valori dei parametri si abbiano dei punti critici, ove cessi di valere il teorema di unicità e le soluzioni si biforchino in due o più rami.

La teoria delle biforcazioni si è sviluppata, con Poincaré, per studiare tali fenomeni nel caso della meccanica celeste e più recentemente la teoria delle catastrofi ha fornito una descrizione geometrica di questo tipo di problemi. Le prime applicazioni di questo metodo si sono avute, oltre che in meccanica celeste, nello studio della stabilità strutturale di strutture elastiche, anche se l'analisi della stabilità strutturale risale a Eulero ed al celebre problema dell'elastica, che è anche all'origine (in parte) della teoria delle funzioni speciali.

Accade spesso di dover studiare problemi in cui si perturbano sia le condizioni iniziali che i parametri. Prima di passare ad una trattazione più dettagliata, osserviamo ancora che si parla di **perturbazione continua** quando si perturbano, cioè si modificano, le funzioni F ; in questo caso si può far rientrare anche la perturbazione dei parametri, ma conviene trattare separatamente i due aspetti. La perturbazione continua interviene nella teoria dei giroscopi e nel caso in cui la perturbazione sia una funzione statistica: si tratta però di modelli stocastici e si parla allora di stabilità statistica.

Si usano ancora le espressioni: stabilità locale, stabilità globale (con chiaro riferimento al fatto che si studi la stabilità nell'intorno del punto o in tutto lo spazio e per ogni valore delle perturbazioni), limitata nel tempo (quando ci si limita ad intervalli temporali finiti, come nel caso dei satelliti artificiali, in cui interessa garantire la stabilità orbitale finché le apparecchiature di bordo

funzionino e non oltre), asintotica, quando lo stato perturbato tenda a quello imperturbato al crescere del tempo; nel caso di definizione alla Lyapunov, si sostituisce la condizione $d[x, x^*] < \epsilon, \forall t \in T$ con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d[x, x^*] = 0$$

Evidentemente, la stabilità asintotica implica la stabilità locale.

Torniamo ora al sistema

$$\begin{cases} x' = F(x, a, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e sia

$$u(t) = x(t) - x^*(t)$$

la perturbazione, cioè la differenza tra lo stato imperturbato $x(t)$ corrispondenti alle condizioni iniziali sopra e quello perturbato $x^*(t)$ corrispondente a nuove condizioni iniziali; la funzione $u(t)$ è soluzione dell'equazione

$$u'(t) = F(x, a, t) - F(x^*, a, t) = \Phi(u, a, t).$$

Quest'ultima equazione prende il nome di equazione variazionale del problema e la funzione $u(t) = 0$ è soluzione di tale equazione: infatti, $u = 0$ equivale a $x = x^*$ e in tal caso l'equazione variazionale si riduce alla $u'(t) = 0$, che ammette soluzioni costanti e, in particolare, la soluzione identicamente nulla, che diremo soluzione banale.

Si è così trasformato il problema dinamico in un problema statico: invece di studiare, infatti, la stabilità della soluzione $x(t)$ dell'equazione $x' = F$, si studia, equivalentemente, la stabilità della soluzione $u = 0$ dell'equazione $u' = \Phi$, che è una soluzione statica. La condizione di stabilità:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) > 0 / d[x_0, x_0^*] \leq \eta \Rightarrow d[x, x^*] < \epsilon, \forall t \in T$$

viene sostituita dalla:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) > 0 / |u_0| \leq \eta \Rightarrow |u(t)| < \epsilon \forall t \in T$$

Ovviamente il problema è risolto se si riesce ad integrare il sistema $u' = \Phi$, assegnate le relative condizioni iniziali, ma in generale non è agevole integrare tale sistema.

L'esistenza di integrali primi di moto è importante, in quanto un integrale primo $\Phi(u, t) = \text{costante} = \Phi(u_0, 0)$ definisce, nello spazio delle fasi, una famiglia

di curve, dette curve di fase, che può fornire informazione sulla stabilità del sistema. In questo caso, lo spazio delle fasi è la varietà avente le u^i come coordinate locali; se le u^i sono coordinate globali, tale varietà non è altro che \mathbb{R}^n . L'analisi nello spazio delle fasi è connesso con il metodo dell'energia, poichè spesso gli integrali primi utilizzati sono integrali dell'energia.

Esempio 7.1

Un punto si muova in uno spazio unidimensionale \mathbb{R} secondo la legge

$$\ddot{x} = F(x)$$

e sia $x = x^*$ una soluzione statica del problema, cioè una radice dell'equazione algebrica $F(x) = 0$. Vogliamo studiare la stabilità di questa soluzione. Poniamo allora

$$u = x - x^* \quad \text{e} \quad v = \dot{x};$$

si ottiene così il sistema equivalente:

$$\dot{u} = v; \quad \dot{v} = F(u)$$

che ammette come soluzione statica $u = v = 0$.

Da questo nuovo sistema si ricava subito

$$\frac{dv}{du} = \frac{F(u)}{v} \quad \text{ovvero} \quad v \, dv = F(u) \, du$$

integrando si ha

$$\frac{1}{2}v^2 - \int F(u)du = \text{costante} = c,$$

da cui, avendo posto $U(u) = \int F(u)du$,

$$\frac{1}{2}v^2 - U(u) = c$$

Nel piano delle fasi (u, x) le curve di fase di questa equazione potranno fornire informazioni utili ai nostri scopi. Se, ad esempio, si trattasse di curve chiuse tutte contenenti il punto $u = 0, v = 0$, potremmo subito concludere che tale punto è stabile: infatti, tenuto conto che le curve di fase non possono intersecarsi se non eventualmente nei punti critici (sui quali ritorneremo), assegnato un valore arbitrario alla costante c (il che corrisponde ad assegnare condizioni

iniziali arbitrarie), ogni moto corrisponde a valori c' tali che $c' < c$ sarà rappresentato da curve di fase contenute nella regione individuata dalla curva di costante c , cioè posizione e velocità resteranno limitate per ogni istante e l'origine sarà stabile in accordo alla definizione generale di stabilità. Inoltre, per lo stesso motivo, ogni moto così definito è stabile (geometricamente): variando di poco le condizioni iniziali si ottiene una nuova orbita limitata, dunque l'orbita imperturbata è stabile.

Sia in particolare $F(x) = -kx$, con k costante positiva (oscillatore armonico). Le curve di fase sono ellissi di centro l'origine di equazione

$$\frac{1}{2}(v^2 + ku^2) = c$$

L'origine è posizione di equilibrio stabile e ogni moto è stabile.

Sia invece $F(x) = -kx + D(x, \dot{x})$, essendo D una funzione non lineare tale che $D(x, 0) = 0$ e $D(x, \dot{x})\dot{x} < 0$ per ogni moto; è questo il caso di un oscillatore armonico smorzato e la funzione D rappresenta la dispersione ovvero la resistenza del mezzo.

Posto $u = x$ e $v = \dot{x}$ si ha il sistema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -ku + D(u, v) \end{cases}$$

Tale sistema non è lineare, quindi meno agevole da studiare del precedente. La sua linearizzazione però coincide con il sistema precedente ed ammette l'integrale primo $\frac{1}{2}v^2 - U(u) = c$, che scriviamo formalmente $V(u, v) = c$. Consideriamo la generica ellisse, curva di fase del sistema linearizzato corrispondente ad un valore di c , e calcoliamo l'angolo che tale ellisse forma in un suo punto con la soluzione del sistema non lineare che passa per quel punto. Tale angolo è noto quando sia noto il prodotto scalare tra un vettore normale all'ellisse e la tangente alla curva soluzione del moto considerato, cioè tra $\text{grad}V$ e $\mathbf{t}(P)$. Si ha così:

$$\begin{aligned} \text{grad}V \cdot \mathbf{t} &= \frac{\partial V}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{dv}{dt} = ku \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} = kuv + v \frac{dv}{dt} = \\ &= v \left(ku + \frac{dv}{dt} \right) = vD(u, v) < 0. \end{aligned}$$

D'altro canto è $\text{grad}V \cdot \mathbf{t} = \frac{dv}{dt}$ lungo la soluzione, dunque l'angolo tra la normale esterna all'ellisse e la traiettoria soluzione è ottuso, il sistema si muove lungo la sua orbita in modo da intersecare le ellissi per valori decrescenti del parametro "costante c ". L'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile, i moti sono stabili e tendono asintoticamente all'equilibrio.

Si noti che la configurazione di equilibrio è stabile quando $D = 0$ e continua ad esserlo anche quando al sistema lineare si aggiunge la parte non lineare $D(u, v)$. In questo senso il comportamento del sistema nell'intorno dell'origine è determinato dalla sua parte lineare.

Punti critici di sistemi lineari e stabilità

Sia dato il sistema differenziale lineare:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + By \\ \dot{y} = Cx + Dy \end{cases}$$

con A, B, C, D costanti reali; le soluzioni costanti di questo sistema, cioè $x = x^* = \text{costante}$ e $y = y^* = \text{costante}$, prendono nome di punti critici o punti singolari e, dal punto di vista fisico, non sono altro che le soluzioni statiche ovvero i punti di equilibrio del sistema stesso. Nel caso dato, vi è una soluzione statica individuata dal punto critico $x = 0, y = 0$.

Un modo quasi equivalente di affrontare il problema consiste nel passare all'equazione differenziale che si ottiene eliminando la dipendenza dal tempo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx + Dy}{Ax + By}.$$

In tal modo si è trasferita l'analisi nel piano (x, y) , cioè nel piano delle fasi e le soluzioni della nuova equazione sono le *caratteristiche* del sistema di partenza in questo piano. L'equivalenza delle due formulazioni è chiara, in quanto ad ogni soluzione $x = x(t), y = y(t)$ del primo sistema corrisponde una soluzione $y = y(x)$ del secondo, quando si elimini il tempo t , ma non è completa in quanto il sistema originale ammette soluzione anche quando $Ax + By = 0$, caso in cui il secondo sistema non ha senso.

Il punto critico $(0, 0)$ è chiaramente una singolarità di $\frac{dy}{dx} = \frac{Cx + Dy}{Ax + By}$, ed a ciò si deve il suo nome; in tal punto il secondo membro dell'equazione non è più lipschitziano e per esso possono passare più curve caratteristiche del sistema dato, mentre per ogni altro punto del piano delle fasi (o meglio

del dominio piano in esso contenuto ove esistano soluzioni del sistema che ci interessa studiare) passa una e una sola caratteristica.

Il punto $(0, 0)$ è l'unico punto singolare se $AD - BC \neq 0$; se fosse $AD = BC$, si avrebbe un luogo di punti critici, la retta $y = -\frac{A}{B}x$ e le caratteristiche sarebbero le rette soluzioni dell'equazione $\frac{dy}{dx} = k = \text{costante}$, cioè $y = kx + c$. Vedremo in un esempio successivo il significato che può assumere un caso del genere.

Dall'analisi sappiamo che la classificazione dei punti critici per sistemi del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + By \\ \dot{y} = Cx + Dy \end{cases}$$

ed il comportamento delle soluzioni sono determinati dai coefficienti A, B, C, D . Più precisamente, detto Δ il numero definito da $\Delta = (A - D)^2 + 4BC$, l'origine $(0, 0)$ prende il nome di:

- nodo se $\Delta > 0$ e $AD - BC > 0$
- sella o colle se $\Delta > 0$ e $AD - BC < 0$
- fuoco se $\Delta < 0$ e $A + D \neq 0$
- centro se $\Delta < 0$ e $A + D = 0$
- nodo se $\Delta = 0$
- nodo a stella se $\Delta = 0$ e $A = D, B = C = 0$

in quest'ultimo caso il sistema si riduce a $\frac{dx}{dt} = hx, \frac{dy}{dt} = hy$ e l'equazione associata è $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, per cui le curve caratteristiche nel piano delle fasi sono le rette $y = cx$, cioè una stella di rette passanti per l'origine.

Questa classificazione può essere estesa anche a sistemi non lineari, ma con alcune cautele; sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

e supponiamo che tale sistema ammetta almeno una soluzione statica (punto critico), che non è restrittivo supporre sia l'origine: sarà dunque

$$P(0, 0) = Q(0, 0) = 0.$$

L'equazione differenziale associata è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Anche in questo caso vi è quasi equivalenza tra le due formulazioni, in quanto il sistema di partenza ammette soluzioni anche quando sia $P(x, y) = 0$, mentre non è così per l'equazione differenziale scritta sopra; i punti critici del sistema però sono ancora punti singolari dell'equazione.

Vale il seguente Teorema, per la cui dimostrazione si rinvia, come per la classificazione dei punti critici nel caso lineare, ai trattati sulle equazioni differenziali.

Teorema 7.1 *Supponiamo che*

1. *P e Q siano lipschitziane nell'intorno di $O(0, 0)$, O ovviamente escluso, sia rispetto ad x che ad y ;*
2. *il sistema non lineare ammetta la rappresentazione*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + By + F(x, y) \\ \dot{y} = Cx + Dy + G(x, y) \end{cases}$$

avendo posto:

$$A = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=y=0}, \quad B = \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x=y=0}, \quad C = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=y=0}, \quad D = \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{x=y=0},$$

e le funzioni F e G soddisfino le condizioni:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(x, y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{G(x, y)}{r} = 0, \quad \text{con } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ovvero con notazione compatta: $F = o(r)$, $G = o(r)$;

3. *sia $AD - BC \neq 0$.*

Allora il sistema si comporta nell'intorno dell'origine (punto critico) come la sua parte lineare, tranne che nei seguenti casi:

- i) se $\Delta < 0$ e $A + D = 0$, il sistema lineare ha un centro, mentre il sistema non lineare può avere anche un fuoco oppure una singolarità più complessa (è il caso del oscillatore armonico già visto);*

ii) se $\Delta = 0$ il sistema lineare ha un nodo ed il sistema non lineare ha ancora un nodo se e solo se F e G sono $o(r^{1+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$, altrimenti presenta una singolarità più complessa (punto singolare non semplice).

I sistemi non lineari possono dar luogo ad una situazione particolarmente interessante: tra le curve caratteristiche possono esistere curve chiuse e contenenti un punto singolare che non fanno parte di una famiglia di infinite caratteristiche, cioè delle soluzioni singolari isolate periodiche: tali curve prendono il nome di cicli limite.

L'analisi di stabilità del punto critico di un sistema lineare può essere condotta per un sistema di n equazioni

$$\dot{x} = Ax \Leftrightarrow \dot{x}_i = A_h^i x_h, \quad i, h = 1, 2, \dots, n$$

essendo A_h^i dei coefficienti reali.

L'integrale generale di questo sistema si ottiene come combinazione lineare di un numero opportuno di soluzioni particolari del tipo

$$x_c(t) = P_c(t)e^{\lambda_c t} \quad 1 \leq c \leq n,$$

dove λ_c è un autovalore della matrice A , $P_c(t)$ un polinomio in t di grado inferiore all'ordine di molteplicità di λ_c come radice dell'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$; se l'equazione caratteristica ammette radici tutte distinte, i polinomi $P_c(t)$ si riducono a costanti, che si possono inglobare nelle costanti arbitrarie di integrazione, cioè nei coefficienti della combinazione lineare che fornisce l'integrale generale:

$$x(t) = \sum_c a_c x_c(t).$$

La soluzione statica del sistema in n dimensioni $x = 0$ è stabile se, comunque si varino le condizioni iniziali nell'intorno di tale punto, le soluzioni $x_c(t)$ restano limitate per ogni $t > t_0$. Si possono presentare allora i seguenti casi.

1. La parte reale di ogni autovalore λ_c è negativa: tutte le soluzioni $x_c(t)$ sono limitate, non solo, ma tendono a zero per t che tende all'infinito, cioè la soluzione statica è *asintoticamente stabile*.
2. Se un solo autovalore λ_c ha parte reale positiva, si ha *stabilità*, poichè l'integrale generale non è limitato.
3. Se un autovalore λ_c ha parte reale nulla, mentre tutti gli altri hanno parte reale negativa, la stabilità dipende dalla sua molteplicità:

- i) se la molteplicità di λ_c è uguale a uno, cioè λ_c è una radice semplice dell'equazione caratteristica, il polinomio corrispondente in $x_c(t) = P_c(t)e^{\lambda_c t}$ si riduce ad una costante, la soluzione x_c corrispondente è limitata, si ha ancora *asintotica stabilità*; se tutti gli autovalori sono di questo tipo, si ha *semplice stabilità*, in quanto la soluzione generale è in tal caso combinazione lineare di soluzioni limitate periodiche;
- ii) se la molteplicità p_c di λ_c è maggiore di uno occorre calcolare la differenza d_c tra l'ordine della matrice A e la caratteristica della matrice $(A - \lambda_c I)$: se $d_c < p_c$ si ha *instabilità*, se $d_c = p_c$ si ha *stabilità* (non può essere $d_c > p_c$); non si può avere stabilità asintotica: in tal caso, infatti, si hanno esponenziali immaginari, quindi limitati, ma, se vi sono degli autovalori non semplici, compaiono nella soluzione corrispondente x_c dei polinomi $P_c(t)$ che rendono la soluzione non limitata (instabile), a meno che si riducano a delle costanti, il che accade se gli autovalori λ_c sono semplici o se $d_c = p_c$.

4. Analogamente si procede quando vi siano più radici a parte reale nulla e le rimanenti a parte reale negativa.

Il comportamento del sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + By \\ \dot{y} = Cx + Dy \end{cases}$$

può essere completamente studiato, utilizzando la classificazione dei punti critici prima vista. La matrice A è ora la matrice 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

e l'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + AD - BC = 0,$$

le cui radici λ_1, λ_2 possono avere molteplicità due solo se sono reali. Si ha in definitiva il quadro seguente.

- a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ (cioè $\Delta > 0$)

$$\lambda_1 \lambda_2 > 0 \quad \begin{cases} A + D > 0 & \text{Nodo instabile} \\ A + D < 0 & \text{Nodo stabile} \end{cases}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 < 0 \quad \text{Colle instabile}$$

b) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2$ (cioè $\Delta = 0$)

$$\lambda_{1,2} = \frac{A+D}{2} \quad \begin{cases} A+D > 0 & \text{Nodo instabile} \\ A+D < 0 & \text{Nodo stabile} \end{cases}$$

c) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ (cioè $\Delta < 0$)

$$\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) = 0 \quad A+D = 0 \quad \text{Centro stabile}$$

$$\Re(\lambda_{1,2}) \neq 0 \quad \begin{cases} A+D > 0 & \text{Fuoco instabile} \\ A+D < 0 & \text{Fuoco stabile} \end{cases}$$

Se il sistema non è lineare, si possono adattare i risultati del teorema visto prima sui punti critici dei sistemi non lineari di due equazioni. Nel caso dei cicli limite, vale il seguente teorema:

Teorema 7.2 (Teorema di Poincaré-Bendixson) *Se esiste una regione limitata \mathcal{D} nel piano (x, y) tale che ogni soluzione del sistema dinamico*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

che inizi in \mathcal{D} sia tutta contenuta in \mathcal{D} , allora in \mathcal{D} si ha un punto critico o un ciclo limite.

Ha senso determinare anche il verso di percorrenza delle orbite da parte del sistema nel piano di fase e da questo dedurre la stabilità dei punti critici. Basta a tale scopo individuare zone del piano ove il segno di $\frac{dx}{dt}$ e di $\frac{dy}{dt}$ sia definito: è chiaro che segni positivi o negativi indicano funzioni x e y crescenti o decrescenti e dall'analisi quadrante per quadrante si può dedurre il verso di percorrenza lungo ogni orbita. Ad esempio, nel caso di un nodo, se tutte le traiettorie passanti per il nodo sono percorse verso il nodo stesso, questo è stabile, altrimenti è instabile; analogamente per gli altri casi. Se si ha un ciclo limite, questo è stabile se le orbite convergono ad esso da entrambe le regioni del piano di cui il ciclo è la frontiera; se divergono è instabile; se convergono da una regione e divergono dall'altra allora si dice semistabile.

Capitolo 8

Modelli biologici

Il modello preda-predatore

Il sistema

$$\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases}$$

si presta alla descrizione del comportamento di due popolazioni che convivano in uno stesso ambiente e che interagiscano l'una con l'altra sia con un rapporto di cooperazione o di competizione o infine di preda-predatore (cioè una specie si ciba dell'altra). Il modello deterministico suppone di poter operare con funzioni continue, ovvero di considerare le varie popolazioni assegnate da funzioni del tempo: $x = x(t)$, $y = y(t)$, derivabili (quindi continue) in intervalli opportuni di tempo.

Il modello più semplice si basa su di un modello di crescita demografica di una specie isolata, che possiamo chiamare malthusiano. In tal caso la crescita della specie x , in presenza della specie y , all'istante t , sarà dato da:

$$x'(t) = Ax(t) + By(t)$$

con A , B costanti reali, in quanto si suppone, in prima approssimazione, che la seconda popolazione influisca sulla crescita, o sulla diminuzione, della prima popolazione in modo proporzionale al numero dei suoi individui e si aggiunge così, al secondo membro, al termine di crescita naturale $Ax(t)$ il termine di influenza della seconda specie sulla prima $By(t)$.

Analogamente, la seconda specie y varierà con una legge del tipo:

$$y'(t) = Cx(t) + Dy(t)$$

con C, D costanti reali.

Il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + By(t) \\ y'(t) = Cx(t) + Dy(t) \end{cases}$$

può essere risolto riconducendolo all'equazione omogenea del secondo ordine corrispondente, per la funzione $x(t)$:

$$x'' - (A + D)x' + (AD - BC)x = 0$$

e, per la funzione $y(t)$:

$$y'' - (A + D)y' + (AD - BC)y = 0.$$

Si tratta della stessa equazione ed il suo discriminante è

$$\Delta = (A + D)^2 - 4(AD - BC) = (A - D)^2 + 4BC.$$

Le soluzioni dipendono dal segno di Δ . I coefficienti A, D hanno il significato di coefficienti di crescita demografica della specie corrispondente, mentre B, C sono coefficienti di interazione. Se, ad esempio, è $A > 0, B < 0, C > 0, D < 0$, si ha un modello di preda-predatore, in cui x è la specie preda e y è il predatore; si suppone che la preda trovi alimento in quantità sempre sufficiente, cioè che le risorse siano illimitate, come anche lo spazio a disposizione. In tal caso, infatti, la specie x ha un tasso di crescita naturale positivo, ma la presenza della specie y , predatrice, tende a farla diminuire; d'altro canto, la specie y , se isolata, diminuisce, non trovando cibo, quindi il suo tasso di crescita naturale è negativo, ma cresce per la presenza della specie x .

Un esempio di questa situazione è dato dal sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

dove i coefficienti sono stati assegnati per comodità di calcolo, senza nessuna attinenza con ecosistemi reali. La soluzione è data da

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ y(t) = \frac{c_1 - c_2}{2} \cos(2t) + \frac{c_1 + c_2}{2} \sin(2t). \end{cases}$$

Si supponga di avere inizialmente un numero di prede x_0 , doppio del numero di predatori y_0 : $x_0 = 2y_0$. Imponendo queste condizioni iniziali alla soluzione

trovata si ricava $c_1 = x_0$ e $c_2 = 0$ e infine la soluzione di questo problema di Cauchy è:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(2t) \\ y(t) = y_0(\cos(2t) + \sin(2t)). \end{cases}$$

La specie preda decresce dal valore iniziale x_0 ed al tempo $t = \frac{\pi}{4}$ è estinta. La specie predatrice inizialmente aumenta, all'istante $t = \frac{\pi}{8}$ raggiunge il suo massimo (ed è $x(\frac{\pi}{8}) = y(\frac{\pi}{8})$), poi inizia a decrescere, al tempo $t = \frac{\pi}{4}$ riassume il suo valore iniziale y_0 . Da quell'istante in poi, essendosi estinta la popolazione preda, il modello non è più applicabile e l'evoluzione della specie y è descritta dall'equazione $y' = -2y$, la cui soluzione è $y = y_0 e^{-2t}$, da cui si deduce un decremento esponenziale della specie, con estinzione asintotica. Si intende dire con questo che la specie si estingue in un tempo infinito, ma ovviamente potremo considerare la specie estinta quando, ad esempio, si sia ridotta ad un solo esemplare, ovvero al t_f in cui $y(t_f) = 1$; poichè è allora $1 = y_0 e^{-2t_f}$, si ricava $t_f = \frac{1}{2} \ln y_0$, che fornisce il tempo realistico di estinzione.

Occorre allora modificare il modello matematico, introducendo dei fattori di complessità che lo rendano più aderente alla realtà del fenomeno che si vuole studiare.

Si ricordi che ogni modello matematico viene costruito per studiare problemi ben precisi e spesso solo alcuni aspetti di tali problemi, perciò vi sono dei limiti di validità e applicabilità di cui bisogna tener conto. Quando un modello non è sufficiente per descrivere un fenomeno, perchè troppo semplice, si può pensare di migliorarlo rendendolo più complicato, cioè come detto prima, introducendo dei fattori di complessità. Naturalmente i fenomeni sono sempre più complessi di ogni modello matematico che possiamo pensare di costruire. Tale costruzione implica necessariamente una schematizzazione dei vari aspetti del fenomeno: ad esempio, l'uso di un modello deterministico o probabilistico implica una scelta tra due schemi generali, ciascuno dei quali presenta pregi e difetti; l'introduzione di funzioni continue consente l'uso di equazioni differenziali, ma il numero di individui di una specie è discreto; è molto complicato introdurre fattori di complessità quali la capacità di nascondersi, il fatto stesso che vi siano nascondigli, il mimetismo (sia come arma di difesa che di attacco), l'influenza dell'ambiente sul comportamento di una specie, cioè l'azione delle variazioni ambientali, anche solo meteorologiche e climatiche, sulle varie specie e la loro capacità di adattamento, e via complicando.

D'altro canto non si può pensare di costruire modelli troppo complicati dal punto di vista matematico, perchè diventa poi troppo difficile, se non impos-

sibile, studiarli sia dal punto di vista qualitativo che quantitativo, anche se l'uso dello strumento elettronico può illudere in tal senso.

Un modello preda-predatore più aderente alla realtà può essere ottenuto considerando, anziché un sistema differenziale lineare, un sistema differenziale in cui, a secondo membro, compaiono dei termini quadratici nelle variabili in gioco; tale sistema viene detto più brevemente un **sistema quadratico**.

Il modello quadratico più semplice usato è quello di Lotka-Volterra e si ottiene come generalizzazione del sistema lineare precedente supponendo che i coefficienti di interazione tra le due specie, cioè B e C , non siano costanti, bensì proporzionali alle rispettive popolazioni: invece di B e di C scriveremo allora $-Bx$ e Cy , dove il segno meno è dovuto al fatto che si tratta di un modello preda-predatore.

Il sistema ha così la forma:

$$\begin{cases} x' = Ax - Bxy \\ y' = Cy - Dy \end{cases}$$

dove A, B, C, D sono costanti reali positive.

Una giustificazione “biologica” di queste equazioni è che le prede, come specie isolata, crescerebbero con legge malthusiana ($x' = Ax, A > 0$), ma la presenza di predatori le fa diminuire in modo proporzionale alla probabilità degli incontri tra prede e predatori, cioè al prodotto delle popolazioni all'istante considerato (di qui il termine $-Bxy, B > 0$). Analogamente, i predatori, in assenza di prede, diminuirebbero con legge esponenziale ($y' = -Dy, D > 0$), ma in presenza di prede trovano cibo, quindi aumentano con una legge che dipende ancora dalla probabilità degli incontri con le prede (di qui il termine $Cxy, C > 0$); i termini B e C sono in generale diversi tra loro e sono legati alle capacità di offesa e di difesa delle due specie.

Il sistema quadratico considerato ammette sempre come soluzione il punto critico $x = 0, y = 0, \forall t$; tale soluzione corrisponde all'estinzione di entrambe le specie e prende il nome di *soluzione banale*.

Esiste un'altra soluzione costante nel tempo, cioè una seconda soluzione statica ed è ovviamente un secondo punto critico, dato da:

$$x = x^* = \frac{D}{C} \quad , \quad y = y^* = \frac{A}{B},$$

come è facile verificare, sostituendo x^* e y^* nel sistema, tenuto conto che $(x^*)' = (y^*)' = 0$. Questa soluzione è ovviamente l'unica soluzione del problema di Cauchy dato dal sistema, con le condizioni iniziali $x(0) = x^*$, $y(0) = y^*$. Se inizialmente si hanno x^* prede e y^* predatori, il loro numero resta invariato nel tempo: si ha perciò una situazione di equilibrio che giustifica il nome di soluzione statica. Dal punto di vista della stabilità, si vede che $O(0,0)$ è un colle instabile, mentre $P^*(x^*, y^*)$ è un centro stabile (geometricamente).

Infatti, consideriamo dapprima l'origine O e linearizziamo il sistema nel suo intorno; si ottiene

$$\begin{cases} x' = Ax \\ y' = -Dy \end{cases}$$

i cui autovalori sono dati da A e $-D$, cioè sono reali e di segno opposto, dunque l'origine è un colle instabile per il sistema lineare e, per il teorema prima enunciato, lo è anche per il sistema non lineare. Consideriamo ora il punto P^* ; portiamolo nell'origine con la traslazione:

$$u = x - \frac{D}{C}, \quad w = y - \frac{A}{B}.$$

Il sistema dato diventa:

$$\begin{cases} u' = -\frac{DB}{C}w - Buw \\ w' = \frac{AC}{B}u + Cuw \end{cases}$$

la cui linearizzazione nell'intorno di $u = 0$, $w = 0$ è

$$\begin{cases} u' = -\frac{DB}{C}w \\ w' = \frac{AC}{B}u \end{cases}$$

che ammette come autovalori $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{AD}$, cioè il punto critico è un centro stabile per il sistema lineare. Prima di procedere all'analisi nel caso non lineare, ove, in virtù del teorema già invocato, il punto critico potrebbe essere centro o fuoco, pur sempre stabile, osserviamo che le curve caratteristiche del sistema traslato nell'origine e linearizzato sono soluzioni, nel piano delle fasi (u, w) , dell'equazione

$$\frac{dw}{du} = -\frac{AC^2}{DB^2} \frac{u}{w}$$

ovvero la famiglia di ellissi di centro l'origine e di equazione

$$\frac{1}{2}DB^2w^2 + \frac{1}{2}AC^2u^2 = \text{costante} = h.$$

Nel piano (x, y) saranno ancora ellissi di centro P^* ed equazione

$$\frac{1}{2}DB^2 \left(y - \frac{A}{B} \right)^2 + \frac{1}{2}AC^2 \left(x - \frac{D}{C} \right)^2 = \text{costante} = h.$$

In questo caso semplice si poteva calcolare direttamente le soluzioni $u = u(t)$ e $w = w(t)$: infatti, derivando la prima equazione rispetto a t e sostituendo a w' il valore dato dalla seconda, si ha l'equazione del secondo ordine

$$u'' = ADu = 0$$

che ha come soluzione

$$u = a \sin(\sqrt{AD}t + b)$$

con a e b costanti di integrazione, e analogamente sarà w . Per eliminazione di t si può ottenere la famiglia di ellissi. Si tratta di soluzioni periodiche di periodo $T = \frac{2\pi}{\sqrt{AD}}$.

Le soluzioni come funzioni del tempo sono date da:

$$x = \frac{C}{D} + c_1 \cos(\sqrt{AD}t) + c_2 \sin(\sqrt{AD}t);$$

$$y = \frac{A}{B} + c_3 \cos(\sqrt{AD}t) + c_4 \sin(\sqrt{AD}t),$$

dove c_1, c_2, c_3, c_4 sono delle costanti di integrazione che vengono determinate dalle condizioni iniziali e non sono tra loro indipendenti; si può verificare che valgono le relazioni:

$$c_3 = -c_2 \frac{D}{BC} \sqrt{AD}; \quad c_4 = c_1 \frac{D}{BC} \sqrt{AD}.$$

Si ponga, ad esempio, $A = B = C = D = 1$; è allora $x^* = y^* = 1$ e l'integrale generale è dato da:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \\ y(t) = -c_2 \cos t + c_1 \sin t + 1, \end{cases}$$

essendo c_1, c_2 costanti di integrazione; le orbite nel piano delle fasi sono circonferenze di centro $P = (1, 1)$ e raggio $r = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = c_1^2 + c_2^2$$

assegnate le condizioni iniziali $x(0) = 10, y(0) = 5$, si ricava

$$\begin{cases} x(t) = 9 \cos t - 4 \sin t + 1 \\ y(t) = 4 \cos t + 9 \sin t + 1. \end{cases}$$

L'orbita nel piano delle fasi è la circonferenza di centro P e raggio $r = \sqrt{97} \approx 9.85$.

Tornando al sistema non lineare

$$\begin{cases} x'(t) = Ax - Bxy \\ y'(t) = Cxy - Dy, \end{cases}$$

se ne può ricavare l'equazione delle curve di fase in quanto si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-D + Cx)}{x(A - By)} \iff \frac{A - By}{y} dy = \frac{-D + Cx}{x} dx;$$

integrando si ottiene:

$$A \ln y - By + D \ln x - Cx = h = \text{costante},$$

da cui

$$e^{A \ln y} e^{-By} e^{D \ln x} e^{-Cx} = e^h = k$$

ovvero

$$\frac{y^A}{e^{By}} \frac{x^D}{e^{Cx}} = k$$

Dunque la generica curva di fase può essere vista come il prodotto di due funzioni, una nella sola y e una nella sola x ; poichè interessa valutare il comportamento di tali curve per x e y positivi, nell'intorno di P^* , supporremo $x > 0$ e $y > 0$ per ogni t . Posto

$$f(y) = \frac{y^A}{e^{By}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^D}{e^{Cx}},$$

si vede subito che le due funzioni hanno un andamento analogo. È infatti:

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0; \quad \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

Massimo di $f(y)$ per $y = \frac{A}{B}$ e $f(y) = M_y = (\frac{A}{B})^A e^{-A}$; di $g(x)$ per $x = \frac{D}{C}$ e $g(x) = M_x = (\frac{D}{C})^D e^{-D}$; entrambi i grafici passano per l'origine, hanno l'asse orizzontale come asintoto, sono limitati, hanno massimo assoluto in $(\frac{A}{B}, M_y)$ e $(\frac{D}{C}, M_x)$.

Studiamo ora il comportamento dell'equazione

$$\frac{y^A}{e^{By}} \frac{x^D}{e^{Cx}} = k,$$

scritta brevemente come $f(y)g(x) = k$, al variare di k .

1. Se $k > M_y M_x$, l'equazione non ammette radici reali;
2. se $k = M_y M_x$, esiste una sola radice $y = \frac{A}{B}$, $x = \frac{D}{C}$, cioè il suo grafico si riduce al punto $P(x = \frac{D}{C}, y = \frac{A}{B})$;
3. se $k < M_y M_x$, si avranno soluzioni reali e, per individuare l'insieme di tali soluzioni (cioè il grafico della curva nel piano delle fasi) per un fissato valore di k , si ponga $k = pM_y$, essendo $p < M_x$; l'equazione $g(x) = p$ ammette due soluzioni che indicheremo con $x = x_m$ e $x = x_M$: infatti la retta $x = p$ taglia il grafico della funzione $g(x)$ in due punti ed è $x_m < \frac{D}{C} < x_M$. A sua volta, l'equazione $f(y) = \frac{p}{g(x)} M_y$ ammette due soluzioni per ogni fissato valore di x tale che sia $x_m < x < x_M$, una sola se $x = x_m$ oppure $x = x_M$ e infine nessuna soluzione se $x < x_m$ o $x > x_M$. Si noti che quando $x = \frac{D}{C}$, la y assume due valori y_m e y_M , tali che, per questa curva, è sempre $y_m < y < y_M$. Infatti, $\forall x \in (x_m, x_M)$, risulta $g(x) > p$, ovvero $\frac{p}{g(x)} < 1$, per cui è $f(y) < M_y$, e la retta $y = \text{cost}$ taglia il grafico di $f(y)$ in due punti y_m e y_M , tali che $y_m < \frac{A}{B} < y_M$.

In definitiva, fissato k , la curva caratteristica che passa per i punti $(x_m, \frac{A}{B})$, $(x_M, \frac{A}{B})$, $(\frac{D}{C}, y_m)$, $(\frac{D}{C}, y_M)$, è tutta contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette $x = x_m$, $x = x_M$, $y = y_m$, $y = y_M$, le rette verticali la intersecano in due punti, uno al di sopra ed uno al di sotto del punto critico, le rette orizzontali in due punti, uno a destra ed uno a sinistra dello stesso, tali intersezioni variano con continuità; dunque la curva è chiusa, contiene il punto critico, per ogni valore $k < M_x M_y$, che è ancora un centro stabile, e la soluzione del problema dinamico corrispondente è periodica; la famiglia delle curve di fase si ottiene facendo variare k .

Il verso di percorrenza su ogni caratteristica si ottiene esaminando il segno delle derivate di x e di y nei punti del piano di fase: se, ad

esempio, ad un istante t è $y < \frac{A}{B}$ e $x < \frac{D}{C}$; ne segue che è $x' > 0$ e $y' < 0$, cioè nel quadrante individuato dalle due disequazioni la x cresce e la y decresce; analogamente si procede negli altri quadranti e si ottiene che le orbite vengono percorse in senso antiorario.

Dal punto di vista biologico questo significa che, assegnate le condizioni iniziali, individuata quindi l'unica orbita corrispondente come soluzione nel piano di fase, le prede ed i predatori hanno un andamento fluttuante nel tempo, nel senso che crescono e decrescono con legge periodica di ugual periodo, ma con una differenza di fase di $\pi/2$: sia la $x(t)$ che la $y(t)$ oscillano tra un valore massimo ed uno minimo in un tempo T (uguale per entrambe) e le due soluzioni non sono in fase, nel senso che la x raggiunge il suo massimo (o minimo) in tempi diversi dalla y .

I valori x^* , y^* , coordinate del centro comune a tutte le orbite nel piano delle fasi, hanno un significato fisico generale: rappresentano il valor medio delle popolazioni x e y in un periodo completo, qualunque sia l'orbita, cioè qualunque sia la soluzione del problema, quindi qualunque siano i dati iniziali.

Infatti, i valori medi delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$ nell'intervallo T sono dati per definizione da:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$

Si consideri ora l'equazione $x'(t) = Ax - Bxy$, si dividano ambo i membri per x (essendo $x \neq 0, \forall t$) e si integri tra 0 e T :

$$\int_0^T \frac{x'}{x} dt = \int_0^T (A - By) dt,$$

ottenendo così:

$$\left[\ln \{x(t)\} \right]_0^T = AT - B \int_0^T y(t) dt.$$

Poiché la soluzione $x(t)$ è periodica di periodo T , è certo $x(0) = x(T)$, dunque $\ln[x(T)] - \ln[x(0)] = 0$, da cui si ricava

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

ovvero $y^* = \bar{y}$; analogamente si ha $x^* = \bar{x}$.

Il significato di questo risultato nel nostro modello è che, fissate le due specie e le condizioni ambientali, cioè i valori dei parametri A, B, C, D , le due popolazioni oscillano periodicamente tra valori massimi e minimi, ma la popolazione media di ciascuna specie in un periodo è la stessa, indipendentemente dai valori iniziali. Si noti che invece le ampiezze delle oscillazioni dipendono univocamente delle condizioni iniziali e sono tanto più grandi quanto più le condizioni iniziali si discostano dai valori medi, ovvero dalle coordinate del punto di equilibrio. Se i valori iniziali sono proprio x^* e y^* , l'unica soluzione è $x = x^*, y = y^*$, il sistema è in equilibrio, il numero sia di prede che di predatori resta costante.

Il pescatore

Nel corso dei suoi studi sulle variazioni delle popolazioni di diverse specie di pesci conviventi, tra il 1920 e il 1925, il biologo Umberto d'Ancona fu incuriosito da alcuni dati statistici relativi alla pesca di pesci appartenenti a varie specie (in generale selaci, cioè squali, razze, ecc.), aventi però in comune la caratteristica di cibarsi di altri pesci e detti perciò predatori, al contrario delle loro prede (pesce azzurro, cefali, orate, branzini, ecc.), che invece si cibano di plancton, alghe od altri microorganismi.

Questa semplice suddivisione in due categorie del pesce è dovuta al fatto che le specie commestibili, quindi commerciabili, corrispondono alle prede, mentre i predatori non sono in generale apprezzati sulle buone tavole; i rilevamenti vengono effettuati dai pescatori stessi, i quali suddividono il pescato nelle due categorie e ottengono, pesando, le percentuali relative a prede e predatori.

Il periodo di riferimento preso in considerazione da d'Ancona andava dal 1914 al 1923, durante il quale si era avuta la prima guerra mondiale; i dati erano forniti dal porto Fiume, località in cui l'attività di pesca aveva avuto una forte riduzione durante la guerra, si riferivano alla percentuale di predatori pescati nel corso di ogni anno ed erano i seguenti:

anno	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
% predat.	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4	27.3	16.0	15.0	14.8	10.7

L'osservazione spontanea di d'Ancona fu che la crescita, in percentuale, dei predatori era dovuta al calo dell'attività di pesca nel corso della guerra. Ma in quale maniera l'intensità della pesca poteva influenzare le popolazioni di

pesci e come si poteva descrivere il fatto che la diminuzione della pesca (che, si noti, a livello industriale non è selettiva, ma indiscriminata) favorisse i predatori? La risposta, dal punto di vista biologico, era che, riducendo la pesca, aumentava il numero di pesci in generale e, in particolare, quello delle prede, consentendo così ai predatori di avere a disposizione una maggiore quantità di cibo, quindi di accrescersi e moltiplicarsi più rapidamente. Questa spiegazione è però generica e non riesce a dar conto dei dati numerici né a fornire una chiave di lettura valida per situazioni diverse.

D'Ancona sentì l'esigenza di pervenire ad una descrizione più accurata e perciò gli era necessario uno strumento più sofisticato; a tale scopo si rivolse al collega, e futuro suocero, Vito Volterra, matematico famoso, che provò subito interesse per la questione e iniziò così gli studi che lo condussero a formulare la sua teoria della *lotta per la vita*, in cui venne per la prima volta introdotto il modello preda-predatore, che ora va sotto il nome di modello Lotka-Volterra, in quanto, negli stessi anni, il biofisico americano (di origine austriaca) A. Lotka pervenne ai medesimi risultati di Volterra, in modo indipendente. Volterra diede però alla sua teoria una formulazione più chiaramente matematica ed uno sviluppo di respiro più ampio e più profondo che lo condusse alla fondazione di quella disciplina che va sotto il nome di *biomatematica* e che egli stesso chiamò, con termine di chiara origine illuministica, *biologia razionale*.

Le equazioni del modello preda-predatore sono state descritte e brevemente analizzate nel paragrafo precedente. Si vuole ora introdurre nel modello il pescatore e analizzare quali effetti ne derivino sulle due specie. Il modo più semplice per tale scopo è quello di schematizzare il pescatore con un termine proporzionale alla singola popolazione (più pesci vi sono, più abbondante sarà la pesca) con un coefficiente $P > 0$, il *tasso di pesca*, costante e uguale per le due specie, dato il carattere indiscriminato della pesca. Si ottiene così il sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax - Bxy - Px \\ y'(t) = Cxy - Dy - Py \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x'(t) = (A - P)x - Bxy \\ y'(t) = Cxy - (D + P)y. \end{cases}$$

Questo sistema è identico a quello del modello senza il pescatore, avendo sostituito A e D con $A - P$ e $D + P$; ne segue che se $0 < P < A$ (cioè se la

pesca è controllata, non è eccessiva, in modo che il tasso di pesca sia inferiore al tasso di crescita naturale delle prede) il punto critico del sistema diventa

$$P' = \left(\frac{D + P}{C}, \frac{A - P}{B} \right),$$

che è ancora centro di orbite periodiche. Tale punto si trova ancora nel primo quadrante, se $A - P > 0$ e, rispetto al precedente punto P^* , spostato in basso a destra: $x(P') > x(P^*)$, $y(P') < y(P^*)$. Poiché le coordinate di P' rappresentano ancora i valori medi delle due popolazioni in un ciclo completo, se ne deduce che l'intervento del pescatore fa diminuire il numero dei predatori ed aumentare il numero delle prede. Questo risultato è così in accordo qualitativo con i dati di d'Ancona.

Se la pesca fosse troppo intensiva, il che significherebbe $P > A$, si avrebbe estinzione delle due specie. Una conferma della validità di questo modello si è avuta in un caso in cui il “pescatore” era invece un insetticida (il DDT) e i “pesci” erano due insetti: l'*Icerya purchasi* e il *Novius cardinalis*. Il primo è un infestante degli agrumi, pervenuto negli U.S.A. dall'Australia nel 1868, che provocava gravi danni agli agrumeti americani. Venne poi individuato un suo naturale nemico, il *Novius*, che, inserito nel ciclo ecologico dell'*Icerya*, ne provocò un calo, essendosi stabilito tra le due specie un rapporto preda-predatore. La scoperta del DDT indusse a pensare di poter eliminare del tutto l'insetto dannoso, pur di usare una dose sufficientemente grande di insetticida; accadde invece che si stabilì un ciclo preda-predatore-pescatore, con l'*Icerya* come preda, *Novius* predatore e DDT pescatore, in condizioni per cui non si riusciva a provocare l'estinzione delle prede ($P < A$) e di conseguenza si ebbe un aumento dell'infestante e una diminuzione del predatore, cioè un danno alle culture invece che un beneficio.

Altri esempi di ecosistemi cui si può applicare il modello preda-predatore sono quello del ciclo linci-lepri delle nevi e “budworms”-larici, entrambi in Canada.

Il modello di Volterra-Lotka si presta però a numerose critiche da parte dei biologi e degli ecologi, ed i motivi principali sono:

1. nella maggior parte dei casi di ecosistemi riconducibili al modello preda-predatore e osservabili in laboratorio (ad esempio, colonie di batteri) non si osserva un andamento periodico, bensì un andamento asintotico verso una situazione stabile; in altri termini, ci si aspetta di trovare punti di equilibrio che siano fuochi stabili non previsti dal modello di Volterra;

2. non tiene conto di diversi tipi di interazione interne alle singole specie, come cooperazione, competizione, ecc.;
3. le risorse e lo spazio vitale vengono supposti illimitati, il che non è;
4. non tiene conto delle capacità difensive e offensive delle specie, quali il mimetismo, l'azione coordinata, o della presenza di nascondigli, la capacità di apprendimento individuale e di specie, ecc.

Per i casi 2 e 4, non si può rispondere altrimenti che cercando di proporre altri modelli, più complicati, anche di tipo non deterministico; il modello di Volterra, con eventuali modifiche, che vedremo, è un modello semplice, schematico, che riesce a fornire una risposta ad una domanda specifica ed i risultati paiono soddisfacenti.

Per quanto riguarda le osservazioni 1 e 3, si può modificare il modello di Volterra introducendo un opportuno termine correttivo nelle equazioni dinamiche. Tale termine prende il nome (tra gli altri) di termine *logistico*, in quanto corrisponde al modello demografico di sviluppo di una popolazione con risorse limitate descritto con un'equazione differenziale detta equazione differenziale della logistica.

Si consideri una popolazione x , il cui sviluppo è caratterizzato da un tasso di crescita $a > 0$, ma avente a disposizione una quantità di risorse limitate; la sua evoluzione non potrà essere di crescita indefinita, poichè prima o poi l'ambiente non sarà più in grado di fornire risorse tali da garantire l'andamento di crescita di tipo esponenziale. Si può però pensare che la popolazione tenda a raggiungere uno stato limite (stazionario) che rappresenti l'equilibrio tra popolazione e risorse.

L'equazione di evoluzione più semplice adatta a rappresentare questo comportamento è la cosiddetta **equazione logistica**. Si tratta di un caso particolare dell'equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$:

$$x' = qx - mx^2$$

dove m e q sono due costanti positive. Ponendo $z(t) = 1/x(t)$, poichè è $z' = -x'/x^2$, si ottiene $z' = -qz + m$, che è un'equazione lineare nella $z(t)$ e ha come integrale generale

$$z(t) = \frac{m}{q} + ce^{-qt}$$

essendo c una costante di integrazione; tenuto conto che $x = 1/z$, si ha:

$$x(t) = \frac{q}{m + cqe^{-qt}}.$$

L'equazione $x' = qx - mx^2$ ammette anche gli integrali singolari $x(t) \equiv 0$ e $x(t) \equiv q/m$. La curva definita dalla funzione $x(t)$ data sopra, per ogni valore della costante c , prende il nome in demografia di **curva logistica**. Questa funzione è definita per ogni t , se $c > 0$, mentre ha una singolarità in $t = \frac{1}{q} \ln\left(\frac{-cq}{m}\right) = t^*$ se $c < 0$ e $t = t^*$ è un asintoto verticale. Le derivate prima e seconda sono date da:

$$x' = \frac{cq^3 e^{-qt}}{m + cqe^{-qt}},$$

$$x'' = \frac{cq^4 e^{-qt}(cqe^{-qt} - m)}{(m + cqe^{-qt})^3}.$$

Ne segue che la derivata prima non si annulla mai, mentre la derivata seconda si annulla per $t = \frac{1}{q} \ln \frac{cq}{m}$ se e solo se $c > 0$; la funzione è sempre crescente per $c > 0$, sempre decrescente per $c < 0$.

Le rette $x = 0$ e $x = q/m$ sono asintoti orizzontali; $t = \frac{1}{q} \ln\left(\frac{-cq}{m}\right)$ se $c < 0$, è un asintoto verticale.

Se si impone la condizione iniziale $x(0) = x_0 > 0$, cioè che all'istante $t = 0$ la popolazione sia data dal valore x_0 , si ottiene per c il valore

$$c = \frac{q - mx_0}{qx_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{m}{q},$$

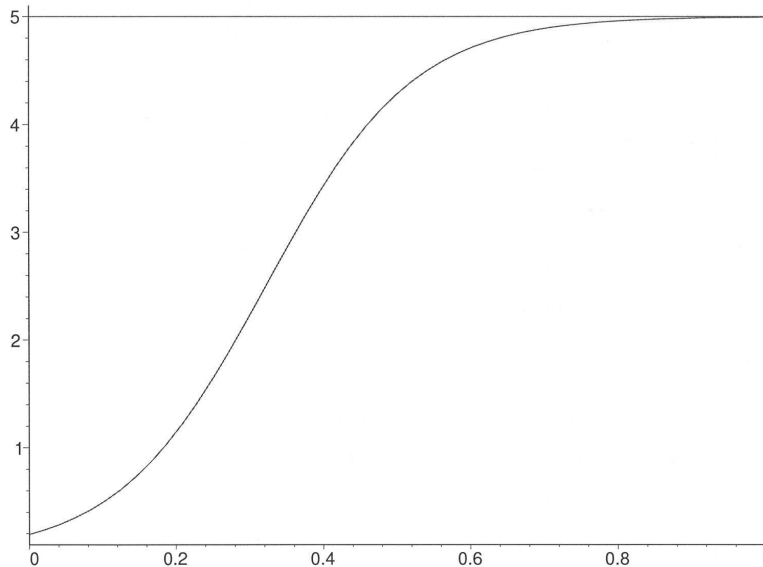
(per cui: $c < 0 \Leftrightarrow x_0 > \frac{q}{m}$) ed allora la curva logistica prende la forma:

$$x(t) = \frac{q}{m x_0 + \left(\frac{q}{m} - x_0\right) e^{-qt}}.$$

Le condizioni su c si traducono allora in condizioni sui valori iniziali relativamente ai parametri strutturali q e m . In particolare interessa il caso in cui la popolazione, a partire da valori iniziali non molto grandi, cresce; siamo allora nel caso in cui è $x_0 < \frac{q}{m}$ e il grafico della curva corrispondente è sempre crescente, ha un flesso in

$$t = \frac{1}{q} \ln\left(\frac{cq}{m}\right), \quad x = \frac{q}{2m},$$

a sinistra del flesso volge la concavità verso l'alto, a sinistra verso il basso, come illustrato nella figura seguente.



Si osservi che il grafico, a sinistra del punto F di flesso, ha un andamento simile a quello della funzione esponenziale, mentre a destra di F cresce sempre più lentamente e il tasso di crescita, dato dalla derivata x' , tende al valore zero, in un tempo infinito. In corrispondenza, la popolazione tende al valore limite $\frac{q}{m}$, che rappresenta il valore di popolazione in equilibrio con l'ambiente; questa espressione è coerente con il fatto che, se inizialmente fosse $x_0 = \frac{q}{m}$, $x = x_0$ sarebbe una soluzione del problema e tale valore è quello che rende nulla la x' (cioè la velocità di evoluzione) e dal punto di vista fisico questo è una posizione di equilibrio. Vi è una seconda posizione di equilibrio: $x(t) = 0$, ma questa rappresenta una popolazione estinta.

Si osservi ancora che se fosse $x_0 > \frac{q}{m}$ la popolazione tenderebbe ancora al valore di equilibrio per un tempo infinito, ma per valori decrescenti.

Infine, se inizialmente la popolazione ha un valore uguale al valore di equilibrio, vi resta indefinitamente (finché non intervengano fatti perturbatori che modifichino la situazione); se ha valore diverso, tende ad esso raggiungendo valori sempre più prossimi a quello di equilibrio.

Tornando ora al caso di due specie, modello preda-predatore, possiamo supporre che le risorse siano limitate per entrambe, rispetto anche alla competizione interna di ciascuna specie; in tal caso è lecito introdurre in ogni

equazione un termine di tipo logistico, ottenendo il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = Ax - Bxy - Ex^2 \\ y'(t) = Cxy - Dy - Fy^2 \end{cases}$$

dove E ed F sono costanti positive aventi il significato di termini logistici, ovvero i tassi di competizione interni a ciascuna delle due specie.

Per studiare questo modello conviene esaminare brevemente il caso generale dei modelli di popolazione quadratici, in cui rientrano i modelli predatore-predatore, con o senza il termine logistico, come faremo nel prossimo paragrafo.

Modelli di popolazione quadratici

Il più generale modello quadratico di popolazioni interagenti è dato dal sistema:

$$x'^i = x_0^i + a_j^i x^j + a_{hj}^i x^h x^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Nel caso di due specie è, ovviamente, $i, j = 1, 2$ e si trova la notazione precedente ponendo $x^1 = x$, $x^2 = y$. Rivolgiamo per ora la nostra attenzione a questo caso, riservandoci di tornare al caso di n specie nella seconda parte di questo paragrafo. Semplifichiamo ulteriormente lo schema, supponendo di aver traslato nell'origine un punto critico ($x_0^i = 0$) e di poter trascurare i termini

$$a_2^1 x^2, \quad a_1^2 x^1, \quad a_{22}^1 (x^2)^2, \quad a_{11}^2 (x^1)^2,$$

in quanto l'azione di una specie sull'altra è già descritta dai termini misti $x^1 x^2$.

Il modello semplificato è allora dato, in termini di variabili x e y , dal sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + Bxy + Ex^2 \\ y'(t) = Cxy + Dy + Fy^2 \end{cases}$$

dove A, B, C, D, E, F sono costanti reali ed il loro segno o il loro annullarsi dà luogo a interpretazioni diverse di modello. Si ha così:

1. se $E = B = C = F = 0$, siamo nel caso di due specie non interagenti che crescono o decrescono (a seconda dei segni di A e D) con legge malthusiana;
2. se $B = C = 0$, $E < 0$, $F < 0$, si hanno ancora due specie non interagenti, ma che evolvono in accordo con il modello logistico;

3. se $E = F = 0$, $AD < 0$, $BC < 0$, $AB < 0$, $CD < 0$, si ha il modello preda-predatore di Lotka-Volterra (x è la preda se $A > 0$);
4. i coefficienti E , F indicano competizione se negativi, cooperazione se positivi, all'interno della specie relativa: sono dunque coefficienti di carattere sociale per ogni specie, ma indicano anche l'effetto della limitatezza delle risorse e dello spazio ambientale sulla specie; se negativi, sono termini logistici e possono essere visti come coefficienti di sovrappopolamento, se positivi, come coefficienti di mutualismo, cioè indicano che l'aumento della popolazione induce un aumento del tasso di crescita;
5. i coefficienti B e C rappresentano l'interazione tra le due specie e si potrà così avere
 - mutualismo, o cooperazione, tra le due specie, se $B > 0$ e $C > 0$;
 - competizione o reciproca predazione, se $B < 0$ e $C < 0$;
 - preda-predatore, se $BC < 0$.

Nel caso di due specie in competizione, si può dimostrare il principio di esclusione competitiva (di Gause), che viene enunciato come principio nel caso di più specie in competizione e afferma che in tal caso una sola specie prevale sulle altre, il che non comporta necessariamente la loro estinzione, ma il loro eventuale emigrare in un altro habitat.

Nella terminologia della biomatematica, una curva caratteristica nel piano delle fasi, o orbita, si dice *ecologicamente stabile* se è chiusa ed asintoticamente stabile. In tal senso, le soluzioni periodiche del modello di Volterra non sono ecologicamente stabili, perchè sono stabili dal punto di vista geometrico, ma non dal punto di vista dinamico: perturbando i dati iniziali si passa ad un'altra orbita che non tende asintoticamente all'orbita non perturbata. Invece, un ciclo limite stabile o un punto critico asintoticamente stabile sono ecologicamente stabili.

Tornando al modello di popolazione quadratico, questo ammette come punti critici: $O(0, 0)$, $M(0, -\frac{D}{F})$, $N(-\frac{A}{E}, 0)$, cui corrisponde l'estinzione di almeno una specie, ed il punto, più interessante, $P(x_0, y_0)$

$$x_0 = \frac{BD - AF}{EF - BC}, \quad y_0 = \frac{AC - ED}{EF - BC},$$

che esiste se e solo se $EF - BC \neq 0$ ed ha senso per il nostro problema se $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$; oltre a questi punti critici si potranno avere soluzioni periodiche ovvero cicli limite. Vale il seguente

Teorema 8.1 *Definiti i due numeri R e S come:*

$$R = EF - BC \quad , \quad S = ED(B - F) - AF(E - C),$$

se $R \neq 0$ e $S \neq 0$, allora il sistema quadratico non ammette soluzioni periodiche.

Dimostrazione:

Posto

$$a = \frac{F(C - E)}{R} - 1 \quad , \quad b = \frac{E(B - F)}{R} - 1,$$

si consideri la funzione $k(x, y) = x^a y^b$. Si supponga ora che il sistema dato ammetta una soluzione periodica che sia tutta contenuta nel primo quadrante e si indichi con \mathcal{D} il dominio piano limitato avente tale orbita come frontiera. Sarà allora $k(x, y) > 0, \forall(x, y) \in \mathcal{D}$. Si consideri l'integrale

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial(kx')}{\partial x} + \frac{\partial(ky')}{\partial y} \right) dx dy.$$

Da un lato è

$$\frac{\partial(kx')}{\partial x} + \frac{\partial(ky')}{\partial y} = \frac{\partial(kf)}{\partial x} + \frac{\partial(kg)}{\partial y} = \frac{S}{R}k$$

essendo $f(x, y) = (A + Ex + By)x, g(x, y) = (D + Cx + Fy)y$, quindi

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial(kf)}{\partial x} + \frac{\partial(kg)}{\partial y} \right) dx dy \neq 0.$$

D'altro lato, per il lemma di Green, è

$$\mathcal{J} = \oint_{\text{ciclo}} (kg \, dx - kf \, dy),$$

ma, essendo per ipotesi il moto periodico, detto T il suo periodo, si ha

$$\mathcal{J} = \int_0^T (kgx' - kfy') dt = \int_0^T (kgf - kfg) dt = 0.$$

Si perviene così ad una contraddizione e resta provato l'asserto.

□

Il modello Lotka-Volterra, non corretto dal termine logistico, non soddisfa le ipotesi di questo teorema, poichè è $S = 0$: infatti, come abbiamo visto, ammette soluzioni periodiche. Quando si introduce il termine logistico si

ha $R \neq 0$ e $S \neq 0$, dunque non possono esistere soluzioni periodiche. Il sistema linearizzato ha nel punto critico P un centro stabile, quindi per il sistema non lineare, non potendo essere un centro, sarà un fuoco (si esclude anche la possibilità di singolarità superiore, poichè i termini non lineari sono esattamente quadratici), anzi sarà un fuoco stabile.

Se i coefficienti logistici sono molto piccoli (relativamente agli altri termini) e ci si trova in un intorno di P , le curve caratteristiche sono spirali orientate verso P tali che ad ogni giro completo attorno a P stesso la distanza tra il generico punto della curva e il fuoco diminuisce di così poco da poter essere approssimata da una curva chiusa. In tal senso, il modello di Lotka-Volterra iniziale costituisce una buona approssimazione del sistema preda-predatore: l'aggiunta del termine logistico rappresenta un effettivo miglioramento solo per un intervallo di tempo sufficientemente lungo.

Un modello generale di due specie conviventi è:

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y) \\ y'(t) = G(x, y) \end{cases}$$

dove le funzioni F e G descrivono il comportamento reciproco delle due specie; i punti critici sono le soluzioni del sistema algebrico $F = 0$, $G = 0$. L'analisi del sistema dipende però dalle diverse esplicitazioni di tali funzioni e tale scelta caratterizza i vari modelli.

Un'altra generalizzazione possibile si ottiene passando da un ecosistema a due specie a un ecosistema a più specie conviventi, in una rete trofica (alimentare) assegnata: si potranno avere interazioni reciproche tra le varie specie di predazione, competizione, mutualismo, ecc. nelle varie combinazioni possibili. Limiteremo la nostra attenzione al caso di n specie in catena alimentare di predazione (ogni specie è o preda o predatore) e il sistema quadratico proposto ancora da Volterra è del tipo

$$\frac{dx_r}{dt} = \left(c_r + \frac{1}{b_r} \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s \right) x_r, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

essendo $x_r(t)$ la popolazione della specie r -ma all'istante t , c_r il coefficiente di accrescimento della stessa specie, b_r il peso medio dell'individuo di tale specie (il prodotto $b_r x_r$ fornisce il peso totale degli individui della specie r all'istante t), $a_{rs} = -a_{sr}$ opportuni coefficienti di predazione: se $a_{rs} > 0$, la specie r preda la specie s . La condizione di antisimmetria sui coefficienti a_{rs} comporta che in ogni equazione del sistema manchi il termine x_r^2 e il

sistema può essere trattato matematicamente in modo interessante, anche se tale semplificazione prestò il fianco a critiche negative non eludibili.

Si introduca la nuova variabile $q_r(t)$ definita da:

$$q_r(t) = \int_0^t x_r(\tau) d\tau \quad \Leftrightarrow \quad x_r(t) = \frac{dq_r(t)}{dt}$$

cui Volterra diede il nome di *quantità di vita* della specie r -ma nell'intervallo di tempo $[0, t]$.

Si costruisca ora la funzione di stato (detta *Lagrangiana demografica*)

$$\mathcal{L}(q, q') = \sum_{s=1}^n b_s (q'_s \ln q'_s + c_s q_s) + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n a_{rs} q_r q'_s$$

e si ricavano le relative equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_s} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s} = 0$$

ovvero, esplicitamente

$$q''_r = \left(c_r + \frac{1}{b_r} \sum_{s=1}^n a_{rs} q'_s \right) q'_r ;$$

è immediato verificare che da quest'ultimo sistema si ritrova esattamente il sistema proposto da Volterra effettuando il cambiamento di variabili scritto sopra.

Si può ora applicare l'apparato tecnico della meccanica analitica e cercare di dare un'interpretazione interna al modello dei risultati che così si ottengono. In sintesi si può avere:

- integrale primo dell'energia

$$\mathcal{H} = \sum_{s=1}^n b_s (c_s q_s - q'_s) = \text{costante};$$

- variabili coniugate

$$p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_s};$$

- funzione hamiltoniana

$$H(p, q) = \mathcal{H}_{q'=q'(p,q)} = \sum_{s=1}^n b_s \left(c_s q_s - e^{\frac{1}{b_s}(p_s - b_s - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n q_r)} \right);$$

- equazioni di Hamilton

$$q'_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}; \quad p'_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s};$$

- integrale primo dell'energia

$$H(p, q) = \text{costante};$$

- equazione di Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} - H\left(q, \frac{\partial V}{\partial q}\right) = 0.$$

Si possono anche usare le tecniche del calcolo delle variazioni e enunciare dei principi e dei teoremi variazionali, a partire dal funzionale d'azione (detto azione vitale)

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, q') dt;$$

in tal caso, le equazioni ricavate per le q''_r non sono altro che le equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale d'azione, cioè i moti del sistema sono quei moti che rendono stazionario tale funzionale. In effetti, si può dimostrare che vale anche il principio di minima azione (il funzionale è minimo per tali moti).

Su questa base, in analogia a quanto accaduto per la meccanica, Volterra ritenne di poter chiamare questa branca della biomatematica con il nome di biologia razionale, ma vi sono delle carenze di modello che ne rendono difficile l'accettazione da parte dei biologi e dei naturalisti (oltre alla poca conoscenza della meccanica razionale e della meccanica analitica).

Si tratta del fatto che la soluzione che fornisce il punto critico con coordinate tutte diverse da zero esiste se e solo se il numero di specie è pari. Infatti, il sistema algebrico che fornisce i punti critici è dato da:

$$\left(c_r + \frac{1}{b_r} \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s \right) x_r = 0$$

e la soluzione non nulla sarà la soluzione del sistema

$$c_r + \frac{1}{b_r} \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s = 0$$

ovvero

$$\sum_{s=1}^n a_{rs} x_s = d_r$$

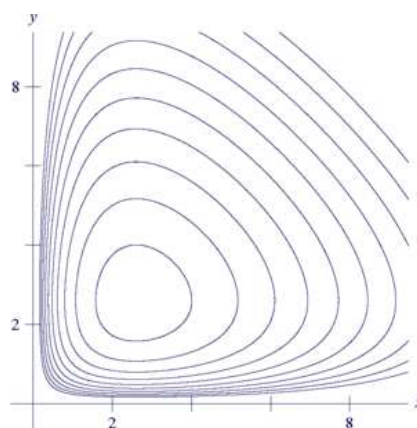
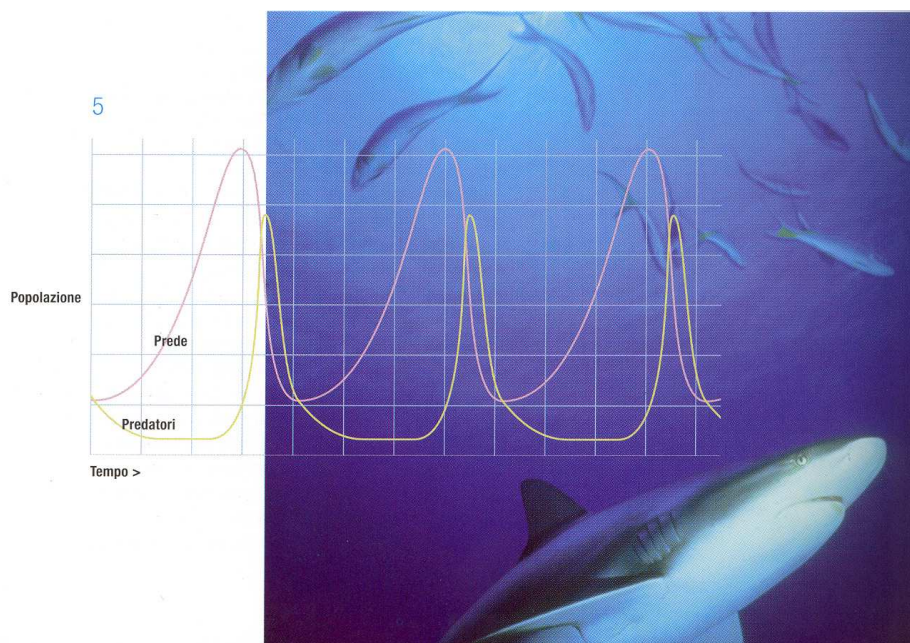
(avendo posto per brevità $d_r = -b_r c_r$) sistema che si può scrivere in forma compatta, con notazione ovvia $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$; tale sistema ammette soluzione se e solo se $\det(A) \neq 0$ ed è data da $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{d}$, ma, se n è dispari, è sempre $\det(A) = 0$, tutte le soluzioni del sistema dato hanno almeno una $x_r = 0$, cioè almeno una specie si estingue. Si ha così una forte asimmetria, non riscontrabile in natura, tra il comportamento di un ecosistema a numero pari di specie ed uno a numero dispari.

Nel caso che sia $\det(A) \neq 0$, Volterra ha dimostrato un notevole teorema di stabilità: se almeno uno dei termini d_r è positivo ed esistono n numeri positivi α_r tali che la forma quadratica

$$F = \sum_{r,s=1}^n \alpha_r a_{rs} x_r x_s$$

sia definita positiva, il sistema è stabile, nel senso che nessuna variabile x_s tende a zero nè ad infinito, nell'intorno del punto critico.

Il modo più ovvio di superare questa anomalia è quello di tener conto dei termini logistici, almeno per alcune delle n specie. In tal caso però viene a mancare la possibilità di usare l'apparato della meccanica analitica, non si hanno più gli integrali primi "dell'energia", in quanto si hanno fenomeni "dissipativi", non vale il teorema sulla stabilità appena enunciato, anche se Volterra stesso ed altri dopo di lui hanno trattato ampiamente questo caso. L'analisi viene piuttosto condotta su sistemi particolari, ad esempio a tre o quattro specie, con diverse ipotesi di legami trofici e viene usata la teoria dei sistemi dinamici. Si può così dimostrare che il principio di esclusione competitiva di Gause vale come teorema per tre specie in competizione o nel caso in cui due di esse cooperino e si può parzialmente generalizzare la validità a n specie, come anche si cerca di studiare i legami tra complessità e stabilità di ecosistemi, l'esistenza di valori critici per alcuni parametri significativi che comportino variazioni nella stabilità delle soluzioni, ma in quest'ultimo caso si entra nel campo della stabilità strutturale che affronteremo sinteticamente nel prossimo capitolo.



Capitolo 9

Perturbazione di parametri ed elementi di teoria delle biforcazioni

Il tipo di perturbazione visto finora corrisponde a quello chiamato perturbazione dei valori iniziali.

Infatti le diverse traiettorie nel piano delle fasi sono le soluzioni del sistema differenziale, corrispondente a diversi valori delle condizioni iniziali. Può accadere che il sistema differenziale contenga uno o più parametri. Interessa, come si è già visto, sapere come una perturbazione sui parametri influenzi l'andamento delle soluzioni, sia nel piano delle fasi che in altri eventuali spazi rappresentativi.

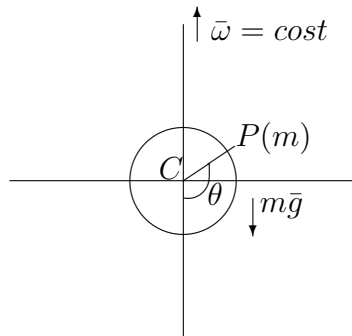
Può accadere che esistano dei valori, diciamo α_G , del parametro α (o dei parametri) tali che le proprietà dei punti di stazionarietà e dei cicli limite (e la loro stessa esistenza) varino al variare di α nell'intorno di α_G . Ad esempio può succedere che nel divenire α da minore a maggiore di α_G , delle singolarità cambino di stabilità, e/o che contemporaneamente appaiano dei cicli limite.

Si tratta, in questo caso, di *valori critici* del parametro α cui corrispondono delle ramificazioni, o *biforcazioni*, nel piano delle fasi e perciò tali valori critici vengono anche detti **punti di biforcazione**.

È frequente il caso in cui esistano due cicli limite, uno stabile e l'altro instabile, che, al tendere di α ad α_G , tendono l'uno all'altro, o meglio tendono entrambi ad un ciclo semistabile che scompare quando α supera α_G . Vediamo alcuni esempi.

Problema di equilibrio e stabilità

Un punto materiale pesante è vincolato senza attrito ad una circonferenza che ruota con velocità angolare uniforme ω attorno ad un suo diametro posto verticalmente. Si determinino le posizioni di equilibrio relativo studiandone la stabilità.



Detta m la massa del punto materiale e r il raggio della circonferenza si ha che il potenziale è:

$$U = mgr \cos \theta + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \sin^2 \theta + C.$$

Per ricavare le configurazioni di equilibrio vediamo quando la derivata rispetto a θ del potenziale si annulla:

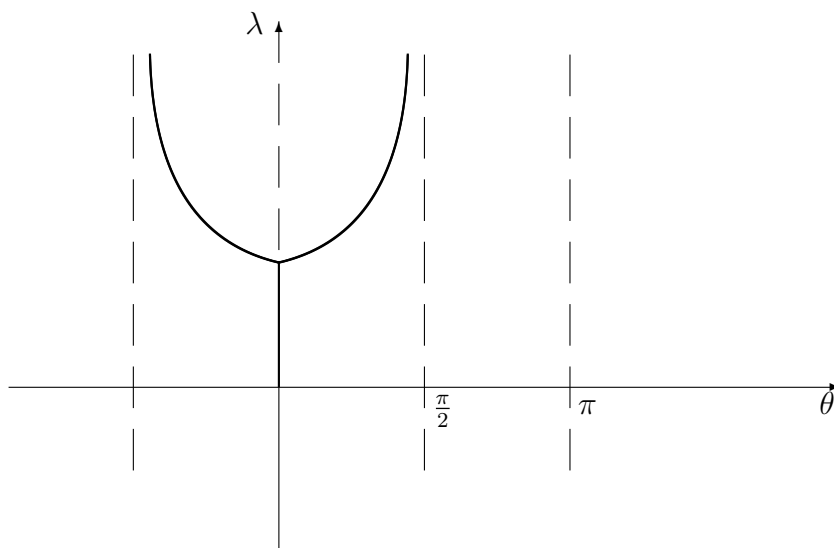
$$U'_\theta = -mgr \sin \theta + m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

che ha come soluzioni $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $\theta_{3,4} = \arccos \frac{g}{\omega^2 r}$, quest'ultima soluzione esiste se e solo se $\frac{g}{\omega^2 r} \leq 1$.

Posto $\lambda = \frac{\omega^2 r}{g} \geq 0$, si ha $\lambda = \frac{1}{\cos \theta_{3,4}}$. Possiamo ora discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio:

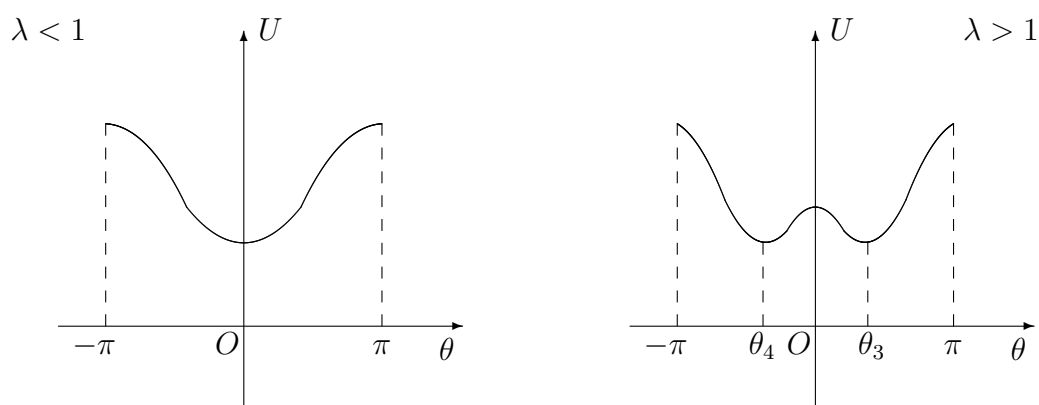
- θ_1 stabile se $\lambda \leq 1$, instabile se $\lambda > 1$;
- θ_2 sempre instabile;
- $\theta_{3,4}$ stabili quando esistono ($\lambda \geq 1$).

Nel piano (λ, θ) possiamo rappresentare le configurazioni di equilibrio in funzione del parametro λ , indicando con linea spessa i tratti corrispondenti a stabilità, con linea tratteggiata l'instabilità.



Per $0 \leq \lambda < 1$ si ha la soluzione $\theta = 0$ stabile, per $\lambda = 1$ si ha il punto critico, per $\lambda = \frac{1}{\cos \theta} > 1$ si hanno le soluzioni biforcate.

Si osservi che U ammette sempre almeno un minimo per ogni λ .



Il pendolo matematico

Un altro esempio dinamico di non unicità della soluzione per il problema a valori al contorno è il pendolo matematico. L'equazione del pendolo è:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0.$$

Considerando le condizioni iniziali: $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$, abbiamo un problema di Cauchy la cui unica soluzione è:

$$\theta = \theta(t, \theta_0, \dot{\theta}_0, \omega^2), \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Se nel nostro problema abbiamo invece le condizioni: $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = \theta_1$, il teorema fondamentale non può essere applicato. Poniamo $\theta(0) = 0$ e $\theta(1) = 0$, in tal caso abbiamo sicuramente la soluzione banale $\theta = 0 \forall t$, ovvero il pendolo è fermo. Esistono però altre soluzioni non banali. Si ponga:

$$\dot{\theta}(0) = b \in \mathbb{R},$$

allora il problema di Cauchy relativo ammette una e una sola soluzione del tipo $\theta = \theta(t, b, \omega^2)$. Ci chiediamo se in questa famiglia di soluzioni ne esiste una tale che $\theta(1) = 0$, cioè se esistono

$$\bar{b}(\omega^2) / \theta(1, \bar{b}, \omega^2) = 0 \text{ e } \theta = \theta(t, \bar{b}, \omega^2) \neq 0.$$

Se $\theta = \theta(1, \bar{b}, \omega^2) = 0$ si può ricavare $b = b(\omega^2)$ se vale il teorema della funzione implicita, ovvero

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial b} \right|_{t=1, \omega^2 = \bar{\omega}^2} \neq 0.$$

Per risolvere il nostro problema si usa un metodo detto *shooting method*, che non è altro che una versione adattata ai nostri problemi della teoria delle biforcazioni di Poincaré.

Come già visto, si osserva immediatamente che $\theta = 0 \forall t$ è soluzione e prende il nome di soluzione banale. Ora la procedura consiste nel linearizzare il problema nell'intorno della soluzione banale:

$$\theta = 0 + a\eta,$$

soluzione perturbata, con $\eta = \eta(T, \omega^2, a)$ e $a \in \mathbb{R}$. Sostituiamo nell'equazione:

$$a\ddot{\eta} + \omega^2 \sin(a\eta) = 0,$$

dividendo per a :

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \frac{\sin(a\eta)}{a} = 0.$$

Si calcola il limite per $a \rightarrow 0$ ottenendo così l'equazione ben nota linearizzata del pendolo:

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0 \quad (9.1)$$

e ora $\eta = \eta(t, \omega^2, 0)$. Studiamo quindi il problema linearizzato con le condizioni agli estremi $\eta(0) = 0$ e $\eta(1) = 0$. Questo problema ammette sicuramente la soluzione banale $\eta = 0 \forall T$, ma l'equazione (9.1) ammette anche l'integrale generale:

$$\eta = A \sin(\omega T + \alpha).$$

Imponendo ora le condizioni al contorno si ottiene: $0 = A \sin \alpha \Leftrightarrow \alpha = k\pi$ e $0 = A \sin(\omega + \alpha) \Leftrightarrow \omega = (n + k)\pi$.

Osserviamo che $k = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, $\omega = n\pi$ e $n \in \mathbb{Z}$. Si ha anche la soluzione $\eta = A \sin(n\pi t)$, che esiste $\Leftrightarrow \omega = n\pi$ cioè:

$$\frac{g}{l} = n^2 \pi^2 \Leftrightarrow l = \frac{g}{n^2 \pi^2},$$

quindi solo per particolari valori della lunghezza del pendolo.

Torniamo ora all'equazione non lineare:

$$\ddot{\eta} + \frac{\omega^2}{a} \sin(a\eta) = 0,$$

con le condizioni iniziali $\eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = b$, dove b è un parametro reale arbitrario; $\exists! \eta = \eta(t, a, b, \omega)$ (se $a \rightarrow 0$ si ricade nel problema linearizzato). Ma ci chiediamo se:

$$\exists b/\eta(1, a, b, \omega) = 0 \quad (9.2)$$

cioè tale che la soluzione del problema non lineare ai valori iniziali soddisfi la condizione al contorno $\eta(1) = 0$. La risposta è positiva se, in un opportuno intorno del punto (a, ω) , si può applicare il teorema della funzione implicita. Poiché per $\omega = n\pi$, cioè nel caso linearizzato, si è trovata la soluzione non banale $\eta = A \sin(n\pi t)$, cui corrisponde il valore $\dot{\eta}(0) = a\omega = An\pi$, ha senso ammettere come valori "critici" i valori $a = 0$ e $\omega = n\pi$. Se:

$$\left. \frac{\partial \eta(t, a, b, \omega)}{\partial b} \right|_{t=1, a=0, \omega=n\pi} \neq 0 \quad (9.3)$$

per il teorema della funzione implicita esiste un intorno I del punto $(0, n\pi)$ in cui dalla (9.2) si può ricavare in maniera univoca un valore $b = b_0(a, \omega)$. Se

ora si considera la funzione $\eta = \eta(t, a, b_0(a, \omega), \omega)$ questa è soluzione di (9.3) e soddisfa la (9.2). Al fine di valutare esplicitamente la derivata che compare in (9.3) si consideri l'equazione di partenza:

$$\ddot{\eta} + \frac{\omega^2}{a} \sin(a\eta) = 0.$$

La si derivi rispetto a b , ottenendo così:

$$\ddot{\eta}_b + \omega^2 \eta_b \cos(a\eta) = 0 \quad (9.4)$$

con $\eta_b = \frac{\partial \eta}{\partial b}$ e $\ddot{\eta}_b = \frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial b}$.

Poiché vogliamo vedere se $\eta_b \neq 0$ per $a = 0$ e $\omega = n\pi$, dapprima calcoliamo il limite:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \ddot{\eta}_b + \omega^2 \eta_b \cos(a\eta) = 0,$$

ottenendo:

$$\ddot{\eta}_{b,a=0} + \omega^2 \eta_{b,a=0} = 0 \quad (9.5)$$

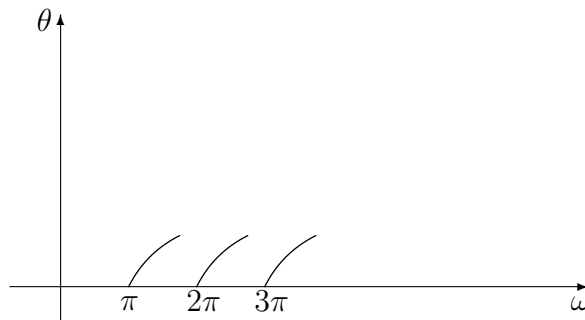
Osserviamo ora che, posto $\eta_b = y$, tale equazione diviene $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, che ammette soluzione non nulla:

$$y = A \cos(\omega T),$$

(poiché ancora deve essere $y(0) = 0$) e cioè:

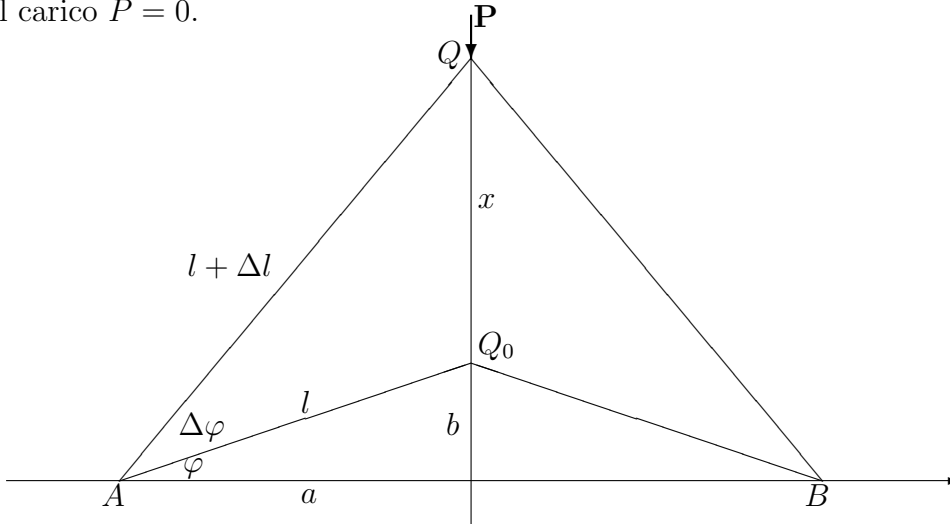
$$\eta_b = A \cos(\omega T).$$

In definitiva possiamo dunque dire che $\exists \theta = \theta(t, a, \omega) / \theta(0) = 0$, $\theta(1) = 0$ solo quando $\omega = n\pi$. Graficamente:



In tal caso $\theta = \theta(t, \bar{b}, \bar{\omega}) \neq 0$ è la soluzione che si biforca nel punto (b_0, ω_0) della soluzione banale $\theta = 0$.

Un altro esempio è dato dal seguente sistema: due molle elastiche di ugual costante k hanno un estremo in comune libero di muoversi e gli altri due estremi fissi, ma liberi di ruotare. Nel punto comune è applicata una forza \mathbf{P} ortogonale alla congiungente gli estremi fissi. Studiare la stabilità del sistema, supposta nota una configurazione di equilibrio Q_0 in corrispondenza al carico $P = 0$.



Sia $AQ_0 = l > a$, $AQ = l + \Delta l$. Le molle sono intese come reali molle, che offrono resistenza sia alla trazione che alla compressione, cioè:

$$\mathbf{u} = \frac{AQ}{|AQ|} \text{ versore, } \mathbf{F}_{el} = -k\Delta l \mathbf{u}.$$

L'equazione di moto, avendo assunto la configurazione di equilibrio Q_0 come configurazione di riferimento è:

$$m\ddot{x} = -P - 2k\Delta l \sin \theta, \text{ con } \theta = \phi + \Delta\phi.$$

Ma è:

$$\begin{aligned} \Delta l &= [a^2 + (b+x)^2]^{1/2} - l, \\ \sin \theta &= \frac{x+b}{[a^2 + (b+x)^2]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Posto $q_1 = \frac{1}{a}(x+b)$ e $l = ad$, si ottiene:

$$\ddot{q}_1 + \frac{1}{ma}P + \frac{2k}{m}q_1 - \frac{2kd}{m} \frac{q_1}{(1+q_1^2)^{1/2}} = 0$$

ovvero, con $\dot{q}_1 = q_2$, il sistema:

$$\dot{q}_1 = q_2; \quad \dot{q}_2 = -L - \alpha q_1 + \beta \frac{q_1}{(1+q_1^2)^{1/2}} = -j(q_1)$$

con $L = \frac{P}{ma} > 0$, $\alpha = \frac{2k}{m} > 0$, $\beta = \frac{2kd}{m} > 0$.

L'integrale dell'energia, che fornisce le caratteristiche nel piano delle fasi, è dato da:

$$\frac{1}{2}q_2^2 + V(q_1) = \frac{1}{2}q_2^2 + Lq_1 + \frac{1}{2}\alpha q_1^2 - \beta(1 + q_1^2)^{1/2} = E.$$

Il loro grafico è dato nelle figure, come anche il corrispondente grafico del potenziale $V(q_1)$, al variare del parametro P .

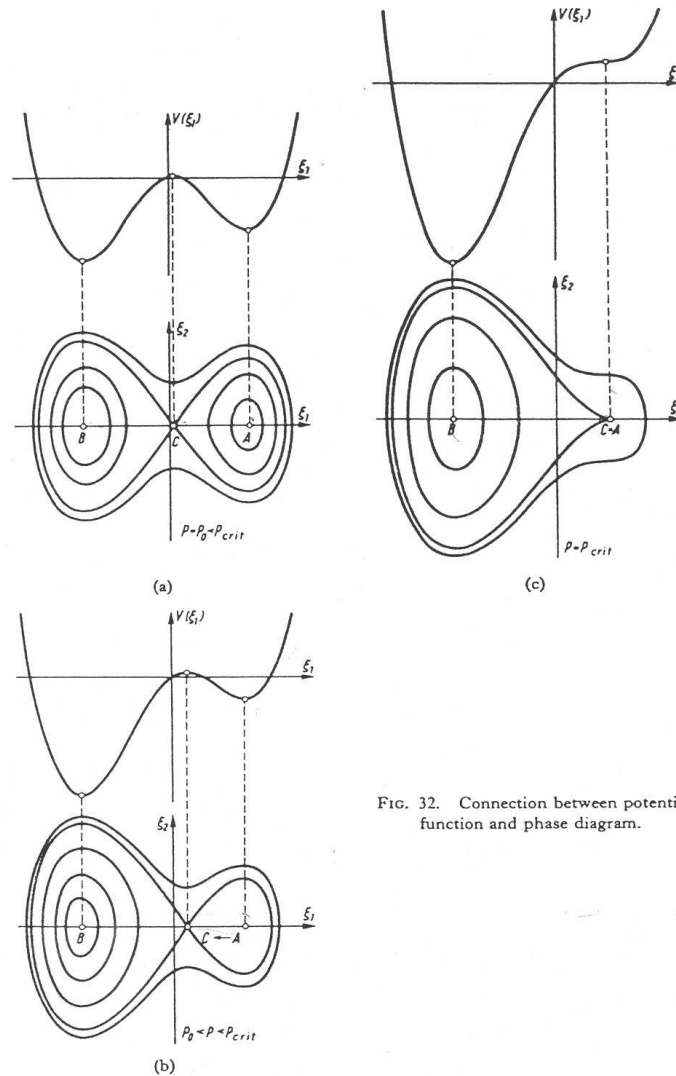


FIG. 32. Connection between potential function and phase diagram.

Come si vede, vi sono due posizioni di equilibrio A e B stabili ed una C instabile quando $P = P_0 < P_C$, essendo P_C il carico critico dato da (come si vedrà meglio in seguito)

$$P_C = 2k \left[1 - \left(\frac{a}{l} \right)^{2/3} \right]^{3/2}.$$

Al crescere di P , A e C tendono a sovrapporsi e si ha $A = C$ (instabile) per $P = P_C$. Per $P > P_C$ si ha la sola posizione B stabile. Si osservi che il valore critico P_C è quello per cui si annullano contemporaneamente le derivate prime e seconde del potenziale. Il potenziale di deformazione è:

$$V(q_1) = Lq_1 + \frac{1}{2}\alpha q_1^2 - \beta(1 + q_1^2)^{1/2} \text{ (energia potenziale).}$$

Le posizioni di equilibrio si hanno annullando la derivata prima:

$$V_1 = \frac{dV}{dq_1} = L + \alpha q_1 - \frac{\beta q_1}{(1 + q_1^2)^{1/2}} = 0,$$

da cui si ricava $q_1 = q_1(L)$, cioè la coordinata q_1 delle posizioni di equilibrio in funzione del carico $P = maL$, ovvero la sua inversa:

$$L = L(q_1) = -\alpha q_1 + \frac{\beta q_1}{(1 + q_1^2)^{1/2}}.$$

Si osservi che se non vi è carico si hanno le posizioni di equilibrio:

$$q_1 = 0, \quad q_1^\pm = \pm \frac{b}{a}$$

che corrispondono alla posizione orizzontale delle molle e a due posizioni simmetriche, per cui è:

$$\theta^\pm = \arctg q_1^\pm = \arctg\left(\pm \frac{b}{a}\right),$$

cioè Q_0 e la sua simmetrica rispetto alla retta AB .

La derivata seconda di V è:

$$V_{11} = \frac{d^2V}{dq_1^2} = \frac{\alpha(1 + q_1^2)^{3/2} - \beta}{(1 + q_1^2)^{3/2}}.$$

Le posizioni di equilibrio stabili sono quelle per cui l'energia potenziale ha un minimo, e cioè la sua derivata seconda è positiva, viceversa per quelle instabili.

È immediato verificare che nel caso $L = 0$, $q_1 = 0$ è instabile mentre $q_1^\pm = \pm \frac{b}{a}$ sono stabili. Si ha un caso critico per quei valori di L le cui corrispondenti posizioni di equilibrio annullano la derivata seconda V_{11} . Dal sistema:

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_{11} = 0 \end{cases}$$

si ricava:

$$q_1 = \left[\left(\frac{l}{a} \right)^{2/3} - 1 \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad L^C = \frac{1}{ma} P_C.$$

Si ricordi che è $\frac{\beta}{\alpha} = d = \frac{l}{a} > 1$.

Per cercare di analizzare il comportamento del sistema in corrispondenza a valori non troppo grandi del carico (ad esempio tra 0 e $|P_C + \epsilon| \ll 1$, $\epsilon > 0$), ovvero per valori di q_1 sufficientemente piccoli (il che, essendo $q_1 = \text{tg}\theta$, significa per posizioni non troppo angolate rispetto alla posizione orizzontale), si può pensare di usare un'approssimazione polinomiale del potenziale:

$$V = Lq_1 + \frac{1}{2}\alpha q_1^2 - \left[\beta + \frac{1}{2}\beta q_1^2 - \frac{1}{8}\beta q_1^4 + \dots \right]$$

Ne segue $V_1 \simeq \frac{1}{2}\beta q_1^3 + (\alpha - \beta)q_1 + L$ e $V_{11} \simeq \frac{3}{2}\beta q_1^2 + \alpha - \beta$.

Il legame tra il carico e le ordinate della configurazione di equilibrio è:

$$L = -\frac{1}{2}\beta q_1^3 + (\beta - \alpha)q_1.$$

In un piano rappresentativo (L, q_1) si tratta di una cubica che interseca l'asse $L = 0$ nei punti 0, $q_1^\pm = \pm \sqrt{2(1 - \frac{a}{l})}$ e che ha in $q_C^- = -\sqrt{\frac{2}{3}}(1 - \frac{a}{l})$ un minimo e in $q_C^+ = \sqrt{\frac{2}{3}}(1 - \frac{a}{l})$ un massimo. Si osservi che, secondo l'approssimazione usata è:

$$q_1^\pm = \pm \sqrt{2(1 - \cos \phi)} = \pm \sqrt{2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\phi^2 - \dots \right)} \simeq \pm \phi$$

e d'altro canto la corrispondente configurazione nel caso esatto era:

$$q_1^\pm = \pm \frac{b}{a} = \pm \text{tg}\phi \cong \pm \phi$$

cioè si ritrovano le stesse posizioni di equilibrio. Il segno della derivata seconda è positivo nella parte esterna all'intervallo delle radici:

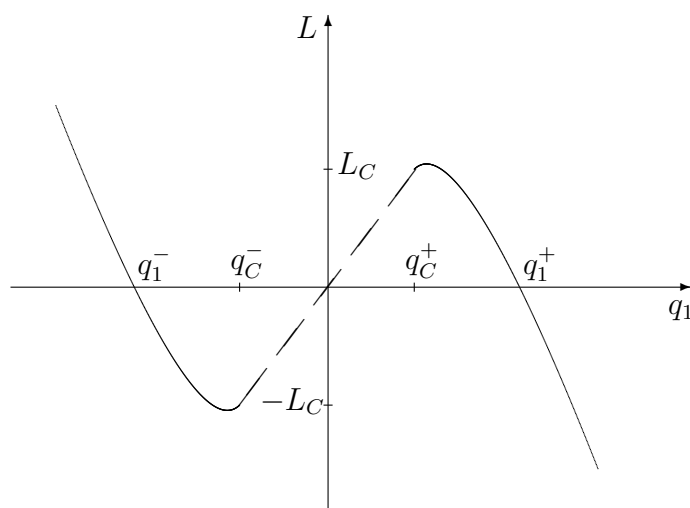
$$q_1 < q_C^-, \quad q_1 > q_C^+$$

dell'equazione $V_{11} = 0$, mentre è negativo all'interno di tale intervallo:

$$|q_1| < q_C^+$$

Dunque le posizioni di equilibrio per cui $q_1 < q_C^-$ o $q_1 > q_C^+$ sono stabili, instabili quelle per cui $q_C^- < q_1 < q_C^+$.

Poiché la derivata terza di V , $V_{111} = 3\beta q_1$ è diversa da zero in q_C^\pm , tali posizioni non sono minimi relativi di V e dunque sono instabili. Possiamo tracciare il seguente grafico di stabilità (la linea tratteggiata denota instabilità, quella continua stabilità):



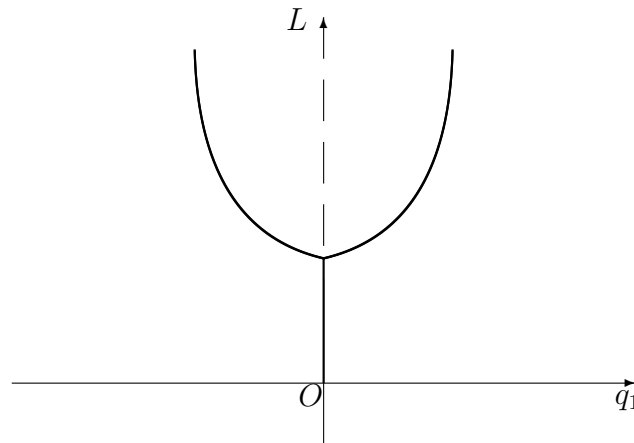
dove L_C è il valore critico di L , cui corrisponde il carico critico $P_C = maL_C$.

Possiamo ora leggere il grafico in termini di stabilità al variare del carico: si parte dalla configurazione q_1^+ , corrispondente a carico nullo, e si aumenta il carico. La variabile q_1 diminuisce e cioè diminuisce l'angolo θ ($q_1 = \text{tg}\theta$) finché raggiunto il valore L_C (e al crescere ulteriore di L), il sistema non può fare altro che “saltare” alla posizione di equilibrio $q_1 < q_1^-$ e quindi muoversi lungo il nuovo ramo. Se ora si inizia a diminuire L , le posizioni di equilibrio corrispondenti hanno angolo crescente (ma decrescente in modulo)

fino a raggiungere la posizione q_1^- , per $L = 0$. Cambiando segno al carico, la q_1 aumenta, al crescere di L in valore assoluto, fino al valore critico $-L_C$, dove si ha un salto alla posizione corrispondente sul ramo, per cui $q_1 > q_1^+$. In definitiva si ha un ciclo di isteresi attorno all'origine.

Questo tipo di punto critico prende il nome di *punto limite* e il fenomeno dinamico di salto (con vibrazioni) prende il nome di *snap-buckling*. Il ciclo di isteresi corrisponde al fatto che si ha dissipazione di energia proprio per i due salti dinamici. Se invece di rappresentare il sistema nel piano carico-coordinate (L, q_1) si usasse una rappresentazione nello spazio della funzione potenziale $V = V(L, q_1)$, si avrebbe una superficie, che presenta un comportamento caratteristico detto *catastrofe* in corrispondenza ai valori (L_C, q_1^C) , dove la superficie presenta una *piega*, corrispondente al punto limite. Il diagramma $L = L(q_1)$ si ottiene per proiezione sul piano (L, q_1) della curva che unisce i minimi ed i massimi delle curve sulla superficie corrispondenti ai diversi valori $L = cost.$.

In precedenza si era visto un altro caso di perdita di stabilità in cui il diagramma (L, q_1) era del tipo:

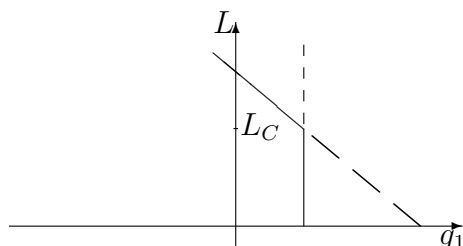


Si tratta di una *biforcazione stabile simmetrica* e il punto critico sulla superficie $V = V(L, q_1)$ prende il nome di *catastrofe a cuspid*.

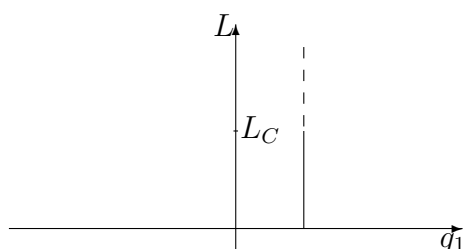
L'analisi nel piano (L, q_1) con un solo parametro da controllare, ed eventuali altri visti come secondari, è tipica della *teoria delle biforcazioni*, mentre lo studio delle superfici anche con un numero maggiore di parametri, più in generale delle singolarità delle varietà rappresentative di stati di equilibrio,

rientra nel punto di vista della *teoria delle catastrofi*, con particolare attenzione al concetto di stabilità strutturale. Altri tipi di biforcazione sono le seguenti:

- *biforcazione asimmetrica* (caso particolare della catastrofe a piega)



- *biforcazione simmetrica instabile* (catastrofe a cuspidi duale)



Nella tabella seguente sono elencate le 7 catastrofi elementari, in corrispondenza a 1, 2, 3, 4 parametri di controllo λ^i ; nella colonna di destra appare la corrispondente classificazione dal punto di vista della teoria delle biforcazioni.

$m = 1$	Fold	$q_1^3 + \lambda^1 q_1$	{ Limit point { Asymmetric { Stable-symmetric { Unstable-symmetric { Cut-off point
	Cusp	$q_1^4 + \lambda^2 q_1^2 + \lambda^1 q_1$	
	Swallowtail	$q_1^5 + \lambda^3 q_1^3 + \lambda^2 q_1^2 + \lambda^1 q_1$	
	Butterfly	$q_1^6 + \lambda^4 q_1^4 + \lambda^3 q_1^3 + \lambda^2 q_1^2 + \lambda^1 q_1$	
$m = 2$	Hyperbolic umbilic	$q_2^3 + q_1^3 + \lambda^1 q_2 q_1 - \lambda^2 q_2 - \lambda^3 q_1$	{ Monoclinal { Homeoclinal { Hill-top branch { Anticlinal
	Elliptic umbilic	$q_2^3 - 3q_2 q_1^2 + \lambda^1 (q_2^2 + q_1^2) - \lambda^2 q_2 - \lambda^3 q_1$	
	Parabolic umbilic	$q_2^2 q_1 + q_1^4 + \lambda^1 q_2^2 + \lambda^2 q_1^2 - \lambda^3 q_2 - \lambda^4 q_1$	

La corrispondente analisi secondo la teoria delle biforcazioni porta ad una classificazione più fine. Come si vede, vari tipi di biforcazioni si possono avere solo con un numero di parametri superiori a uno, ma la classificazione è fatta privilegiandone uno per avere le linee coordinate sulla superficie

$$V = V(q^\omega, L^\alpha).$$

Il problema della stabilità dell'equilibrio viene studiato allora analizzando il comportamento del sistema al variare del parametro (o dei parametri) di controllo. Si cerca di determinare i valori critici del parametro ed i relativi cambiamenti di stabilità o di comportamento in generale (e viene pur sempre utile l'analisi nel piano delle fasi). Quindi si analizza il comportamento in un intorno dei valori critici e l'andamento dei rami biforcati. Dal punto di vista analitico si ha un problema formale caratterizzato da un operatore non lineare:

$$F : X \times \Lambda \rightarrow Z,$$

essendo X, Λ e Z spazi di Banach (spazi lineari normati e completi), e si vuole studiare l'equazione

$$F(u, \lambda) = 0; \quad u \in X, \lambda \in \Lambda,$$

nell'ipotesi che $F(u_0, \bar{\lambda}) = 0$, cioè che $u = u_0$ e $\lambda = \bar{\lambda}$ rappresentino una soluzione dell'equazione data.

In particolare si vuole rispondere alle seguenti domande:

- l'equazione data ammette soluzione u per ogni valore λ , con $\|\lambda - \bar{\lambda}\|$ piccolo?
- Se la soluzione esiste, è unica e come dipende da λ la sua molteplicità? Esistono valori particolari (critici) λ_i di λ per cui una soluzione cessa di essere unica e si biforca?
- quali sono le proprietà delle soluzioni nell'intorno di λ_i (biforcazioni locali) o più in generale al variare di λ (biforcazioni globali)?

Si consideri per semplicità il caso in cui sia:

$$F(u, \lambda) = Du - f(u, \lambda, t)$$

Si consideri un operatore lineare D e l'equazione non lineare

$$Du = f(u, \lambda, t) \tag{9.6}$$

Sia $u_0 = u_0(\lambda, t)$ una soluzione nota del problema:

$$Du_0 = f(u_0, \lambda, t) \quad (9.7)$$

Si ponga ora:

$$u(a, \lambda, t) = u_0 + au_1(a, \lambda, t) \quad (9.8)$$

essendo a un numero reale qualunque. Si è, in altri termini, perturbata la soluzione u_0 e si vuole vedere se esistono una funzione u_1 e un valore a , eventualmente dipendente da λ , tali che $u = u_0 + au_1$ sia ancora una soluzione del problema, nell'intorno di possibili valori critici di λ . Ponendo (9.8) in (9.6) e tenuto conto di (9.7), per la linearità dell'operatore D , è:

$$Du_1(a, \lambda, t) = a^{-1}[f(au_1 + u_0, \lambda, t) - f(u_0, \lambda, t)].$$

Passando al limite per $a \rightarrow 0$, nell'ipotesi che f sia almeno C^1 , si ha:

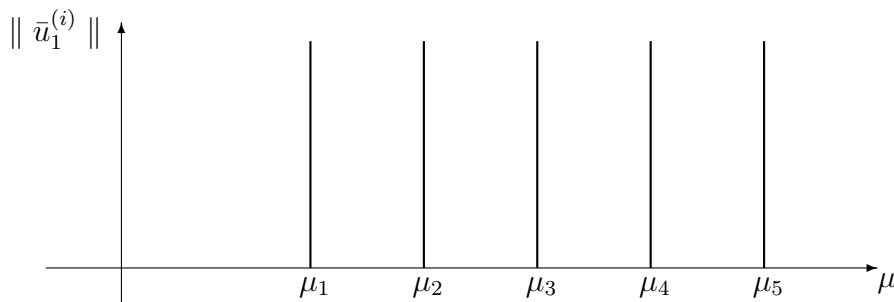
$$Du_1(0, \lambda, t) = f'(u_0, \lambda, t)u_1(0, \lambda, t),$$

essendo $f' = \frac{\partial f}{\partial u}$, ovvero, avendo posto $\mu(\lambda) = f'(u_0, \lambda, t)$:

$$Du_1^{(0)} = \mu(\lambda)u_1^{(0)} \quad \text{con } u_1^{(0)} = u_1(0, \lambda, t) \quad (9.9)$$

L'equazione (9.9) è la linearizzazione della (9.6) nell'intorno della soluzione u_0 . L'equazione (9.9) ammette sempre la soluzione banale $u_1^b = 0$ e in corrispondenza si trova la soluzione nota u_0 della (9.6).

Ci si chiede se esistono uno o più valori di λ per cui $u_1^{(0)} = u_1^{(0)}(\lambda, t) \neq 0$ sia ancora una soluzione di (9.9). Questo certo accade se λ è tale che $\mu(\lambda)$ sia un autovalore del problema (9.9), che potrà avere un numero discreto o continuo di autovalori μ_i e corrispondenti autofunzioni normalizzate: $\|u_1^{(i)}\| = 1$. Allora una soluzione del problema sarà: $\bar{u}_1^{(i)} = cu_1^{(i)}$ e $\|\bar{u}_1^{(i)}\| = c, \forall c \in \mathbf{R}^+$, mentre è $\|u_1^b\| = 0$. In grafico:



I punti $(\mu_i, 0)$ in questo diagramma rappresentano i punti di biforcazione del sistema linearizzato. Si torni ora al problema non lineare. Ci si chiede: esiste una coppia (a, μ) nell'intorno di $(0, \mu_i)$ tale che il problema:

$$Du_1 = a^{-1}[f(u_0 + au_1, \lambda, t) - f(u_0, \lambda, t)] \quad (9.10)$$

(più condizioni al contorno) ammetta una soluzione $u_1 = u_1(a, \lambda, t) \neq 0$ per cui

$$\lim_{a \rightarrow 0} u_1 = \bar{u}_1^{(i)}, \quad \text{e} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \mu = \mu_i$$

ovvero $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda = \lambda_i$?

Ciò è possibile se e solo se $\mu = \mu(\lambda)$ è biiettiva, per poter associare ad ogni μ_i uno ed un solo λ_i e viceversa.

Vale una proposizione generale sugli operatori non lineari.

Proprietà 9.1 *Condizione necessaria perchè λ_i sia un punto di biforcazione è che l'applicazione $F'_u(u, \lambda)$ calcolata in (u_0, λ_i) non sia invertibile e quindi non si possa ricavare in modo univoco $u = u(\lambda)$ nell'intorno di (u_0, λ_i) .*

Se $F(u, \lambda) = Du - \lambda u$, allora i punti di biforcazione (posto $u_0 = 0$) sono da cercarsi tra gli autovalori di D (come già visto), in quanto D coincide con il suo differenziale. Se D non fosse lineare, i punti di biforcazione andrebbero ricercati tra i punti dello spettro del differenziale di D nel punto (u_0, λ_i) .

Per meglio chiarire quanto detto conviene richiamare la definizione di differenziale (o derivata) di Frechet di un operatore tra spazi di Banach.

Definizione 9.1 *Un'applicazione $F : X \rightarrow Z$ è differenziabile in $u_0 \in X$ se esiste un operatore lineare D tale che:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \|u\| < \delta \Rightarrow \|F(u_0 + u) - F(u_0) - Du\| \leq \epsilon \|u\|.$$

Se D esiste, è unico; se F è lineare $F \equiv D$. D prende il nome di *derivata di Frechet*, o *variazione prima*, dell'operatore F nel punto u_0 e si indica anche con:

$$DF|_{u_0} = F'_u(u_0).$$

Si ricordi anche che un'applicazione F continua tra due spazi topologici X e Z viene detta *localmente invertibile* nel punto $u_0 \in X$ se esistono un intorno $U_{u_0} \subset X$ e uno $V_{z_0} \subset Z$, con $z_0 = F(u_0)$, omeomorfi fra loro.

Vale il seguente teorema.

Teorema 9.1 (Teorema di inversione locale)

Se F è di classe C^k e $F(u_0) = 0$ e $F'_u(u_0)$ è invertibile, allora F è localmente invertibile nell'intorno di u_0 (cioè da $F(u, \lambda) = 0$ si ricava $u = u(\lambda)$ univocamente).

Dimostrazione

Infatti, dalla definizione della derivata di Frechet e posto $F'_u(u_0) = A$, si ha:

$$F(u, \lambda) = F(u_0, \lambda) + F'_u(u_0, \lambda)(u - u_0) + R(u, \lambda) = A(u - u_0) + R(u, \lambda).$$

L'equazione data è allora:

$$A(u - u_0) = -R(u, \lambda)$$

e poichè A è invertibile, A^{-1} esiste ed è continua e limitata. Dunque si ha:

$$u = u_0 - A^{-1}R(u, \lambda),$$

formula che, posta nella forma iterativa:

$$u_{u+1} = u_0 - A^{-1}R(u_u, \lambda)$$

consente di determinare $u = u(\lambda)$, univocamente nell'intorno di u_0 .

□

Questo teorema ha come conseguenza il fatto che, per $\lambda \rightarrow \lambda_i$, $u \rightarrow u_0$, essendo u_0 la soluzione corrispondente al valore $\lambda = \lambda_i$, nell'intorno del valore (supposto critico) λ_i non si hanno biforcazioni, la soluzione $u = u(\lambda)$ è unica ed è il prolungamento della u_0 nell'intorno di λ_i . Dunque si ha la possibilità di biforcazioni se l'operatore A non è invertibile, cioè non ammette un inverso limitato.

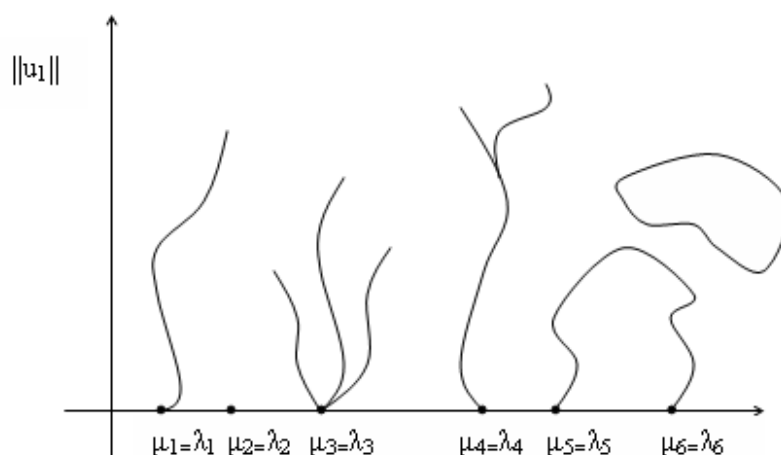
Se $F(u, \lambda) = Du - \lambda u$, è: $A = F'_u |_{\lambda=\lambda_0} = D - \lambda_0$ (D operatore lineare), ed allora, per la non invertibilità di A , l'equazione $Au = 0$ può ammettere soluzioni non nulle. In altri termini l'equazione:

$$Du = \lambda_0 u$$

può ammettere soluzioni non nulle, ma questo è possibile se e solo se λ_0 è un autovalore e u la corrispondente autofunzione. Analogamente se D non fosse lineare, si cercherebbero i punti di biforcazione tra i punti dello spettro della derivata di D . In definitiva, data l'equazione $F(u, \lambda) = 0$, se

questa può essere linearizzata nella forma $Du = \lambda u$, allora i possibili punti di biforcazione vanno ricercati tra gli autovalori dell'operatore linearizzato.

Se si è nella situazione di pag. 168 per l'equazione linearizzata, un diagramma corrispondente nel caso non lineare può presentare diversi casi:



Si possono avere biforcazioni semplici (μ_1), nessuna biforcazione (μ_2), molteplicità di soluzioni biforcate (μ_3), biforcazioni secondarie (μ_4), cicli disgiunti e rami congiungenti due punti (μ_5 e μ_6).

Se D è lineare e lo spettro è continuo, i punti di biforcazione sono i punti di accumulazione dello spettro (e quindi potrebbero anche non appartenere allo spettro). Se l'operatore è del tipo:

$$Du + \lambda u + R(u, \lambda) = 0$$

con R infinitesima per $\|u\| \rightarrow \|u_0\|$, allora i punti di biforcazione sono gli *autovalori di molteplicità dispari* dell'operatore lineare D .

Tornando, dunque, all'operatore

$$F(u, \lambda) = Du - f(u, \lambda, t)$$

con D lineare e f tale che $\exists \mu(\lambda) = f'_u(u_0, \lambda, t)$, si ha, come conseguenza di quanto detto, che gli autovalori λ_i , trovati in precedenza per la linearizzazione (9.9), sono possibili punti di biforcazione per il problema non lineare.

Si tratta, dunque, di considerare uno di tali autovalori e di studiare il comportamento dell'operatore nell'intorno di tale valore, o meglio, nell'intorno del punto $(\|u_0\|, \lambda_0)$. In tal caso, bisogna porre "bene" il problema, cioè assegnare sia l'operatore che le condizioni al contorno. Per semplicità di discussione ci poniamo nel caso più semplice, in cui sia:

$$D = \frac{\partial}{\partial t}; \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n; \quad \tilde{f} \in \mathbb{R}^n$$

in modo che l'equazione funzionale diventi il sistema differenziale ordinario:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \tilde{f}(\tilde{u}, t, \lambda) \Leftrightarrow \dot{u}_i = f_i(u_k, t, \lambda)$$

al quale associamo l'insieme di condizioni iniziali e al contorno:

$$B[u(t), \lambda] = 0.$$

Se si assegnassero n condizioni iniziali $u_i(t = 0, \lambda) = u_i(0)$, supposta \tilde{f} Lipschitziana, il problema sarebbe un problema di Cauchy ed avrebbe, in un opportuno intorno dei valori iniziali e di $t = 0$, una e una sola soluzione. Perciò si suppone che B rappresenti parte condizioni iniziali e parte condizioni al contorno, in modo che l'unicità non sia garantita.

L'operatore $\frac{\partial}{\partial t}$ è lineare, pertanto l'equazione linearizzata è del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu(\lambda)\tilde{u} \Leftrightarrow \frac{\partial u^i}{\partial t} = \mu_i^j(\lambda)u_j \quad (9.11)$$

con l'ipotesi:

$$\mu_i^j = \frac{\partial f_i}{\partial u^j}(u_0, \lambda, t) = \mu_i^j(\lambda).$$

Osservazione

L'equazione (9.11) ha come soluzione generale:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i e^{m_i t} \tilde{\Psi}_i$$

essendo m_i gli autovalori della matrice (μ_i^j) , cioè le radici dell'equazione:

$$\det(\mu_i^j - m\delta_i^j) = 0$$

e $\tilde{\Psi}_i$ una base di relativi autovettori, a_i costanti o polinomi in t . Si deve porre molta attenzione a non confondere gli autovalori dell'operatore D . I

coefficienti a_i vengono determinati sulla base delle condizioni iniziali e al contorno. Come già visto, l'equazione (9.11) ammette soluzioni banali $\tilde{u} = 0$, corrispondente a valori a_i tutti nulli e quindi a condizioni

$$B(\tilde{u}, \lambda) = \tilde{u}(0) = 0.$$

Con condizioni miste, l'equazione (9.11) ammetterà soluzioni non nulle, in corrispondenza ad autovalori dell'operatore $(\frac{\partial}{\partial t} - \mu)$.

Esercizio 9.1

Ad esempio sia:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = -\lambda^2 u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{u}_t = \mu(\lambda)\tilde{u}$$

con $(\mu_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 0 \end{pmatrix}$ con le condizioni al contorno:

$$u_1(0) = 0 \quad u_1(1) = 0 \quad t \in [0, 1].$$

Tale sistema ammette certo la soluzione $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = 0$ che soddisfano le condizioni al contorno. La soluzione generale è:

$$\tilde{u} = [u_1, u_2] = ae^{i\lambda t}\tilde{\Psi}_1 + be^{-i\lambda t}\tilde{\Psi}_2.$$

Infatti la matrice (μ_{ij}) ha come autovalori m_α , $\alpha = 1, 2$, proprio $\pm i\lambda$:

$$\det(\mu_{ij} - m\delta_{ij}) = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm i\lambda.$$

Gli autovettori si determinano imponendo:

$$\mu\tilde{\Psi}_\alpha = m_\alpha\Psi_\alpha \Rightarrow \mu\tilde{\Psi}_1 = i\lambda\tilde{\Psi}_1 \text{ e } \mu\tilde{\Psi}_2 = -i\lambda\tilde{\Psi}_2$$

ovvero, essendo nella base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ in cui:

$$\tilde{u} = u_1\tilde{e}_1 + u_2\tilde{e}_2$$

$$\tilde{\Psi}_1 = \Psi_{11}\tilde{e}_1 + \Psi_{12}\tilde{e}_2$$

$$\tilde{\Psi}_2 = \Psi_{21}\tilde{e}_1 + \Psi_{22}\tilde{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \end{pmatrix} = i\lambda \begin{pmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{21} \\ \Psi_{22} \end{pmatrix} = -i\lambda \begin{pmatrix} \Psi_{21} \\ \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

da cui si ricava, avendo posto $\Psi_{11} = 1$ e $\Psi_{21} = 1$ (come lecito, dato che i due sistemi $(\mu_{ij} \pm i\lambda\delta_{ij})\Psi_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$, sono omogenei e quindi ammettono ∞^1 soluzioni ciascuno):

$$\tilde{\Psi}_1 = \tilde{e}_1 + i\lambda\tilde{e}_2, \quad \tilde{\Psi}_2 = \tilde{e}_1 - i\lambda\tilde{e}_2$$

e dunque:

$$\begin{cases} u_1 = a(\cos \lambda t + i \sin \lambda t) + b(\cos \lambda t - i \sin \lambda t) \\ u_2 = \dot{u}_1 = a\lambda(-\sin \lambda t + i \cos \lambda t) - b\lambda(\sin \lambda t + i \cos \lambda t) \end{cases}$$

In altri termini è

$$u_1 = ae^{i\lambda t} + be^{-i\lambda t},$$

ma ogni combinazione di soluzioni particolari è ancora soluzione del sistema, e quindi anche:

$$\frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2} \text{ e } \frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i}$$

e cioè $\cos \lambda t$ e $\sin \lambda t$, perciò una soluzione generale si potrà scrivere come:

$$u_1 = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t$$

e analogamente per $u_2 = \dot{u}_1$.

La soluzione u_1 soddisfa le condizioni al contorno poste, se $A = B = 0$, ed allora si cade nella soluzione banale $u = 0$, oppure se $A = 0$ e $\lambda = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (infatti in tal caso $u_1(0) = 0$ e $u_1(1) = B \sin(n\pi) = 0$). Dunque $\lambda_n = n\pi$ rappresenta gli autovalori dell'operatore e le autofunzioni sono date da $u_1 = B \sin(n\pi t)$ (essendo B una costante arbitraria, come sempre accade in questi casi) e $u_2 = n\pi B \cos(n\pi t) \Rightarrow B = \frac{u_2(0)}{n\pi}$.

Si osservi ancora che il sistema differenziale dato è analogo all'equazione del moto armonico:

$$\ddot{u}_1 + \lambda^2 u_1 = 0$$

la cui soluzione è ben nota ed è già stata discussa anche dal punto di vista della stabilità. L'equazione del moto armonico è la linearizzazione dell'equazione del pendolo:

$$\ddot{u}_1 + \lambda^2 \sin u_1 = 0,$$

come il sistema corrispondente è la linearizzazione del sistema:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = -\lambda \sin u_1 \end{cases}$$

Il problema si può anche porre così: si consideri il problema di Cauchy associato al nostro problema al contorno:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = -\lambda u_1 \end{cases}$$

con $u_1(0) = 0$ e $u_2(0) = \alpha$.

La soluzione, unica, dipenderà da α . È possibile trovare un valore α tale che sia soddisfatta la condizione al contorno $u_1(1) = 0$? Sì $\Leftrightarrow \lambda = n\pi$ ed in tal caso sarà $B = \frac{\alpha}{n\pi}$, cioè $u_2(0) = Bn\pi$.

I punti di biforcazione per questo sistema saranno allora da ricercarsi tra i valori $\lambda_u = n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Tornando al problema più generale, costituito dal sistema differenziale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(\tilde{u}, \lambda, t) \quad (9.12)$$

con le condizioni miste:

$$B[\tilde{u}(t), \lambda] = 0 \quad (9.13)$$

vediamo se esiste un valore λ_0 per cui, detta $\tilde{u}(T, \lambda_0) = u_0(t)$ la soluzione corrispondente, sia $(\| u_0 \|, \lambda_0)$ un punto di biforcazione. Si ponga perciò $\tilde{u}_0(t=0) = \tilde{a}_0$ e $\tilde{u}(t=0, \lambda) = \tilde{a}$ si può risolvere il problema di Cauchy con valori iniziali \tilde{a} , e la soluzione (unica) sarà:

$$\tilde{u} = \tilde{u}(t, \lambda, a)$$

tale che $\tilde{u}(t=0, \lambda, a) = \tilde{a}$. Tale soluzione deve però soddisfare anche le condizioni al contorno, o, in generale:

$$B[\tilde{u}(t, \lambda, a), \lambda] = b(a, \lambda) = 0 \quad (9.14)$$

Se esiste (λ, a) che soddisfi $b = 0$, allora $\tilde{u}(t, \lambda, a)$ è una soluzione del problema e viceversa.

Se nell'intorno di un punto (λ_0, a_0) , la $b = 0$ ha più di una soluzione: $a = a(\lambda)$, tale che $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} a = a_0$, si ha almeno una soluzione che si biforca da $u_0(t)$ e λ_0 prende il nome di *valore critico* di λ . Ogni soluzione sarà allora data da:

$$\tilde{u}(t, \lambda) = \tilde{u}[t, \lambda, a(\lambda)].$$

Dunque a ogni soluzione distinta $a = a(\lambda)$ di $b(a, \lambda) = 0$ ammette una sola soluzione, allora si ha una e una sola soluzione:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0(t)$$

cioè u_0 è l'unica soluzione del problema. L'equazione (9.14) prende il nome di *equazione di biforcazione*.

La condizione affinché la soluzione sia unica è data dal teorema della funzione implicita:

$$\det\left(\frac{\partial b(a, \lambda)}{\partial a}\right)_{(a_0, \lambda_0)} \neq 0$$

e se b e $\frac{\partial b}{\partial a} \in C^1$ nell'intorno di (a_0, λ_0) , la soluzione di (9.14) è unica, $\tilde{u}_0(t)$ può essere prolungata univocamente al variare di λ intorno a λ_0 , cioè

$$\exists! \tilde{u}(t, \lambda) \in C^1 / \tilde{u}(t, \lambda_0) = \tilde{u}_0(t).$$

Dunque si può avere biforcazione se vale il seguente **criterio di biforcazione**:

$$\det\left(\frac{\partial b(a, \lambda)}{\partial a}\right)_{(a_0, \lambda_0)} = 0.$$

Soddisfatta questa condizione, occorre procedere a verificare se effettivamente esistono soluzioni multiple oppure no di (9.12), (9.13). Un modo per condurre l'analisi è di tipo perturbativo, già visto in un caso semplice.

E, ancora, ci poniamo in un caso semplice: sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u = u(t)$ e sia il problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, t, \lambda) \\ u^{(h)}(0) = 0 \\ u^{(k)}(1) = 0 \end{cases}$$

$t \in [0, 1]$, dove con $u^{(h)}$ e $u^{(k)}$ si intendono le h, k componenti di \tilde{u} , e $h, k < n$, $h + k \leq n$. Si consideri la soluzione banale $u_0 = u(t, \lambda_0)$, come già visto, e la perturbazione:

$$u = u_0 + au_1(t, \lambda, a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Il problema linearizzato è:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu(\lambda)u_1 \\ u_1^h(0) = 0 \\ u_1^k(1) = 0 \end{cases}$$

ed ammetterà una soluzione non nulla

$$u_1 = u_1(t, \lambda_0),$$

in corrispondenza dunque alla coppia $(a = 0, \lambda = \lambda_0)$. Il problema perturbato non lineare è

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} = \frac{1}{a} [j(u_0 + au_1) - j(u_0)]$$

che, per la condizione iniziale, $u_1^{(h)}(0) = 0$, $u_1^{(n-h)}(0) = b$, $b = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-h}\}$, ammetterà la soluzione unica $u_1 = u_1(t, \lambda, a, b)$.

Se $a = 0$, $\lambda = \lambda_0$ si ricade nella soluzione banale u_0 . Ci si chiede se esistono dei valori di b : $b = \bar{b}$, e se si riesca a determinare in conseguenza un intorno di $(0, \lambda_0)$ tali che la soluzione del problema a valori iniziali $u_1 = u_1(t, \lambda, a, b)$ soddisfi la condizione all'estremo: $u_1^h(1, \lambda, a, \bar{b}) = 0$ per qualche valore di h . In altri termini, se questa equazione è risolvibile e consente di determinare $a = a(\lambda) \neq 0$, per $b = \bar{b}$, tale che a tende a zero $\Leftrightarrow \lambda \rightarrow \lambda_0$, si ha una soluzione diversa da quella banale nell'intorno di $(0, \lambda_0)$:

$$u = u_0 + au_1$$

cioè si ha biforcazione. Ciò accade se, nell'ipotesi che $h = 1, k = 2, \dots, n$, $\frac{\partial u_1^1}{\partial a} \Big|_{a=0, \lambda=\lambda_0, b=\bar{b}} \neq 0$ e cioè si può applicare il teorema della funzione implicita. Occorre però verificare che per $\lambda \neq \lambda_0 \Rightarrow a \neq 0$.

Per questo si sviluppi (nell'ipotesi che $a(\lambda) \in C^1$):

$$a = a(\lambda) = a(\lambda_0) + a'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + O(\lambda - \lambda_0)^2.$$

È $a(\lambda_0) = 0$ e $a'(\lambda_0) = - \frac{(\partial u_1 \partial \lambda)}{(\partial u_1 / \partial a)} \Big|_{a=0, \lambda=\lambda_0, b=\bar{b}}$, quindi se

$$\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \Big|_{(0, \lambda_0), b=\bar{b}} \neq 0 \Rightarrow a(\lambda) \neq 0 \text{ per } \lambda \neq \lambda_0.$$

Se sono allora soddisfatte queste condizioni il problema dato ammette soluzioni:

$$u = u_0 \text{ e } u = u_0 + au_1[t, \lambda, a(\lambda)]$$

che si biforcano in corrispondenza a $a = 0$, $\lambda = \lambda_0$. Può accadere che la condizione $u_1(1, \lambda, a) = 0$ non soddisfi il teorema della funzione implicita, non perchè sia risolvibile, ma perchè la soluzione $a = a(\lambda)$ non è unica. In

tal caso si ha ancora biforcazione in λ_0 , ma di tipo multiplo e l'analisi è più complicata.

Teoria delle biforcazioni

Finora, abbiamo trattato solo quelle perturbazioni causate da variazioni delle condizioni iniziali associate al problema di Cauchy. Infatti le diverse traiettorie nel piano delle fasi sono le soluzioni del problema differenziale dato, corrispondente a diversi valori delle condizioni iniziali. Poiché il sistema differenziale contiene normalmente uno o più parametri, legati alla struttura interna del sistema, studieremo ora come una variazione di tali parametri possa influenzare l'andamento delle soluzioni, sia nel piano delle fasi, che in altri eventuali spazi rappresentativi. Consideriamo dunque un sistema espresso nella forma

$$\dot{x} = f(\mu, x), \quad \mu \in \mathbb{R}; \quad (9.15)$$

se il sistema è lineare possiamo usare la relazione di equivalenza topologica per assicurare la stabilità strutturale. Infatti l'insieme di tutti i sistemi lineari di \mathbb{R}^2 ammette una topologia naturale, in quanto può essere definita da una matrice ed a sua volta una matrice si può sempre interpretare come un elemento di $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Se il sistema invece non è lineare, la topologia è più complicata. Sia

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

e supponiamo che sia

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

posto $n = 1$, consideriamo l'insieme

$$W(f, k, \epsilon) = \{g : |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)| < \epsilon, \forall x \in k, \forall r = 0, 1, 2, \dots\}$$

dove k è un compatto ed ϵ definisce l'intorno da considerare.

Facendo variare ϵ si definisce una famiglia di insiemi che rappresentano intorni di f . La topologia ottenuta in questo modo è nota come “**topologia di Whitney**”. Consideriamo ora l'applicazione:

$$\mu \rightarrow f(\mu, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n); \quad (9.16)$$

se questa applicazione è continua, facendo variare μ nell'intorno di μ_0 , che rappresenta il valore di riferimento del parametro, si ottiene una curva,

le cui proprietà permettono di individuare punti di biforcazione usando le definizioni che seguono. Se il valore di μ_0 è tale che:

$$\exists \delta > 0, \forall \mu_1, \mu_2 \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta) / \dot{x} = f(\mu_1, x) \cong \dot{x} = f(\mu_2, x)$$

allora μ_0 si dice *ordinario*. Se invece il valore di μ_0 è tale che:

$$\forall \delta > 0, \exists \mu_1, \mu_2 \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta) / \dot{x} = f(\mu_1, x) \not\cong f(\mu_2, x)$$

allora si dice che c'è una *biforcazione*. Per questi valori critici il parametro μ_0 è detto *punto di biforcazione*. In altre parole, si ha una biforcazione o ramificazione quando, al variare di μ nell'intorno di μ_0 , determinate singolarità cambiano di stabilità (ed è importante notare che questa definizione di biforcazione è valida sia nel caso locale che in quello globale).

Consideriamo il sistema lineare in \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + \mu y \end{cases} \quad (9.17)$$

dipendente dal parametro reale μ . La situazione dell'unico punto di equilibrio ($x = y = 0$) dal punto di vista della stabilità cambia al variare di μ . Più esattamente, si ha che:

- per $\mu < 0$ l'origine è asintoticamente stabile;
- per $\mu = 0$ l'origine è stabile (non asintoticamente);
- per $\mu > 0$ l'origine è instabile.

Quando μ , variando con continuità, attraversa l'origine, si ha un cambiamento improvviso e radicale nelle proprietà qualitative del sistema e si dice che per $\mu = 0$ il sistema presenta una *biforcazione*.

Per visualizzare la biforcazione di (9.17), si può considerare equivalentemente il flusso di \mathbb{R}^3 del sistema (non lineare):

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + \mu y \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \quad (9.18)$$

Talvolta, per effetto di eventuali termini non lineari, nel passaggio del parametro attraverso il *valore critico* μ_0 , si può verificare, oltre al cambiamento

di stabilità, anche la formazione di nuovi punti di equilibrio. Si consideri ad esempio l'equazione scalare

$$\dot{x} = \mu x - x^3.$$

Vi è quindi un unico punto di equilibrio (stabile) per $\mu \leq 0$, mentre si hanno tre punti di equilibrio per $\mu \geq 0$: l'origine esibisce il cambio di stabilità, mentre gli altri due punti, che sono invece stabili, nascono per biforcazione al valore critico $\mu = 0$ ed "ereditano" quelle proprietà di stabilità possedute dall'origine per $\mu < 0$. Si noti che il termine biforcazione, in origine, stava ad indicare proprio una situazione di questo tipo.

Nel piano (μ, x) , il punto $(0,0)$ si dirà un **punto di biforcazione** e le quattro curve, descritte dalle equazioni

$$\{x = 0, \mu < 0\}, \quad \{x = 0, \mu > 0\}, \quad \{x > 0, x^2 = \mu\}, \quad \{x < 0, x^2 = \mu\}$$

si dicono *rami di biforcazione*.

Cerchiamo ora di formalizzare queste idee. Sia

$$(S_\mu) : \quad \dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m \quad (9.19)$$

un sistema di equazioni differenziali ordinarie dipendente dal parametro μ . Supponiamo che, per un certo μ_0 , si abbia un equilibrio nell'origine, cioè

$$f(0, \mu_0) = 0.$$

Se $(D_x f)(0, \mu_0)$ è non singolare, per il teorema della funzione implicita esiste una funzione $x = \varphi(\mu)$ tale che $f(\varphi(\mu), \mu) = 0$ in un intorno di μ_0 . Inoltre:

$$\varphi(\mu_0) = 0.$$

Si ha cioè un unico punto di equilibrio.

Dire che $(D_x f)(0, \mu_0)$ è non singolare è lo stesso che dire che (S_{μ_0}) è semplice. Se è anche iperbolico, non vi sono nemmeno cambiamenti qualitativi.

Teorema 9.2 *Sia $f \in \mathbb{R}^n$ singolarità iperbolica per (S_{μ_0}) . Allora esiste un intorno di μ_0 nel quale ogni μ è tale che i due sistemi*

$$\dot{x} = f(x, \mu_0) \quad \text{e} \quad \dot{x} = f(x, \mu)$$

sono topologicamente equivalenti.

Se invece $(D_x f)(0, \mu_0)$ è singolare (cioè, se ammette almeno un autovalore nullo) può presentarsi il fenomeno della biforcazione descritto sopra e, in ogni intorno di μ_0 , possono trovarsi valori di μ , che chiameremo μ_1, μ_2 , per i quali i due sistemi

$$\dot{x} = f(x, \mu_1) \quad e \quad \dot{x} = f(x, \mu_2)$$

non sono topologicamente equivalenti. In tal caso, si dice che μ_0 è un “valore critico” o un “punto di biforcazione”.

Dimostrazione:

Se $|\mu - \mu_0|$ è sufficientemente piccolo, il segno degli autovalori di $(D_x f)(0, \mu_0)$ non cambia passando da μ a μ_0 , ciò implica che i due sistemi linearizzati presentano la stessa inerzia. Per il teorema di Hartman, i due sistemi sono coniugati con i loro linearizzati, ed i loro linearizzati, avendo la stessa inerzia, sono tra loro topologicamente equivalenti.

□

Il teorema è falso per i sistemi semplici non iperbolici (cioè quando il determinante di $(D_x f)(0, \mu_0) \neq 0$, ma vi sono autovalori con parte reale nulla). Un esempio è dato dal sistema (9.17), nel quale, però, si possono trovare altri tipi di biforcazione, che vedremo in seguito.

Biforcazioni unidimensionali

Descriviamo adesso i tipi di biforcazione tipici del caso unidimensionale, occorrenti quando la condizione

$$\det(D_x f)(0, \mu_0) \neq 0$$

è violata. Le biforcazioni più comuni sono:

1. sella-nodo quando $\dot{x} = \mu - x^2$;
2. transcritica quando $\dot{x} = \mu x - x^2$;
3. forcone quando $\dot{x} = \mu x - x^3$.

1) **Sella-nodo**

È rappresentata dall'equazione $\dot{x} = \mu - x^2$. Si può notare che se $\mu < 0$ non vi sono punti singolari, ed è quindi possibile controllare il flusso localmente in ogni punto. Per $\mu = 0$ si ha un punto singolare per $x = 0$.

Si noterà che, come richiesto, $\det(D_x f)(0, \mu_0) = 0$. Per $\mu > 0$ i punti singolari sono due, $x = \pm\sqrt{\mu}$. Linearizzando, si ha che

$$(D_x f)(\sqrt{\mu}, \mu) = -2\sqrt{\mu} < 0$$

e

$$(D_x f)(-\sqrt{\mu}, \mu) = 2\sqrt{\mu} > 0.$$

Il primo punto è dunque stabile, il secondo instabile.

Si noti che il punto singolare non semplice $x = 0$, (per $\mu > 0$) ha dato origine a due singularità iperboliche.

2) **Transcritica**

È rappresentata dall'equazione $\dot{x} = \mu x - x^2$. Per ogni valore di μ , i punti singolari sono due:

$$x = 0 \quad x = \mu.$$

Si noti che il secondo è negativo per $\mu < 0$ e positivo per $\mu > 0$; in altre parole, nell'attraversamento del valore critico $\mu = 0$, i due punti di equilibrio si scambiano di posizione. Linearizzando, si vede che $\mu = 0$ è un punto di equilibrio iperbolico per ogni $\mu \neq 0$ (stabile per $\mu < 0$, instabile per $\mu > 0$). Invece per $\mu \neq 0$ si ha

$$(D_x f)(\mu, \mu) = -\mu.$$

Il secondo punto di equilibrio ha quindi caratteristiche opposte (si noti anche che, in questo caso, i punti di equilibrio "biforcanti" sono iperboliche).

3) **Forcone**

Biforcazione corrispondente all'equazione $\dot{x} = \mu x - x^3$. Si noterà che anche in questo caso i punti di equilibrio, nei quali si verifica la biforcazione, sono iperboliche. Invertendo il segno del parametro, si può fare in modo che i rami di biforcazione si trovino a sinistra. Si dice che la biforcazione è *transcritica* quando compaiono nuovi equilibri per $\mu > 0$, altrimenti, prende il nome di *subcritica*.

I tre tipi di biforcazione appena visti sono facili da descrivere, ed inoltre si può dimostrare che, se certe opportune condizioni di non degenerazione sono verificate, è possibile ricondursi ad essi (applicando il teorema della varietà centrale) quando il parametro μ è scalare e $(D_x f)(0, \mu_0)$ presenta un unico autovalore nullo semplice (e tutti gli altri autovalori avranno $Re \neq 0$).

Esempio 9.1

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Biforcazioni bidimensionali

Un tipo di biforcazione bidimensionale non riconducibile alla dimensione uno è la *biforcazione di Hopf*, rappresentata dal sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Si noti che $\forall \mu$,

$$(D_x f)(x, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $(\mu \pm i)$.

Siamo quindi in un caso semplice ma non iperbolico. L'equilibrio è unico per ogni μ (ed è dato da $x = y = 0$), ma cambia la sua stabilità quando attraversa il valore critico $\mu_0 = 0$. Si verifica facilmente che, per $\mu > 0$, le funzioni periodiche

$$x = \sqrt{\mu} \cos t \text{ e } y = \sqrt{\mu} \sin t$$

risolvono il sistema. Si ha dunque un *ciclo* appoggiato ad una circonferenza di raggio $\sqrt{\mu}$ e di centro l'origine.

Nello spazio (x, y) , l'unione dei cicli costituisce un paraboloido di equazione $\mu = x^2 + y^2$. La biforcazione di Hopf interviene genericamente (previa riduzione a varietà centrale) in ogni sistema (S_μ) la cui parte lineare presenta per $\mu = \mu_0$ un'unica coppia di autovalori semplici puramente immaginari, mentre tutti gli altri hanno parte reale diversa da zero. Si noti che la proprietà dell'origine di essere stabile per $\mu < 0$ è "ereditata" dal ciclo ed anche in questo caso, se il ciclo compare per $\mu > 0$, si parla di biforcazione supercritica.

Capitolo 10

Continui unidimensionali

Un continuo unidimensionale (verga, trave, sbarra, colonna, filo, “elastico”, ecc.) è un modello matematico atto a descrivere deformazioni di corpi tridimensionali in cui sia possibile privilegiare una curva e una famiglia di sezioni a tale curva, in modo che la lunghezza della curva sia molto maggiore rispetto alle dimensioni delle sezioni. Si passa così dalla descrizione di un corpo tridimensionale a quella di un corpo unidimensionale, schematizzato nella curva privilegiata, che rappresenta l'intero corpo. Occorre però precisare meglio il modello e vedere quali ulteriori posizioni occorra fare e quali grandezze occorra introdurre, affinché questa descrizione ad una dimensione dia conto delle effettive deformazioni che il corpo tridimensionale originale può subire.

Si consideri allora la curva prima introdotta come una curva materiale Λ di equazione parametrica:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t), \quad s \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

e si ponga

$$\mathbf{r}'_s = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}.$$

Se Λ rappresenta la configurazione attuale del corpo (e presuppone dunque l'esistenza di un corpo unidimensionale \mathcal{C} di cui Λ è l'immagine in E_3), ha senso introdurre una configurazione di riferimento Λ_0 di equazione

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(S), \quad S \subseteq I_0 \subseteq \mathbb{R}$$

essendo S un parametro curvilineo che possiamo assumere come la lunghezza di arco di curva su Λ_0 .

Poiché Λ e Λ_0 sono diffeomorfe l'una dall'altra, si avrà $s = s(S)$, funzione differenziabile e invertibile (almeno a tratti), e dunque S può essere assunta

come coordinata lagrangiana su Λ . Si noti che comunque s è una coordinata materiale. Sarà così:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(S, t) = \mathbf{r}[s(S), t]$$

e si pone:

$$\mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial S}.$$

Il versore della tangente a Λ in un suo punto P sarà dato da:

$$\mathbf{t} = \left(\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \right)_P, \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{t} = \frac{1}{|\mathbf{r}'|_P} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \frac{ds}{dS} \Big|_P.$$

Se assumiamo come coordinata s la lunghezza d'arco di curva su Λ , allora sarà

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = 1, \quad \mathbf{r}'_s = \mathbf{t}.$$

D'altro canto è allora (avendo ommesso P):

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'| \mathbf{t} = \left(\frac{ds}{dS} \right) \mathbf{t} = \epsilon \mathbf{t},$$

avendo posto $\epsilon^2 = \left(\frac{ds}{dS} \right)^2 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'$.

Infatti dalla definizione di \mathbf{t} si ottiene:

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'| \mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \frac{ds}{dS} = \epsilon \mathbf{t},$$

da cui, moltiplicando ambo i membri scalarmente per \mathbf{r}' , si ha

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = \epsilon^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \epsilon^2.$$

Nella configurazione di riferimento Λ_0 è: $\mathbf{R}' = \mathbf{T}$, $\epsilon_{rif} = 1$. Nel seguito spesso normalizzeremo la lunghezza della configurazione di riferimento, ponendo $S \in [0, 1]$.

Il termine ϵ rappresenta l'allungamento locale e la differenza $\delta = \epsilon - 1$ è detta coefficiente di allungamento. Se si impone il vincolo di inestendibilità, cioè si richiede che la lunghezza di Λ sia uguale a quella di Λ_0 , $\forall t$, si ha

$$1 = \int_0^1 ds = \int_0^1 dS.$$

Se ora si richiede che ogni porzione λ di Λ abbia lunghezza uguale alla sua corrispondente $\lambda_0 \subseteq \Lambda_0$, si avrà:

$$\int_{\lambda} ds = \int_{\lambda_0} dS,$$

essendo $\int_{\lambda} ds = \int_{\lambda_0} \frac{ds}{dS} dS$, si ha:

$$\int_{\lambda_0} \frac{ds}{dS} dS = \int_{\lambda_0} dS, \quad \forall \lambda_0 \subseteq \Lambda_0$$

e infine:

$$\epsilon = \frac{ds}{dS} = 1,$$

da cui si ha: $s(S) = S + c$ e, se si pone $s(0) = 0$, $s = S$, cioè nel caso dell'inestendibilità, le due coordinate "lunghezza d'arco" in Λ_0 e Λ coincidono (come è logico).

Si ha inoltre che $\delta = \epsilon - 1 = 0$, cioè δ può essere assunta come caratteristica di deformazione (di allungamento) e si annulla se e solo se non si ha allungamento. Se si considera la sola caratteristica δ (o ϵ) come caratteristica di deformazione, si ha un modello cinematico povero, valido nel caso dei fili elastici, ma più in generale si hanno altre possibilità di deformazioni, dovute al fatto che la curva Λ è immersa in E_3 , dunque può subire variazioni di curvatura e torsione. Si può pensare di associare a Λ altri tipi di deformazioni, che consentano di introdurre nel modello fenomeni fisici del corpo tridimensionale che si sta schematizzando, quali la variazione di dimensione delle sezioni trasverse, gli scorrimenti di tali sezioni l'una rispetto all'altra, ecc.; a tale scopo si può procedere o per via diretta, introducendo un campo di vettori doppio $(\mathbf{d}_1^{(s,t)}, \mathbf{d}_2^{(s,t)})$ definito su Λ , che viene visto come un ulteriore insieme di incognite di moto cui si associano le deformazioni "di sezione" prima indicate (e si parla allora di modello "alla Cosserat"), o per via dedotta, cercando di ricavare dal modello tridimensionale delle equazioni di moto approssimate, ottenute eliminando due variabili, o meglio, cercando di esprimere le grandezze geometrico-cinematiche, e poi anche quelle dinamiche, in termini della sola variabile s (o S), ottenendo così modelli "alla Timoshenko" o altri analoghi.

Limitaremo la nostra analisi ai cosiddetti modelli "alla Kirchhoff" o a casi particolari, come quello dell'elastica di Eulero, introducendo solo curvatura e torsione quali grandezze di deformazione significative, oltre all'allungamento.

A tale scopo si ricordi che una base naturale in $T_P\Lambda$ (spazio tangente in P a Λ) è \mathbf{t} , ovvero \mathbf{r}' , poiché $T_P\Lambda = \mathbb{R}$.

Se consideriamo invece l'immersione di Λ in E_3 , si può, ad ogni punto di Λ , associare una base naturale materiale di dimensione 3, i cui vettori sono:

$$\mathbf{d}_1 = \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{r}',$$

essendo $\boldsymbol{\nu}$ e \mathbf{b} i versori della normale principale e binormale a Λ in P .

Valgono le ben note formule per curvatura e torsione:

$$\text{curvatura } c : \quad \mathbf{t}'_s = c\boldsymbol{\nu} \quad (\text{e in } \Lambda_0 \quad \mathbf{T}' = c_0\mathbf{N})$$

$$\text{torsione } \tau : \quad \mathbf{b}'_s = \tau\boldsymbol{\nu} \quad (\text{in } \Lambda_0 \quad \mathbf{B}' = \tau_0\mathbf{N})$$

essendo \mathbf{B} e \mathbf{N} binormale e normale nella configurazione di riferimento Λ_0 , c_0 e τ_0 le relative curvatura e torsione.

Nella teoria tridimensionale le caratteristiche di deformazione non sono altro che le variazioni della metrica tra la configurazione attuale e quella di riferimento. Nel nostro caso il tensore metrico $g_{ij} = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j$, in Λ , si riduce a: $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{ij} = 0$ per $i \neq j$, e $g_{33} = \epsilon^2$. Si avrebbe dunque, come sola caratteristica di deformazione, l'allungamento. Per far comparire la curvatura e la torsione, occorre introdurre la connessione, o meglio, basta quella parte di connessione definita dalle:

$$k_{ij} = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}'_j$$

che si riducono alle sole componenti non nulle:

$$k_{13} = \mathbf{d}'_3 \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{r}'' \cdot \boldsymbol{\nu} = (\epsilon\mathbf{t})' \cdot \boldsymbol{\nu} = \epsilon'\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\nu} + \epsilon\mathbf{t}' \cdot \boldsymbol{\nu} = \epsilon\mathbf{t}' \cdot \boldsymbol{\nu} = \epsilon^2c$$

(si ricordi che $\mathbf{t}' = \epsilon\mathbf{t}'_s = \epsilon c\boldsymbol{\nu}$),

$$k_{12} = \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}'_2 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{b}' = \boldsymbol{\nu} \cdot \epsilon\tau\boldsymbol{\nu} = \epsilon\tau,$$

mentre è $k_{23} = 0$ e $k_{\alpha\beta} = -k_{\beta\alpha}$, da cui $k_{11} = k_{22} = 0$, $k_{33} = \epsilon\epsilon'$.

L'introduzione della connessione è naturale, poiché la curva Λ è una varietà a dimensione 1 immersa in $\mathbb{R}^3 \equiv E_3$. Nel caso di corpi tridimensionali, come conseguenza delle condizioni di compatibilità vidste nel cap. 2, la connessione è nulla. Si introducono varietà di dimensione 3 con connessione non nulla per modellizzare corpi con imperfezioni nel reticolo atomico (teoria delle dislocazioni), o con strutture più complesse. Nel caso invece di corpi di dimensione 1 o 2 immersi in \mathbb{R}^3 la connessione non è in generale nulla.

Equazioni di bilancio

L'equazione di bilancio della massa traduce la proprietà che la massa di una qualunque porzione λ di Λ resta invariata in ogni moto. Detta $m(\lambda)$ tale massa, è per definizione

$$m(\lambda) = \int_{\lambda} \rho(s, t) ds$$

essendo $\rho = \rho(s, t)$ la densità (unidimensionale) di λ . È dunque:

$$m(\lambda) = m(\lambda_0) \Leftrightarrow \int_{\lambda} \rho(s, t) ds = \int_{\lambda_0} \rho_0(S) dS,$$

essendo λ_0 la controimmagine in Λ_0 di λ nel moto considerato e $\rho_0(S)$ la sua densità. Si ha così:

$$\int_{\lambda} \rho(s, t) ds = \int_{\lambda_0} \rho[s(S), t] \frac{ds}{dS} dS = \int_{\lambda_0} \rho_0(S) dS, \quad \forall \lambda_0 \subseteq \Lambda_0.$$

Ne segue l'equazione di bilancio della massa in forma lagrangiana:

$$\epsilon \rho(S, t) = \rho_0(S),$$

analoga a quella dei corpi tridimensionali, quando lo Jacobiano $J = \det(F)$ si riduce a ϵ .

La controparte euleriana si ottiene imponendo:

$$\frac{d}{dt} m(\lambda) = 0,$$

da cui $\frac{d}{dt} \int_{\lambda} \rho(s, t) ds = 0 \quad \forall \lambda \subseteq \Lambda$. Ma è, $\forall \lambda \subseteq \Lambda$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\lambda} \rho ds &= \frac{d}{dt} \int_{\lambda_0} \rho(S, t) \epsilon dS = \int_{\lambda_0} \frac{d}{dt} (\epsilon \rho) dS = \\ &= \int_{\lambda_0} (\dot{\rho} \epsilon + \dot{\epsilon} \rho) dS = \int_{\lambda} (\dot{\rho} + \rho \dot{\epsilon} \epsilon^{-1}) ds = 0 \end{aligned}$$

da cui:

$$\dot{\rho} + \rho \dot{\epsilon} \epsilon^{-1} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

che è l'equazione di bilancio cercata.

Analogamente, per ricavare l'equazione di bilancio della quantità di moto, si introduce la quantità di moto di una porzione di curva $\lambda \subseteq \Lambda$:

$$\mathbf{q} = \int_{\lambda_0} \rho_0(S) \dot{\mathbf{r}} dS = \int_{\lambda} \rho(s, t) \dot{\mathbf{r}} ds,$$

tenuto conto che $\epsilon\rho = \rho_0$ (adottando, d'ora in poi, la coordinata lagrangiana S).

Si introduce quindi la densità di forza di massa $\mathbf{f} = \mathbf{f}(S, t)$ e la forza di contatto $\mathbf{n} = \mathbf{n}(S, t)$, come vettore, quest'ultimo, appartenente a $T_P\Lambda$ e definito nel punto $P \in \Lambda$ come la forza che la porzione $\Lambda - \lambda$ di corpo esercita sul punto P .

L'equazione di bilancio della quantità di moto si formula allora come:

$$\frac{d}{dt} \int_{\lambda_0} \rho_0 \dot{\mathbf{r}} dS = \int_{\lambda_0} \rho_0 \mathbf{f} dS + [n]_{S_0}^{S_1}, \quad \forall \lambda \subseteq \Lambda,$$

essendo S_0 e S_1 i valori di S corrispondenti agli estremi di λ . Ne segue:

$$\frac{d}{dt} \int_{\lambda_0} \rho_0 \dot{\mathbf{r}} dS = \int_{\lambda_0} (\rho_0 \mathbf{f} + \mathbf{n}') dS$$

da cui l'equazione in forma locale:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{r}} = \rho_0 \mathbf{f} + \mathbf{n}', \quad \forall P \in \Lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A questa equazione si possono associare le condizioni iniziali, le condizioni al contorno e le equazioni costitutive, che sono del tipo:

$$\begin{aligned} \text{c.i. : } & \mathbf{r}(S, 0) = \mathbf{r}_0(S), \quad \dot{\mathbf{r}}(S, 0) = \dot{\mathbf{r}}_0(S), \\ \text{c.c. : } & \mathbf{n}(0, t) = \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{n}(1, t) = \mathbf{t}_1 \quad (\text{di trazione}), \\ & P(0, t) = \hat{P}_0, \quad P(1, t) = \hat{P}_1 \quad (\text{di posizione}), \\ \text{e.c. : } & \mathbf{n} = \mathbf{n}(\epsilon) \end{aligned}$$

Nel caso statico, in assenza di forze di massa, è:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{o}$$

e dunque

$$\mathbf{n}' = \mathbf{o}, \quad \mathbf{n} = \text{cost.}$$

Se si sono imposte condizioni di sola trazione ($\mathbf{n}(0) = \mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}(1) = \mathbf{t}_1$) si ha $\mathbf{n} = \mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_1$, dunque perché il problema ammetta soluzione, deve essere $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_1$ e in tal caso $\mathbf{n} = \mathbf{t}_0$ in ogni punto $P \in \Lambda$.

Questo modello è usato nel caso del filo elastico, con una particolare scelta dell'equazione costitutiva. Se però il modello è più ricco, cioè include anche deformazioni di curvatura e torsione, occorre richiedere che a tali deformazioni corrispondano degli sforzi interni ed equazioni costitutive che facciano comparire non solo la metrica, ma anche la connessione.

Gli sforzi interni relativi a curvatura e torsione sono introdotti sotto forma di un momento (o coppia) di sforzo interno e si suppone che, fissata una qualunque porzione $\lambda \subseteq \Lambda$, sui suoi estremi agisca un momento locale dovuto all'azione della parte di corpo $\Lambda - \lambda$, o meglio, di quei punti di $\Lambda - \lambda$ vicini ai punti di frontiera di λ . Tale momento si indica con $\mathbf{m} = \mathbf{m}(s, t)$.

L'equazione di bilancio del momento è:

$$\frac{d}{dt} \int_{\lambda_0} \rho_0 \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dS = \int_{\lambda_0} \rho_0 \mathbf{r} \times \mathbf{f} dS + [\mathbf{r} \times \mathbf{n}]_{S_0}^{S_1} + [\mathbf{m}]_{S_0}^{S_1}, \quad \forall \lambda \subseteq \Lambda.$$

Ne segue:

$$\frac{d}{dt} \int_{\lambda_0} \rho_0 \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dS = \int_{\lambda_0} \rho_0 \mathbf{r} \times \mathbf{f} dS + \int_{\lambda_0} [(\mathbf{r} \times \mathbf{n})' + \mathbf{m}'] dS$$

e quindi l'equazione in forma locale:

$$\rho_0 \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] = \rho_0 \mathbf{r} \times \mathbf{f} + (\mathbf{r} \times \mathbf{n})' + \mathbf{m}',$$

che, tenuto conto dell'equazione di bilancio della quantità di moto, diviene:

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{n} + \mathbf{m}' = \mathbf{o}.$$

Si tratta di una condizione sul momento che deve sempre essere verificata per ogni soluzione del problema dinamico. (È la condizione analoga all'equazione $T = T^T$ della teoria tridimensionale, ma non è più una condizione di simmetria del tensore degli sforzi, peraltro, in questo caso, non definito).

Affinché l'equazione di bilancio del momento si traduca in una effettiva equazione dinamica occorrerebbe introdurre una grandezza cinetica intrinseca, controparte del momento \mathbf{m} : questo si fa nella teoria dei continui polari, che non viene illustrata in questo corso.

Poiché siamo qui specificamente interessati a problemi statici, le equazioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} \mathbf{n}' + \rho_0 \mathbf{f} = \mathbf{o} \\ \mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{n} = \mathbf{o} \end{cases}$$

unitamente alle condizioni al contorno opportune, che possono essere, come già detto, di trazione, di posizione o miste. In particolare, le condizioni di trazione si possono dare anche sul momento:

$$\mathbf{m}(0, t) = \mathbf{m}_0, \quad \mathbf{m}(1, t) = \mathbf{m}_1.$$

Le equazioni costitutive sono del tipo:

$$\begin{cases} \mathbf{n} = \mathbf{n}(\epsilon, c, \tau) \\ \mathbf{m} = \mathbf{m}(\epsilon, c, \tau) \end{cases}$$

Naturalmente, le condizioni al contorno e le equazioni costitutive valgono sia nel caso dinamico che statico. Nel caso dinamico si aggiungono le condizioni iniziali già viste.

Si supponga ora di considerare solo curve Λ piane. In tal caso sarà:

$$\mathbf{n} = n\mathbf{t} \quad \text{e} \quad \mathbf{m} = m\mathbf{b},$$

$$\tau = 0, \quad \mathbf{b} = \text{cost.}$$

Le equazioni costitutive fanno intervenire due sole funzioni scalari:

$$n = n(\epsilon, c), \quad m = m(\epsilon, c)$$

che definiscono completamente il problema.

Nella teoria lineare classica si suppone:

$$n = \lambda\epsilon, \quad m = Bc.$$

In tal caso si ha equivalenza con il caso iperelastico e la densità di energia di deformazione è data da:

$$W = \frac{1}{2}Bc^2 + \frac{1}{2}\lambda\epsilon^2.$$

(In generale l'ipotesi di iperelastività si traduce nel fatto che $\exists W = W(\epsilon, c)$ tale che: $n = \frac{\partial W}{\partial \epsilon}$, $m = \frac{\partial W}{\partial c}$).

Conviene ora fornire delle espressioni esplicite per la curvatura c e l'allungamento ϵ in termini di spostamento. Si ponga: s l'ascissa curvilinea lunghezza d'arco su Λ e S l'analogo su Λ_0 e sia S la coordinata lagrangiana su Λ . È, come già visto:

$$\epsilon = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'},$$

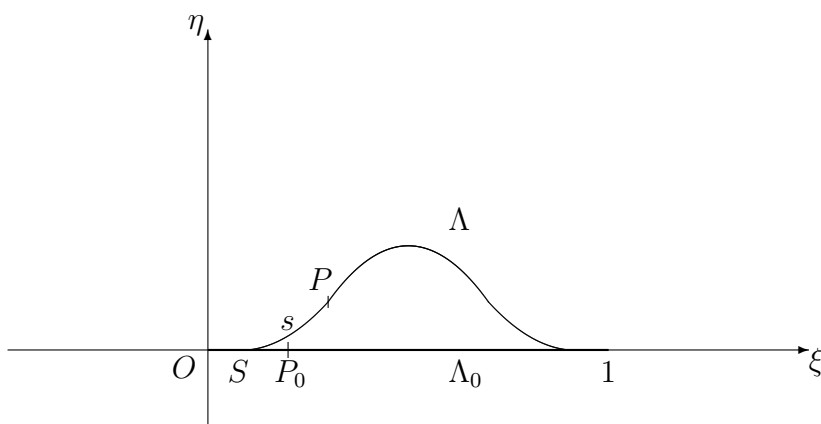
avendo posto $\mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial S}$ e $\mathbf{r}'_s = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$ ed analogamente quando si derivino altre grandezze.

Il versore \mathbf{t} della tangente a Λ in un suo generico punto è:

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}'_s = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial S} \frac{dS}{ds} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{r}',$$

cioè $\mathbf{r}' = \epsilon \mathbf{t}$.

Si supponga che la configurazione di riferimento sia rettilinea e si prenda come asse delle x la retta passante per tale configurazione e avente l'origine in un suo estremo:



in tal caso si può porre $S \equiv x$ e quindi $\mathbf{r}' \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$, $\epsilon = \frac{ds}{dx}$, ecc...

Si supponga ora che la configurazione deformata mantenga i suoi estremi sempre sull'asse delle x . Sia $w(x)$ l'ordinata del punto $P \in \Lambda$ corrispondente a $P_0 \in \Lambda_0$ di ascissa x , nella deformazione assegnata. Se è $OP = \mathbf{r}(x)$ e $OP_0 = \mathbf{R}(x)$, varrà la decomposizione:

$$\mathbf{r} = r_\xi(x)\mathbf{i} + r_\eta(x)\mathbf{j} = r_\xi(x)\mathbf{i} + w(x)\mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{R}(x) = x\mathbf{i}.$$

Lo spostamento $\mathbf{u} = P_0P$ sarà dato da:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} = (r_\xi - x)\mathbf{i} + w(x)\mathbf{j} = u(x)\mathbf{i} + w(x)\mathbf{j}.$$

Dunque le componenti dello spostamento sono:

$$\begin{cases} u(x) = r_\xi(x) - x \\ w(x) = r_\eta(x) \end{cases}$$

L'allungamento è dato da:

$$\epsilon = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{r_\xi'^2 + r_\eta'^2} = [(u' + 1)^2 + (w')^2]^{1/2}.$$

Per la curvatura c si hanno due espressioni utili.

1. Sia θ l'angolo che la tangente a Λ forma con l'asse delle x . È:

$$\mathbf{t} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j},$$

da cui:

$$\mathbf{t}'_s = (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \theta'_s$$

e ovviamente:

$$\boldsymbol{\nu} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

Ne segue:

$$c = \mathbf{t}'_s \cdot \boldsymbol{\nu} = \theta'_s = \frac{1}{\epsilon} \theta'.$$

Nel caso in cui il corpo sia inestendibile, è:

$$c = \theta'_s = \theta',$$

come è ovvio, poiché in tal caso $\epsilon = 1$, ovvero $s = S$.

2. L'equazione cartesiana di Λ è data da: $\eta = f(\xi)$, con $\xi = u(x) + x$. D'altro canto è $\eta = w(x) = f[\xi(x)]$, quindi:

$$w' = \frac{dw}{dx} = \frac{df}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{df}{d\xi} (1 + u').$$

L'angolo θ che la tangente in P a Λ forma con l'asse delle x è dato da:

$$\theta = \arctg \left(\frac{df}{d\xi} \right) \Big|_P = \arctg \left(\frac{w'}{1 + u'} \right).$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} c &= \theta'_s = \frac{d}{ds} \arctg \left(\frac{w'}{1 + u'} \right) = \frac{d}{dx} \arctg \left(\frac{w'}{1 + u'} \right) \frac{dx}{ds} = \\ &= \frac{w''(1 + u') - u''w'}{(1 + u')^2 + w'^2} \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Se $u(x) = 0$, cioè se non si ha spostamento orizzontale, si ritrova naturalmente l'espressione nota di una curva piana:

$$c = \frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}.$$

D'altro canto è: $\theta' = \epsilon \theta'_s = \frac{w''}{1 + w'^2}$.

Se ora si suppone che le deformazioni siano piccole, cioè $\epsilon \sim 1$ e $u' \sim 0$, $w' \sim 0$, cioè la configurazione deformata ha tangente che forma angolo piccolo con l'asse x in ogni punto e l'allungamento è piccolo, allora si trova l'espressione approssimata, utile in alcuni casi:

$$c \cong w''$$

(in tal caso $\theta' \cong \theta'_s$).

Un'approssimazione per l'allungamento $\delta = \epsilon - 1$ è la seguente:

$$\begin{aligned} \delta &= \epsilon - 1 = \sqrt{(u' + 1)^2 + (w')^2} - 1 = 1 + \frac{u'^2 + 2u' + w'^2}{2} - 1 + \dots \cong \\ &\cong u' + \frac{w'^2}{2} + \frac{1}{2}u'^2 + \dots \cong u' + \frac{1}{2}w'^2. \end{aligned}$$

L'approssimazione $c \cong w''$ continua a valere anche con $\epsilon \cong 1 + u' + \frac{1}{2}w'^2$: in tal caso è $c = w''(1 - w'^2 + \dots)(1 - u' - \frac{1}{2}u'^2 + \dots) \cong w''$.

Come caratteristiche di deformazione si assumono di solito le differenze di allungamento e di curvatura: $k = \frac{1}{2}(c - C)$ e $\delta = \frac{1}{2}(\epsilon - 1)$. Il fattore $\frac{1}{2}$ compare in analogia alla teoria tridimensionale. Nel nostro caso è $C = 0$, essendo la configurazione di riferimento rettilinea. Nel seguito tralascieremo il fattore $\frac{1}{2}$ per semplicità. Si tratta di effettive caratteristiche di deformazione, infatti $k = 0$ e $\delta = 0 \Leftrightarrow$ deformazione rigida.

Problema 1

Si voglia ora studiare il seguente problema al contorno (condizioni al contorno di spostamento): la curva piana elastica Λ abbia estremi vincolati a scorrere senza attrito lungo l'asse delle x e ad essi venga imposto uno spostamento, rispetto alla configurazione iniziale rettilinea indeformata, fissato:

$$u(0) = -u(1) = c > 0.$$

Si vuole studiare l'equilibrio di questo sistema.

Le equazioni di equilibrio sono:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{o}, \quad \mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{n} = \mathbf{o},$$

ovvero:

$$\mathbf{n} = \mathbf{cost} = -\mathbf{t}_0 = -t_0\mathbf{i}, \quad \mathbf{m} + \mathbf{r} \times \mathbf{n} = \mathbf{cost} = \mathbf{o}$$

poiché \mathbf{n} (a parte il segno) valutato in $x = 0$ o in $x = 1$ fornisce la reazione vincolare negli estremi in corrispondenza alla condizione sugli spostamenti e in $x = 1$, non essendovi momenti applicati, vi è equilibrio tra momento interno e momento dello sforzo \mathbf{n} .

Essendo $\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + w \mathbf{j}$, ne segue:

$$\mathbf{m} + wt_0 \mathbf{k} = \mathbf{o}.$$

Le equazioni costitutive sono:

$$\mathbf{n} = \lambda \delta \mathbf{i}, \quad \mathbf{m} = B c \mathbf{k},$$

da cui:

$$\begin{cases} \lambda(u_x + \frac{1}{2}w_x^2) = -t_0 \\ Bw_{xx} + t_0 w = 0 \end{cases}$$

ovvero, posto $\frac{t_0}{B} = \mu$ e $\frac{B}{\lambda} = \beta$,

$$w_{xx} + \mu w = 0, \quad u_x + \frac{1}{2}w_x^2 = -\beta\mu,$$

che costituiscono le equazioni di equilibrio della curva elastica.

Le condizioni al contorno sono:

$$w(0) = w(1) = 0, \quad u(0) = u(1) = c > 0.$$

Si tratta di un problema non lineare, per la presenza del termine w_x^2 .

Il problema lineare associato, ottenuto cancellando tale termine, fornisce per $u(x)$ la soluzione:

$$u(x) = -\beta\mu x + h.$$

Per le condizioni al contorno deve essere:

$$h = c \text{ e } \beta\mu = 2c.$$

Dunque la costante di integrazione deve essere $h = c$, e in tal modo viene a essere determinata la reazione vincolare (cioè la tensione agli estremi, costante in tutto il corpo) dovuta allo spostamento imposto:

$$t_0 = B\mu = \lambda\mu\beta = 2c\lambda.$$

In definitiva è: $u(x) = c(1 - 2x)$.

Per $w(x)$ si ha $w(x) = 0$, oppure, se $\mu = \mu_n = (n\pi)^2$, $w_n = w_n(x) = A_n \sin(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}$, essendo A_n una costante indeterminata.

Se dunque c è tale che sia:

$$c = c_n = \frac{1}{2}\beta\mu_n = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\lambda}(n\pi)^2,$$

si ha una biforcazione ed i valori critici per l'accorciamento sono i c_n .

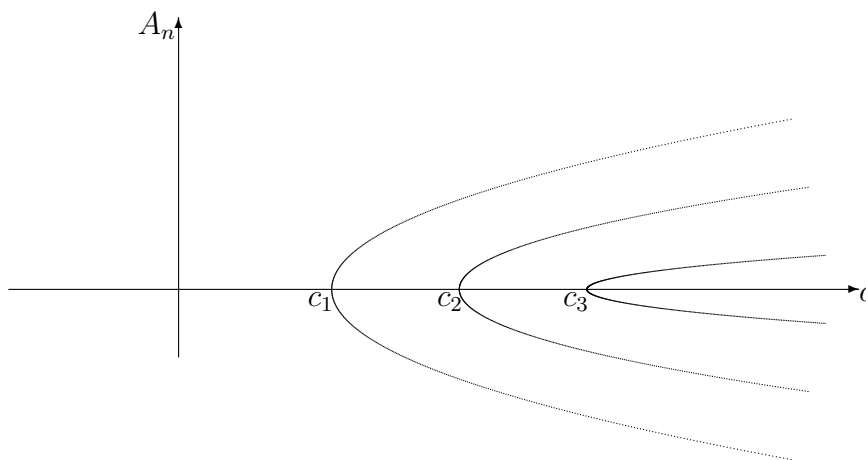
Veniamo ora al problema non lineare. L'equazione in w resta invariata, e così le sue soluzioni ed i punti critici. Se $\mu \neq \mu_n$, si ha la soluzione rettilinea. Se $\mu = \mu_n$, si sostituisca w_n nell'equazione che fornisce la $u(x)$ e la si integri, come equazione differenziale con la condizione iniziale $u(0) = c$. Si ha:

$$u(x) = u_n(x) = c - \beta\mu_n \left(1 + \frac{A_n^2}{4\beta}\right) x + \frac{n\pi A_n}{8} \sin 2n\pi x.$$

Tale soluzione soddisfa la condizione $u(1) = -c$ se e solo se:

$$c = c_n \left(1 + \frac{A_n^2}{4\beta}\right).$$

Si tratta di una condizione sugli spostamenti agli estremi in relazione con i valori delle ampiezze (arbitrarie). È chiaro che la soluzione con ampiezza nulla esiste per ogni valore di c , si tratta della soluzione $w = 0$, $u = c(1 - 2x)$. Fissato ora un valore di n , valori reali di A_n sono possibili solo se $c > c_n$: dunque dal punto $(A_n = 0, c = c_n)$ si biforca una soluzione non banale; nel piano (A_n, c) le curve $A_n = A_n(c)$ sono quelle indicate in figura:



Quanto detto vale per ogni n . In particolare per $c < c_1$ si ha solo la soluzione banale. Per $c_n < c < c_{n+1}$, si hanno, oltre alla soluzione banale, $2n$ soluzioni, corrispondenti ai valori di A_n , intersezione di $c = \text{cost.}$ con le curve $A_n = A_n(c)$. Il fatto che i valori c_n siano valori critici ci dice che la soluzione del problema lineare determina i punti di biforcazione per il problema non lineare.

Si dimostri che le parabole $c = c(A_n)$ non si intersecano.

$$\left(\frac{dc}{dA_n} \Big|_{c=c_h} > \frac{dc}{dA_n} \Big|_{c=c_k}, \text{ se } h > k, \text{ fissato } A_n \right).$$

Le equazioni di equilibrio si potevano anche ottenere come equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale:

$$W = \int_0^1 \left[w_{xx}^2 + \frac{1}{\beta} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 \right] dx + 2 \int_0^1 \mu u_x dx.$$

Il primo integrale che compare nell'espressione di W non è altro che l'energia potenziale della curva. Tale potenziale, calcolato nella soluzione banale, vale:

$$V_b = \frac{\beta}{2} \left(\frac{2c}{\beta} \right)^2,$$

mentre nella soluzione deformata corrispondente ad un valore n è:

$$V_n = \mu_n(2c - c_n).$$

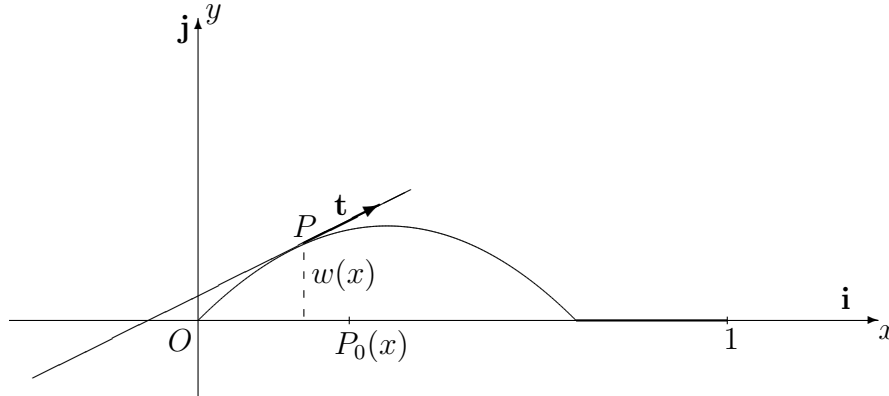
Ne segue che, se $c \geq c_n$, si ha $V_n < V_b$ e se $c \geq c_n > c_m$, allora si ha $V_n > V_m$. Dunque, fissato $c > c_1$, il potenziale corrispondente alla soluzione banale è maggiore di quello nelle soluzioni biforcute, mentre il potenziale corrispondente alla soluzione che si biforca da $c = c_1$ ha il valore più piccolo. Se $c_n < c < c_{n+1}$ è: $V_b > V_n > V_{n-1} > \dots > V_1$. Dunque lo stato più stabile è quello corrispondente alla prima biforcazione, cioè lo stato individuato dalla soluzione:

$$w = A_1 w_1 = \pm 2\beta^{1/2} \left(\frac{c}{c_1} - 1 \right)^{1/2} \text{sen}(\pi x), \quad \forall c > c_1.$$

Problema 2 (Elastica di Eulero).

La curva piana elastica Λ sia inestendibile. Un suo estremo sia fisso e l'altro vincolato a scorrere lungo l'asse delle x , senza attrito. Nell'estremo mobile

è applicata una forza costante parallela all'asse delle x : $\mathbf{F} = -F\mathbf{i}$. Studiare l'equilibrio.



Si indichi con θ è l'angolo formato dalla retta tangente in P con l'asse delle x . La condizione di inestendibilità è:

$$\epsilon = 1 \Leftrightarrow \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 \Leftrightarrow s = S = x,$$

nonché:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{t} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \text{ e } c = \theta'$$

Le equazioni di bilancio (di equilibrio) sono ora:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{n}(x) = \cos \theta \mathbf{t} = \mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(1),$$

$$\mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{n} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{m}' + (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \times \mathbf{n}_0 = \mathbf{o}.$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} \mathbf{n}(1) = -F\mathbf{i} \\ \mathbf{m}(0) = \mathbf{m}(1) = \mathbf{o} \\ u(0) = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

con le relazioni accessorie, che si ricavano derivando lo spostamento $\mathbf{u} = OP - OP_0 = P_0P$:

$$u' = \cos \theta - 1, \quad w' = \sin \theta.$$

(Infatti: $\mathbf{r} = (u + x)\mathbf{i} + w\mathbf{j}$, $\mathbf{r}' = (u' + 1)\mathbf{i} + w'\mathbf{j} = \mathbf{t} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$).

Le relazioni costitutive si riducono alla:

$$\mathbf{m} = B\mathbf{c}\mathbf{k} = B\theta'\mathbf{k}.$$

Le equazioni di equilibrio diventano allora l'unica equazione:

$$B\theta'' + F \sin \theta = 0$$

con le condizioni al contorno

$$\theta'(0) = \theta'(1) = 0.$$

Risolto questo problema di equilibrio, le relazioni accessorie e le restanti condizioni al contorno servono per determinare gli spostamenti $u(x)$ e $w(x)$.

Si osservi come anche questa equazione si può ottenere da un principio variazionale, rendendo stazionario il funzionale:

$$E = \int_0^1 \frac{1}{2} B \theta'^2 dx - \int_0^1 F(1 - \cos \theta) dx.$$

Il primo addendo rappresenta l'energia di deformazione, il secondo il lavoro del carico \mathbf{F} : $dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} = F(\cos \theta - 1)dx$.

L'equazione data, con relativi valori al contorno, ammette la soluzione banale $\theta = 0$ (configurazione rettilinea). Ci si chiede se esistono soluzioni non rettilinee, ed eventuali valori critici del carico. Come visto più volte, conviene passare al problema linearizzato. Per far ciò si perturba la soluzione, introducendo una funzione $\eta(a, \lambda, x)$ ed un parametro reale a , tali che:

$$\theta(x) = a\eta(a, \lambda, x),$$

avendo posto per brevità: $\lambda = \frac{F}{B}$. L'equazione diventa, con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \eta'' + \frac{\lambda}{a} \sin(a\eta) = 0 \\ \eta'(0) = \eta'(1) = 0 \end{cases}$$

Passando al limite per $a \rightarrow 0$, si ha l'equazione linearizzata:

$$\eta_0'' + \lambda \eta_0 = 0,$$

con $\eta_0 = \lim_{a \rightarrow 0} \eta$. Tale equazione, oltre alla soluzione banale $\eta = 0$, ammette la soluzione

$$\eta_0(0, \lambda, x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x + \alpha), \quad A \neq 0,$$

che soddisfa le condizioni al contorno richieste se e solo se:

$$\alpha = 0, \quad \lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Gli autovalori del nostro problema al contorno sono allora λ_n e le autofunzioni:

$$\eta = \eta_n = A \cos(n\pi x),$$

con A arbitrario non nullo.

Si consideri ora il problema non lineare a valori iniziali:

$$\begin{cases} \eta'' + \frac{\lambda}{a} \sin(a\eta) = 0 \\ \eta(0) = 1, \eta'(0) = 0 \end{cases}$$

$\eta(0) = 1$ corrisponde a $\theta(0) = a$, cioè a valori arbitrari per la condizione iniziale di θ : in pratica si perturba la condizione iniziale nel problema in θ , ed invece si studia un problema definito nella perturbazione $\eta(x, \lambda, a)$. Tale problema iniziale ammette una ed una sola soluzione:

$$\eta = \eta(a, \lambda, x),$$

per ogni valore di $a \neq 0$.

Ci si chiede se esistono valori $a \neq 0$ per cui tale soluzione soddisfi la condizione:

$$\eta'(a, \lambda, 1) = 0.$$

Questo avviene sicuramente se ci si pone in un intorno di $a = 0$, $\lambda = \lambda_n$. Infatti in tale intorno si può applicare il teorema della funzione implicita, poiché:

$$\left. \frac{\partial \eta'}{\partial \lambda} \right|_{a=0, \lambda=\lambda_n, x=1} \neq 0.$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \eta'(a, \lambda, x)}{\partial \lambda} \right|_{a=0, \lambda=\lambda_n, x=1} &= \left. \frac{\partial \eta'(0, \lambda, x)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_n, x=1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[-A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) \right]_{\lambda=\lambda_n, x=1} = (-1)^n \frac{A}{2} \neq 0, \end{aligned}$$

essendo $\eta(0, \lambda, x) = A \cos(n\pi x)$ e $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$. Dunque, in tale intorno, si può esplicitare in maniera univoca la funzione:

$$\lambda = \lambda(a),$$

ed ovviamente, $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a) = \lambda_n$.

I punti $(0, \lambda_n)$ sono in definitiva punti di biforcazione per il problema non lineare. I valori critici del carico sono dati da:

$$F_n = Bn^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Un'analisi più approfondita del comportamento delle soluzioni può essere condotta utilizzando le relazioni accessorie. Prima di passare ad esse, si osservi che $\lambda_0 = 0$ non è un effettivo autovalore, in quanto gli corrisponde l'unica soluzione banale $\theta = 0$: infatti $\theta'' = 0 \Rightarrow \theta' = \text{cost} = \theta'(0) = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 = 0$. Quest'ultima uguaglianza discende dal fatto che $w_x = \sin \theta$ e se $\theta = \theta_0 \neq 0$ è $w_x = \text{cost} = a$, cioè $w = ax + b$, ma $w(0) = w(1) = 0$ implicano $a = b = 0$, cioè $\theta_0 = 0$ (o $\theta_0 = \pi$).

Vale il seguente teorema:

Teorema 10.1 *Se $0 < \lambda < \lambda_1$, il problema al contorno ammette le sole soluzioni $\theta = 0$, $\theta = \pi$.*

(La soluzione $\theta = \pi$ vale sempre anch'essa e corrisponde ancora ad una configurazione rettilinea in cui l'estremo libero si trova dalla parte opposta a quello della configurazione di riferimento, cioè: $u(1) = -2$, $w(1) = 0$.)

Dimostrazione:

sia $\theta \neq 0$ una soluzione non costante del problema dato, per $\lambda < \lambda_1$. È:

$$0 = -\int_0^1 [\theta'' + \lambda \sin \theta] \theta dx = -[\theta' \theta]_0^1 + \int_0^1 [\theta'^2 - \lambda \theta \sin \theta] dx = \int_0^1 [\theta'^2 - \lambda \theta \sin \theta] dx.$$

Valgono le limitazioni: $\theta \sin \theta \leq |\theta| |\sin \theta| \leq |\theta| \cdot |\theta| \leq \theta^2$ e dunque:

$$0 = \int_0^1 [\theta'^2 - \lambda \theta \sin \theta] dx \geq \int_0^1 [\theta'^2 - \lambda \theta^2] dx.$$

Ora, il fatto che λ_1 sia un autovalore significa che

$$\exists \theta(x) \neq 0 / \theta'' + \lambda_1 \theta = 0$$

e quindi $\int_0^1 [\theta'^2 - \lambda_1 \theta^2] dx = 0$ (calcolo analogo al precedente).

Se $\lambda < \lambda_1$, si ha che:

$$\theta'^2 - \lambda_1 \theta^2 < \theta'^2 - \lambda \theta^2$$

e dunque:

$$\int_0^1 (\theta'^2 - \lambda \theta^2) dx > 0.$$

Si ha così una contraddizione, quindi non esistono soluzioni non costanti per $\lambda < \lambda_1$.

Si consideri ora la condizione accessoria: $w' = \sin \theta$. L'equazione $w' = \sin \theta$ non è risolvibile direttamente, ma si possono ottenere informazioni cercando di decomporre il problema, mediante una soluzione del tipo $\theta = \theta(\varphi)$, in due equazioni della forma:

$$\frac{dw}{d\varphi} = h(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dx} = g(x).$$

Questo è possibile, tenuto conto che è:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \sin \theta[\varphi(x)],$$

con la sostituzione:

$$\theta = \theta(\varphi) \Leftrightarrow \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi,$$

essendo $k = \sin \frac{\theta(0)}{2} = \sin \frac{a}{2}$, con $a = \theta(0) = \theta(x = 0)$. Infatti, si ottiene innanzi tutto, per derivazione rispetto a x :

$$k \cos \varphi \cdot \varphi' = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \theta',$$

$$\text{ovvero } \theta' = \frac{2k \cos \varphi \cdot \varphi'}{\cos \frac{\theta}{2}}.$$

D'altro canto, l'equazione di equilibrio ammette l'integrale primo:

$$\theta'^2 - 2\lambda \cos \theta = \theta'^2(0) - 2\lambda \cos a,$$

ma $\theta'(0) = 0$, dunque: $\theta'^2 = 2\lambda(\cos \theta - \cos a)$ e quindi:

$$\frac{4k^2(\cos^2 \varphi)\varphi'^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2\lambda(\cos \theta - \cos a).$$

Si osservi ora che è:

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - k^2 \sin^2 \varphi$$

e

$$\cos \theta = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi$$

(e anche $\cos a = 1 - 2k^2$), da cui si ricava:

$$\frac{4k^2 \cos^2 \varphi \varphi'^2}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = 2\lambda(1 - 2k^2 \sin^2 \varphi - 1 + 2k^2) = 4\lambda k^2(1 - \sin^2 \varphi) = 4\lambda k^2 \cos^2 \varphi$$

da cui:

$$\varphi'^2 = \lambda(1 - k^2 \sin^2 \varphi).$$

Si tratta della ben nota equazione $\varphi'^2 = \Phi(\varphi)$ (equazione di Weierstrass) vista in Meccanica Razionale. Posto $\mu = \sqrt{\lambda}$, si può scrivere:

$$\mu \frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

da cui si ha $x = x(\varphi) \Rightarrow \varphi = \varphi(x)$, per tutti i valori di x tali che $\varphi'(x) \neq 0$. La funzione definita da:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

prende il nome di integrale ellittico completo di prima specie. Tale integrale non è calcolabile in termini finiti (come del resto si sa dall'equazione del pendolo), ma consente di pervenire a risultati notevoli. Innanzitutto possiamo esplicitare la relazione $\frac{dw}{d\varphi} = h(\varphi)$. Tornando alla componente $w(x)$ dello spostamento, si ha:

$$w' = \frac{dw}{d\varphi} \varphi' = \frac{dw}{d\varphi} \mu \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Ricordando che $w' = \sin \theta = \pm 2k \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ (infatti: $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \pm 2k \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$) si ottiene:

$$\frac{dw}{d\varphi} = \pm \frac{2k}{\mu} \sin \varphi,$$

e, per integrazione:

$$w = \pm \frac{2k}{\mu} \cos \varphi.$$

La curva elastica deformata interseca l'asse delle x in punti x_j , detti *nodi interni*, in cui $w = 0$, cioè in cui $\cos \varphi(x_j) = 0$, $x_j \in]0, 1[$; dovrà allora essere:

$$\varphi(x_j) = \frac{2q+1}{2} \pi \equiv \varphi_q, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dalla formula precedente si ha:

$$\mu x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi$$

e dunque

$$\mu x_j = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x_j)} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi.$$

Si osservi che $\varphi(0)$ è tale che:

$$k \sin \varphi(0) = \sin \frac{\theta(0)}{2} = k$$

dunque $\sin \varphi(0) = 1$, $\varphi(0) = \varphi_p = \frac{4p+1}{2}\pi$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ È allora:

$$\mu x_j = \int_{\varphi_p}^{\varphi_q} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi.$$

Tale integrale ha estremi per cui $\varphi_q - \varphi_p = 2(q-2p)\frac{\pi}{2}$, cioè l'intervallo di integrazione è sempre un multiplo pari dell'intervallo di integrazione dell'integrale ellittico $K(k)$; dunque:

$$\mu x_j = 2hK(k), \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Si ricordi però che ci troviamo lungo un ramo biforcuto, in corrispondenza dunque ad un valore critico μ_m (corrispondente a $\lambda_m = m^2\pi^2$): $\mu_m = \mu_m(k)$. Allora è:

$$x_j = \frac{2hK(k)}{\mu_m}.$$

Osservando che, se $x_j = 1$, si ha

$$\mu_m = \int_{\varphi_p}^{\varphi(1)} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi = 2rK(k), \quad r = 1, 2, \dots$$

Per $k = 0$, si ha $K(0) = \frac{\pi}{2}$ e dunque:

$$\mu_m(0) = 2r\frac{\pi}{2} = m\pi$$

da cui si ricava $r = m$. Ne segue:

$$x_j = \frac{2hK(k)}{2mK(k)} = \frac{h}{m}.$$

Poiché $0 \leq x_j \leq 1$, deve essere $0 \leq h \leq m$, cioè $h = 0, 1, 2, \dots, m$, e ad ogni valore di h corrisponde un'intersezione della curva con l'asse delle x , per cui potremo porre:

$$x_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

In definitiva si hanno, in corrispondenza alla soluzione biforcata per il valore critico μ_m , $m - 1$ *nodi interni*. Un'analisi sulla stabilità può essere fatta andando a valutare l'energia totale corrispondente allo stato banale (dove vale zero) ed ai vari stati deformati; si può dimostrare che lo stato deformato corrispondente al primo valore critico $\lambda_1 = \pi^2$ ($\Leftrightarrow F_1 = B\pi^2$) è quello per cui l'energia totale ha il valore più basso e dunque potremo dire che quando il carico è inferiore al valore critico $F < F_1$, la curva rimane dritta, quando $F \geq F_1$ la curva assume la forma deformata corrispondente al primo carico critico.

L'altra relazione accessoria $u' = \cos \theta - 1$ serve a fornire lo spostamento dell'estremo libero. Si ricordi che $\cos \theta - 1 = -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = -2k^2 \sin^2 \varphi$. Ne segue:

$$u(x) = -2k^2 \int_0^x \sin^2 \varphi(\xi) d\xi$$

da cui si ricava:

$$u(1) = -\frac{2k^2}{\mu} \int_{\varphi_p}^{\varphi_q} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \sin^2 \varphi d\varphi, \quad p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e infine:

$$u_m(1) = -2k^2 \frac{J(k)}{K(k)}$$

essendo:

$$J(k) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

l'integrale ellittico completo di seconda specie. Essendo

$$\lim_{k \rightarrow 1} K(k) = \lim_{k \rightarrow 1} J(k) = \infty$$

dello stesso ordine, si ricava:

$$\lim_{k \rightarrow 1} u_m(1) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} u_m(1) = -2,$$

come già si era detto precedentemente.

Colonna a sezione variabile.

È il caso in cui $B = B(s)$, o meglio ancora, $B = bI(s)$, essendo b una costante strutturale (coefficiente di rigidità flessionale) e $I(s)$ il momento di inerzia polare della sezione della colonna nel punto di coordinate s ; è $I(s) > 0$, $\forall s \in [0, 1]$. L'equazione di equilibrio diventa:

$$(I\theta')' + \frac{F}{b} \sin \theta = 0 \Rightarrow (I\theta')' + \lambda \sin \theta = 0,$$

con $\lambda = \frac{F}{b}$ e le condizioni al contorno:

$$\theta'(0) = \theta'(1) = 0.$$

La soluzione banale è ancora $\theta = 0$. Si ponga: $\theta = a\eta$ e si chiami $a = \theta(0)$. Si ha $(I\eta')' + \lambda a^{-1} \sin(a\eta) = 0$. Il problema linearizzato è:

$$(I\eta')' + \lambda\eta = 0,$$

con $\eta'(0) = \eta'(1) = 0$ e $\eta(0) = 1$. (Es.:calcolare autovalori e autofunzioni).

Chiamati $\lambda_n > 0$ gli autovalori e η_n le autofunzioni del problema linearizzato, si considerino gli sviluppi:

$$\eta = \eta_n + a^2\eta_n^1 + a^4\eta_n^2 + \dots$$

$$\lambda = \lambda_n + a^2\lambda_n^1 + a^4\lambda_n^2 + \dots$$

Lo sviluppo è in a^2 perché l'equazione in η e a non lineare di partenza è pari in a . Si dimostra che si può ricavare:

$$\lambda_n^1 = \frac{\lambda_n \int_0^1 (u_n)^4 dS}{6 \int_0^1 (u_n)^2 dS}$$

nonché, dall'espressione di λ ,

$$a_n(\lambda) = \left(\frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda_n^1} \right)^{1/2} [1 + o(\lambda - \lambda_n)].$$

Poiché $\lambda_n^1 > 0$, si ha che $a_n(\lambda)$ è definita ed allora la nostra equazione ammette soluzione diversa da quella banale nell'intorno di $a = 0$, $\lambda = \lambda_n$.

Ancora una volta i punti critici del problema linearizzato sono punti di biforcazione del problema non lineare.

Bibliografia generale

- ANTMAN S.S., *The theory of rods*. Handbuck de Physik, Bd.6 a/2, 641-703,1972.
- ERICKSEN J.L., *Special topics in elastostatics*, Advances in applied Mechanics, 17, 189-244, 1977.
- GURTIN, M.E., *An introduction to continuum mechanics*. Acad. Press, 1981.
- KELLER, J.B., ANTMAN, S.S. (eds.), *Bifurcation theory and non linear eigenvalue problems*. Benjamin, New York, 1969.
- LUCAS, W.F., *Modules in applied mathemtics*. Vol 1-4, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1983.
- MAY, R.M., *Stability and complexity in model ecosystem*. MPB, Princeton Univ. Press, 1974.
- MAYNARD SMITH, J., *L'ecologia e i suoi modelli*. Biblioteca della EST, Mondadori, 1975.
- NAGHDI P.M., *The theory of shells and plates*. In Handbuch der Physik IV a/2, 1972.
- ODEN J.T. & REDDY, J.N., *Variational methods in theoretical mechanics*. Springer-Verlag, 1976.
- PODIO GUIDUGLI, P., *A primer in elasticity*. J Elasticity, v. 58, No. 1, 2000.
- RUGGERI T., *Introduzione alla termomeccanica dei continui*. Monduzzi Editore, 2007.
- TIMOSHENKO, S.P. & GERE, J.M., *Theory of elastic stability*. Mac-Graw-Hill, 1936.

- TRUESDELL, C. & NOLL, W., *The non-linear field theories of mechanics*. In Flugge's Handbuch der Physik, III/3, 1-602, 1965.
- TRUESDELL, C. & TOUPIN, R., *The classical field theories*. In Flugge's Handbuch der Physik, III/1, 226-793, 1965.
- WANG C.C. & TRUESDELL, C., *Introduction to rational elasticity*. Nordhoff Intl. Publ. 1973.

Indice

1	Richiami di calcolo tensoriale	3
2	Corpi continui deformabili	26
3	Equazioni di bilancio	56
4	Relazioni costitutive	72
5	Elasticità	82
6	Elasticità lineare	106
7	Stabilità	120
8	Modelli biologici	133
9	Perturbazione di parametri ed elementi di teoria delle biforcazioni	156
10	Continui unidimensionali	186
	Bibliografia generale	209