Struttura dei tassi per scadenza

Definizione del modello tramite gli 0-coupon bonds presenti sul mercato

Ipotesi di partenza

Sul mercato sono presenti all'istante 0 ZCB che scadono fra 1,2,…,n periodi

Periodo: 1 anno, 1 trimestre, 1 mese.

Elementi caratteristici di un contratto di scambio di Zero-Coupon Bond (continua)

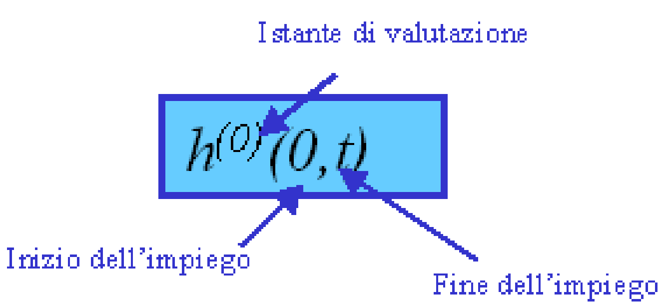
• scadenza *t* = numero di periodi che intercorrono fra l'istante 0 e la data di rimborso

• valor nominale = quantitativo esigibile a scadenza

• prezzo per unità di nominale, $B(0,t)$

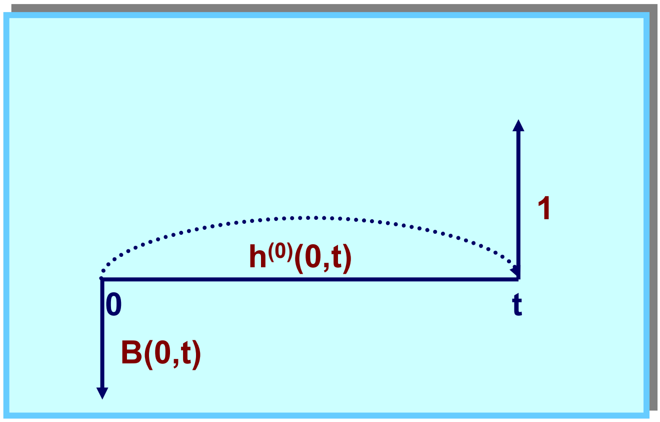
• *tasso di rendimento a scadenza* $h^{(0)}(0,t)$(o *spot rate* o *tasso zero coupon)* = tasso di interesse composto tale che, investendo all'istante 0 una somma a $B(0,t)$, permetta di ottenere all'istante t un montante unitario

Elementi caratteristici di un contratto di scambio di Zero-Coupon Bond (segue)



Elementi caratteristici di un contratto di scambio di Zero-Coupon Bond (segue)

Operazione finanziaria di acquisto di uno ZCB con scadenza t:



Elementi caratteristici di un contratto di scambio di Zero-Coupon Bond (segue)

Vale la seguente relazione:

Tasso spot

Somma impiegata, prezzo dello ZCB

$$B(0,t)\left[1+h^{(0)}(0,t)\right]^{t}=1$$

Montante, Valore Nominale dello ZCB

Fattore di montante

Elementi caratteristici di un contratto di scambio di Zero-Coupon Bond (segue)

Dalla relazione $B(0,t)\left[1+h^{(0)}(0,t)\right]^t = 1$

si possono dedurre:

$B(0,t) = \dfrac{1}{\left[1+h^{(0)}(0,t)\right]^t} \equiv \left[1+h^{(0)}(0,t)\right]^{-t}$ Prezzo, noto il tasso di rendimento

e

$h^{(0)}(0,t) = \left[\dfrac{1}{B(0,t)}\right]^{\frac{1}{t}} - 1 \equiv \left[B(0,t)\right]^{-\frac{1}{t}} - 1 \equiv \sqrt[t]{\dfrac{1}{B(0,t)}} - 1$ Tasso di rendimento, noto il prezzo

B(0,t) come fattore di attualizzazione $\Phi^{(0)}(t,0)$ (continua)

Si può identificare *B(0,t)* con il fattore di attualizzazione *$\Phi^{(0)}(t,0)$* della legge finanziaria conseguente alle operazioni finanziarie semplici effettuate dai due contraenti scambiandosi lo ZCB , ossia:

$$\Phi^{(0)}(t,0) \equiv B(0,t) = \left[1+h^{(0)}(0,t)\right]^{-t}$$

B(0,t) come fattore di attualizzazione $\Phi^{(0)}(t,0)$ (segue)

La corrispondente legge di capitalizzazione coniugata si può indicare con:

$$F^{(0)}(0,t) = \frac{1}{\Phi^{(0)}(t,0)} \equiv \frac{1}{B(0,t)} = \left[1 + h^{(0)}(0,t)\right]^{t}$$

Esempio, definizione del modello tramite gli 0-coupon bonds presenti sul mercato (continua)

Il mercato, all'istante 0, definisce una *struttura dei tassi per scadenza*, rappresentabile graficamente mediante la *curva dei tassi*, ottenuta interpolando i valori corrispondenti ai prezzi degli ZCB presenti sul mercato.

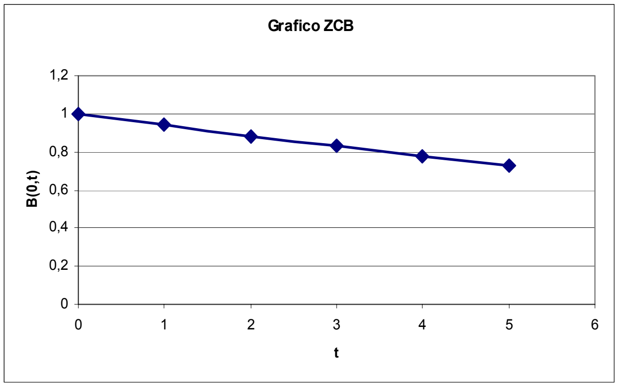
Esempio:

Dati i prezzi degli ZCB, per t = 1,2,…,5:

t	0	1	2	3	4	5
B(0,t)	1	0,94	0,8834	0,83	0,779	0,7316

la curva dei tassi risulta…

Esempio, curva dei prezzi (segue)



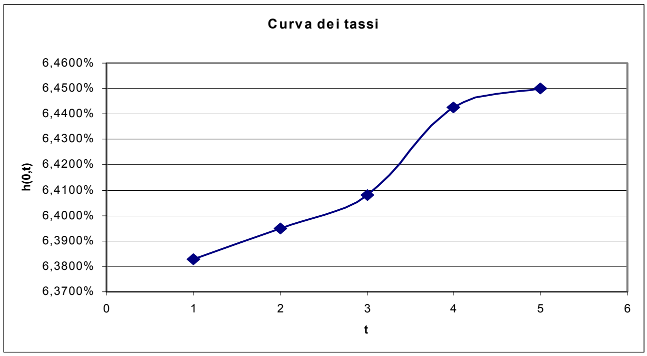
I corrispondenti tassi di rendimento a scadenza sono…

Esempio, tassi di rendimento a scadenza (segue)

t	1	2	3	4	5
$h^{(0)}(0,t)$	6,3830%	6,3950%	6,4079%	6,4426%	6,4499%

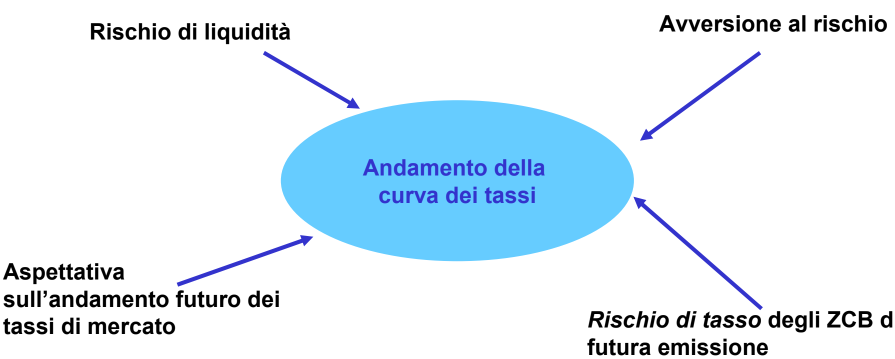
La curva dei rendimenti a scadenza, ottenuta interpolando la funzione per i valori non interi del tempo, è …

Esempio, curva dei rendimenti a scadenza (segue)



! **Se la funzione $h^{(0)}(0,t)$ è costante, la struttura si dice *piatta*.**

Fattori che influiscono sulla curva dei tassi



! **Anche se i tassi sono sostanzialmente stabili la funzione può risultare crescente a causa del rischio di liquidità, dell'avversione al rischio e del rischio di tasso**

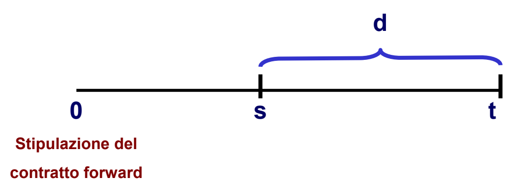
Par.6.1

Contratti pronti contro termine e arbitraggio

I contratti *pronti contro termine* o *forward rate agreements* vengono stipulati all'istante iniziale con durate predeterminate ed effetto differito, detti

- *s :* l'istante iniziale di esecuzione del contratto
- *d* : la durata del contratto
- t : l'istante finale del contratto $t = s + d$

è possibile formalizzare l'operazione come un impiego da *s* a *t*, al tasso di interesse concordato all'istante iniziale per il futuro intervallo di tempo [s,t].



Operazioni speculative

Ipotesi:

- esistono sul mercato due ZCB di durate un anno e due anni, rispettivamente di cui si conoscono i prezzi B(0,1) e B(0,2)
- nello stesso mercato c'è la possibilità di stipulare contratti per impieghi da 1 a 2 al tasso di interesse composto $h^{(0)}(1,2)$ in acquisto o in vendita.

A quali condizioni, ovvero a quale tasso $h^{(0)}(1,2)$, può essere stipulato tale contratto per non dar luogo a possibili operazioni speculative dette ***arbitraggi***?

L'esempio che segue mostra una possibilità di arbitraggio…

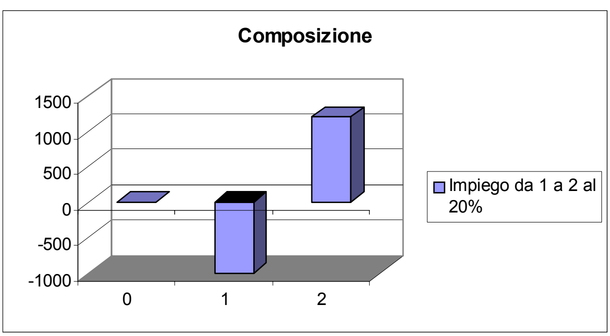
Operazioni speculative, esempio (continua)

Ipotesi:

- **esistono sul mercato due ZCB di durate un anno e due anni, rispettivamente**
- **prezzi per unità di nominale degli ZCB B(0,1) = 0.9 e B(0,2) = 0.8**
- **nello stesso mercato c'è la possibilità di stipulare contratti per impieghi da 1 a 2 al tasso di interesse composto del 20%, in acquisto o in vendita.**

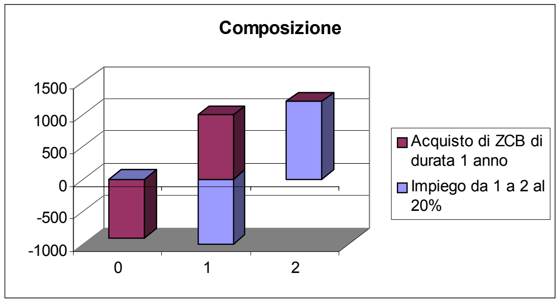
Operazioni speculative, esempio (segue)

L'ipotetico arbitraggista, al fine di speculare, può decidere di versare all'istante 1 1000, per riscuotere 1200 all'istante 2…



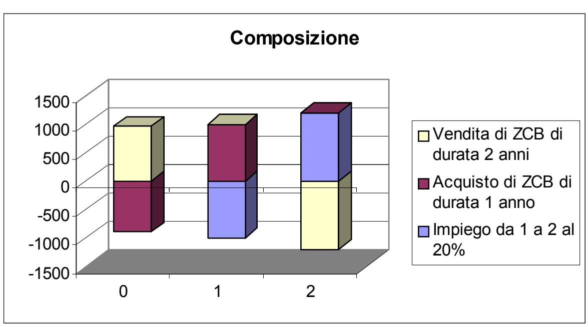
Operazioni speculative, esempio (segue)

…finanziare l'esborso di 1000 in 1 acquistando in 0 uno zero coupon di durata un anno per un valore di 900…



Operazioni speculative, esempio (segue)

…e vendere lo ZCB di durata 2 anni realizzando 1200×0.8 = 960, realizzando la seguente situazione finale:



Operazioni speculative, esempio (segue)

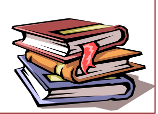
Riassumendo nella seguente tabella la combinazione di operazioni messe in atto dall'ipotetico arbitraggista si ottiene:

	0	1	2
Impiego da 1 a 2 al 20%		-1000	1200
Acquisto di ZCB di durata 1 anno	-900	1000	
Vendita di ZCB di durata 2 anni	960		-1200
Posizione netta	60	0	0

Par.6.2

DEFINIZIONE:

Dicesi *arbitraggio* una combinazione di posizioni di acquisto e di vendita che permetta un guadagno immediato privo di rischio e senza alcun impiego di mezzi propri.



Tassi forward impliciti

Se sul mercato non vi sono contratti pronti contro termine espliciti è possibile costruirne mediante la combinazione di più contratti di acquisto e vendita di ZCB .

Se un operatore, appartenente alla stessa classe di rischio di tali ZCB, volesse proporre un contratto esplicito dello stesso tipo, dovrebbe farlo alle stesse condizioni per non essere *fuori mercato* e permettere così una facile speculazioni agli operatori che si accorgessero dell'anomalia.

L'ipotesi descritta va sotto il nome di ***principio di impossibilità di arbitraggio.***

Tasso forward implicito (continua)

Il tasso di interesse praticato fra 1 e 2 deve essere tale per cui, effettuando la combinazione del primo tipo e quella del secondo tipo, la posizione finale netta è sempre 0.

Questo tasso di equilibrio si dice *tasso forward implicito* corrispondente all'impossibilità di arbitraggio nella struttura dei tassi e si indica con $h^{(0)}(1,2)$.

Questo equivale a calcolare quanto deve valere il montante X all'istante 2 di 1000 in 1 affinché all'istante 0, con i meccanismi di prima, si ottenga 0?

	0	1	2
Impiego da 1 a 2 al tasso $h^{(0)}(1,2)$		-1000	X
Acquisto di ZCB di durata 1 anno	-900	1000	
Vendita di ZCB di durata 2 anni	900		-X
Posizione netta	0	0	0

Tasso forward implicito(segue)

X deve essere il montante di 900 derivante da un impiego fra 0 e 2, con fattore di montante il reciproco di B(0,2) = 0.8, in formule:

X = 900/0.8 = 1125

Da cui: $h^{(0)}(1,2) = 12.5\%$

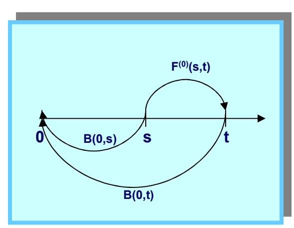
Avendo posto ***$F^{(0)}(1,2) = [1+h^{(0)}(1,2)]$, ossia il fattore di montante forward implicito***, si ha:

1125=1000 $F^{(0)}(1,2)$

$$F^{(0)}(1,2) = \frac{1125}{1000} = 1.125, \quad h^{(0)}(1,2) = 1.125 - 1 = \frac{1125}{1000} - 1 = \frac{0.9}{0.8} - 1 = 12.5\%$$

Impossibilità di arbitraggio , formalizzazione

In generale (con s<t):



$$F^{(0)}(s,t) = \frac{F^{(0)}(0,t)}{F^{(0)}(0,s)} = \frac{B(0,s)}{B(0,t)}$$

valendo

$$F^{(0)}(s,t) = \left[1 + h^{(0)}(s,t)\right]^{t-s}$$

il tasso $h^{(0)}(s,t)$ si deduce mediante

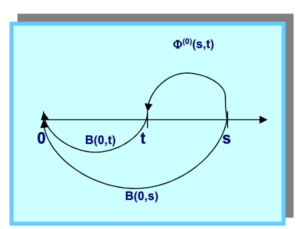
$$h^{(0)}(s,t) = \left[F^{(0)}(s,t)\right]^{\frac{1}{t-s}} - 1 = \left[\frac{B(0,s)}{B(0,t)}\right]^{\frac{1}{t-s}} - 1$$

$F^{(0)}(s,t)$ come fattore di montante di proseguimento

il *fattore di montante forward implicito* $F^{(0)}(s,t)$ risulta essere il *fattore di montante di proseguimento* della legge di capitalizzazione $F^{(0)}(0,t)$ ed è dunque scindibile.

Fattore di attualizzazione implicito $\Phi^{(0)}(s,t)$

Nel caso s>t si può definire il *fattore di attualizzazione forward implicito* $\Phi^{(0)}(s,t)$:



$$\Phi^{(0)}(s,t) = \frac{F^{(0)}(0,t)}{F^{(0)}(0,s)} = \frac{B(0,s)}{B(0,t)} \qquad s > t$$

valendo

$$\Phi^{(0)}(s,t) = \left[1 + h^{(0)}(s,t)\right]^{t-s}$$

il tasso $h^{(0)}(s,t)$ si deduce mediante

$$h^{(0)}(s,t) = \left[\Phi^{(0)}(s,t)\right]^{\frac{1}{t-s}} - 1 = \left[\frac{B(0,s)}{B(0,t)}\right]^{\frac{1}{t-s}} - 1$$

Fattore di scambio implicito $L^{(0)}(s,t)$ (continua)

Si può definire il *fattore di scambio $L^{(0)}(s,t)$ di proseguimento* ed il corrispondente tasso di interesse forward *$h^{(0)}(s,t)$ implicito* come segue:

$$L^{(0)}(s,t) = \frac{B(0,s)}{B(0,t)} = \begin{cases} F^{(0)}(s,t) & s<t \\ 1 & s=t \\ \Phi^{(0)}(s,t) & s>t \end{cases}$$

$$h^{(0)}(s,t) = \left[L^{(0)}(s,t)\right]^{\frac{1}{t-s}} - 1 = \left[\frac{B(0,s)}{B(0,t)}\right]^{\frac{1}{t-s}} - 1 \qquad s \neq t$$

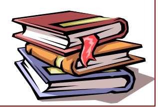
Fattore di scambio implicito $L^{(0)}(s,t)$ (segue)

E' così definita una legge finanziaria a tre variabili, essendo la terza variabile l'istante 0 in cui il mercato valuta i fattori di scambio e, per comodità, può essere pensato come la data di quotazione dei prezzi B(0,t) degli ZCB: risulta evidente che, cambiando la data delle quotazioni queste cambiano e, con esse, cambia la legge $L^{(0)}(s,t)$

Struttura dei tassi piatta

DEFINIZIONE:

Una struttura di tassi per scadenza si dice *piatta nell'intervallo (s,t)* se tutti i tassi forward uniperiodali $h^{(0)}(u-1,u)$, $u = s+1, s+2, \ldots, t$ sono eguali fra loro.



Struttura completa dei tassi di interesse e diverse modalità di definizione

La struttura dei tassi di interesse può essere definita in diversi modi:

a. **partendo dai prezzi degli ZCB**
b. **partendo dai tassi a scadenza**
c. **partendo dai tassi di interesse forward uniperiodali**

a. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai prezzi degli zero coupon bond, esempio (continua)

Sia dato il seguente profilo dei prezzi degli zero coupon bond presenti sul mercato:

t	0	1	2	3	4	5
B(0,t)	1	0,94	0,8834	0,83	0,779	0,7316

a. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai prezzi degli zero coupon bond, esempio (segue)

La tabella dei fattori di scambio impliciti $L^{(0)}(s,t)=B(0,s)/B(0,t)$ risulta:

B(0,t)	1	0,94	0,89	0,83	0,779	0,7316
s\t s\t	0	1	2	3	4	5
0	1	1,0638	1,1236	1,2048	1,2837	1,3669
1	0,94	1	1,0562	1,1325	1,2067	1,2849
2	0,89	0,946809	1	1,0723	1,1425	1,2165
3	0,83	0,882979	0,932584	1	1,0655	1,1345
4	0,779	0,828723	0,875281	0,938554	1	1,0648
5	0,7316	0,778298	0,822022	0,881446	0,939153	1

a. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai prezzi degli zero coupon bond, esempio (segue)

I corrispondenti tassi forward impliciti $h^{(0)}(s,t)=L^{(0)}(s,t)^{1/(t-s)}-1$ sono:

s\t	0	1	2	3	4	5
0		6,3830%	6,3950%	6,4079%	6,4426%	6,4499%
1	6,3830%		6,4070%	6,4204%	6,4625%	6,4666%
2	6,3950%	6,4070%		6,4337%	6,4902%	6,4865%
3	6,4079%	6,4204%	6,4337%		6,5468%	6,5129%
4	6,4426%	6,4625%	6,4902%	6,5468%		6,4791%
5	6,4499%	6,4666%	6,4865%	6,5129%	6,4791%	

Spot rates

b. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai tassi a scadenza, esempio (continua)

Siano assegnati i tassi a scadenza:

t	0	1	2	3	4	5
$h^{(0)}(0,t)$		6%	6,20%	6,35%	6,45%	6,52%

b. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai tassi a scadenza, esempio (segue)

t	0	1	2	3	4	5
$h^{(0)}(0,t)$	0	6%	6.20%	6.25%	6.45%	6.52%
B(0,t)	1	0.9434	0.8866	0.8314	0.7788	0.7292

I valori dei prezzi B(0,t) si calcolano mediante la formula:

$$B(0,t) = [1+h(0,t)]^{-t}$$

calcolati i prezzi, il procedimento continua come prima

b. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai tassi a scadenza, esempio (segue)

La tabella dei fattori di scambio impliciti $L^{(0)}(s,t)=B(0,s)/B(0,t)$ risulta:

s\t	0	1	2	3	4	5
0	1	1,0600	1,1278	1,2029	1,2841	1,3714
1	0,943396	1	1,0640	1,1348	1,2114	1,2937
2	0,886647	0,939846	1	1,0665	1,1385	1,2159
3	0,831357	0,881238	0,937641	1	1,0675	1,1401
4	0,778785	0,825512	0,878348	0,936763	1	1,0680
5	0,729196	0,772948	0,822419	0,877115	0,936326	1

b. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai tassi a scadenza, esempio (segue)

La struttura completa dei tassi $h^{(0)}(s,t)=L^{(0)}(s,t)^{1/(t-s)}-1$:

s\t	0	1	2	3	4	5
0		6,0000%	6,2000%	6,3500%	6,4500%	6,5200%
1	6,0000%		6,4004%	6,5254%	6,6004%	6,6504%
2	6,2000%	6,4004%		6,6506%	6,7006%	6,7339%
3	6,3500%	6,5254%	6,6506%		6,7506%	6,7755%
4	6,4500%	6,6004%	6,7006%	6,7506%		6,8005%
5	6,5200%	6,6504%	6,7339%	6,7755%	6,8005%	

c. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai tassi di interesse forward uniperiodali, formalizzazione (continua)

Poiché $F^{(0)}(s,t)$ è scindibile si ha:

$F^{(0)}(s,t) = F^{(0)}(s,s+1)F^{(0)}(s+1,s+2)\dots F^{(0)}(t-1,t)$

la corrispondente relazione fra i tassi risulta:

$[1+h^{(0)}(s,t)]^{t-s} = [1+h^{(0)}(s,s+1)]\,[1+h^{(0)}(s+1,s+2)]\dots\,[1+h^{(0)}(t-1,t)]$

Il tasso di interesse composto $h^{(0)}(s,t)$, per impieghi da s a t, è una *media alla Chisini* dei tassi di interesse di periodo $h^{(0)}(s,s+1)$, $h^{(0)}(s+1,s+2)$,…, $h^{(0)}(t-1,t)$ e con *funzione invariante della media* il fattore di montante da s a t, $F^{(0)}(s,t)$.

c. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai tassi di interesse forward uniperiodali, formalizzazione (segue)

Quindi si ha:

$$1+h^{(0)}(s,t)=\sqrt[t-s]{\left[1+h^{(0)}(s,s+1)\right]\left[1+h^{(0)}(s+1,s+2)\right]\ldots\left[1+h^{(0)}(t-1,t)\right]}=$$

$$=\sqrt[t-s]{\prod_{u=s+1}^{t}\left[1+h^{(0)}(u-1,u)\right]}$$

Il fattore di montante unitario *1+h⁽⁰⁾(s,t)* è dunque una media geometrica dei fattori di montante uniperiodali calcolati mediante i singoli *tassi di periodo* o *forward impliciti*

c. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai tassi di interesse forward uniperiodali, formalizzazione (segue)

Il tasso di interesse fra *s* e *t* in funzione dei singoli tassi periodali è dunque:

$$h^{(0)}(s,t)=\sqrt[t-s]{\prod_{u=s+1}^{t}\left[1+h^{(0)}(u-1,u)\right]}-1$$

!

Se s = 0 si ottengono i *tassi a scadenza* o *spot rates*:

$$h^{(0)}(0,t)=\sqrt[t-s]{\prod_{u=1}^{t}\left[1+h^{(0)}(u-1,u)\right]}-1$$

c. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai tassi di interesse forward uniperiodali, formalizzazione (segue)

E' possibile quindi definire l'intera struttura dei tassi di interesse come segue:

$$L^{(0)}(s,t)=\frac{F^{(0)}(0,t)}{F^{(0)}(0,s)},$$

Dove

$$F^{(0)}(0,t)=\prod_{s=1}^{t}\left(1+h^{(0)}(s-1,s)\right)=\left(1+h^{(0)}(0,1)\right)\left(1+h^{(0)}(1,2)\right)\ldots\left(1+h^{(0)}(t-1,t)\right)$$

Effettuando le opportune sostituzioni si ottiene…

c. Definizione della struttura dei tassi di interesse a partire dai tassi di interesse forward uniperiodali, formalizzazione (segue)

$$L^{(0)}(s,t)=\begin{cases}\dfrac{\overbrace{\left(1+h^{(0)}(0,1)\right)\left(1+h^{(0)}(1,2)\right)\ldots\left(1+h^{(0)}(t-1,t)\right)}^{t\ fattori}}{\underbrace{\left(1+h^{(0)}(0,1)\right)\left(1+h^{(0)}(1,2)\right)\ldots\left(1+h^{(0)}(s-1,s)\right)}_{s\ fattori}}= \\ \quad =\underbrace{\left(1+h^{(0)}(s,s+1)\right)\left(1+h^{(0)}(s+1,s+2)\right)\ldots\left(1+h^{(0)}(t-1,t)\right)}_{t-s\ fattori}\equiv F^{(0)}(s,t) & s<t \\ 1 & s=t, \\ \dfrac{\overbrace{\left(1+h^{(0)}(0,1)\right)\left(1+h^{(0)}(1,2)\right)\ldots\left(1+h^{(0)}(t-1,t)\right)}^{t\ fattori}}{\underbrace{\left(1+h^{(0)}(0,1)\right)\left(1+h^{(0)}(1,2)\right)\ldots\left(1+h^{(0)}(s-1,s)\right)}_{s\ fattori}}= \\ \quad =\dfrac{1}{\underbrace{\left(1+h^{(0)}(t,t+1)\right)\left(1+h^{(0)}(t+1,t+2)\right)\ldots\left(1+h^{(0)}(s-1,s)\right)}_{s-t\ fattori}}\equiv \Phi^{(0)}(s,t) & s>t\end{cases}$$

Par.6.2.1