Università degli Studi di Torino Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche, Naturali Corso di Laurea Specialistica in Matematica

ANALISI SUPERIORE

Prof. Elena Cordero e Luigi Rodino

Appunti a cura degli studenti

Anno accademico 2008-2009

Indice

1	Insiemi, funzioni misurabili	1				
	1.1 Preliminari	1				
	1.2 La misura esterna	3				
	1.3 Insiemi misurabili	8				
	1.4 Funzioni misurabili	10				
2	Integrale di Lebesgue	15				
	2.1 Definizioni e proprietà dell'integrale	15				
	2.2 Passaggio al limite sotto il segno	19				
3	Gli spazi L^p	24				
	3.1 Prime definizioni	24				
	3.2 Proprietà degli spazi L^p	27				
4	Completezza degli spazi L^p	35				
5	L^2 e densità in L^p	46				
	5.1 Lo spazio L^2	46				
	5.2 Densità in L^p	49				
6	La convoluzione	58				
	6.1 Operatori di traslazione	58				
	6.2 Operatori di convoluzione	61				
7	La trasformata di Fourier	66				
	7.1 La classe di Schwartz	66				
	7.2 La trasformata di Fourier	68				
	7.3 Il teorema di inversione	75				
	7.4 Convergenza di funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	77				
8	Lo spazio delle distribuzioni temperate $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$					
	8.1 Introduzione alle distribuzioni					
	8.2 Prime definizioni ed esempi	84				
	8.3 Operatori in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	87				

	8.4	La trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	90
	8.5	Convoluzione e trasformata di Fourier	93
	8.6	La trasfomata di Fourier in L^2	100
	8.7	La trasformata di Fourier in L^p	103
	8.8	Esempi ed applicazioni	103
9	Gli	spazi di Sobolev	105
		9.0.1 Trasformate di Fourier delle funzioni in $H^m(\mathbb{R}^n)$	108
	9.1	Il teorema di inclusione di Sobolev	111
10	Ope	ratori Pseudo-differenziali	112
	10.1	Operatori pseudo-differenziali come operatori di convoluzione	116
	10.2	Problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger	117
	10.3	Esistenza e unicità della soluzione di equazioni pseudo-differenziali	119
	10.4	Esempi ed esercizi	123
	10.5	Cenni sugli operatori pseudo-differenziali a coefficienti non costanti	128

Capitolo 1

Insiemi, funzioni misurabili

1.1 Preliminari

Per poter introdurre l'integrale di Lebesgue, diamo innanzitutto una motivazione per abbandonare l'integrale di Riemann in favore di tale integrale. I motivi principali sono tre:

- 1) La classe delle funzioni Riemann integrabili R([a,b]), $a,b \in \mathbb{R}$, non é completa rispetto alla norma $||f||_1 = \int_a^b |f(x)| dx$.
- 2) Allargare la classe delle funzioni integrabili. ESEMPIO:

Un esempio di funzione che non è Riemann integrabile ma, come vedremo in seguito, è Lebesgue integrabile, è la cosiddetta funzione di Dirichlet:

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & se & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & se & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Denotiamo con P una partizione dell'intervallo [0,1]:

$$P: x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 1.$$

Chiamiamo $\Delta_i := [x_i, x_{i+1})$, per $i = 0, \dots, n-2$ e $\Delta_{n-1} := [x_{n-1}, x_n]$. Calcolimo l'integrale superiore: $\overline{\int}_0^1 f(x) dx$. Innanzitutto, la somma superiore S_P è data da

$$S_P(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in \Delta_i} f(x)(x_{i+1} - x_i).$$

Siccome l'insieme \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} , per ogni intervallino Δ_i esiste un $r_i \in \Delta_i$ tale che $r_i \in \mathbb{Q}$, quindi:

$$S_P = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = 1.$$

Poiché questo discorso vale per ogni partizione P, si ha

$$\overline{\int}_{0}^{1} f(x)dx = \inf_{P} S_{P}(f) = 1.$$

Calcoliamo l'integrale inferiore: $\underline{\int}_0^1 f(x) dx$. La somma inferiore s_P è data da

$$s_P(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in \Delta_i} f(x)(x_{i+1} - x_i) = 0$$
 $\forall P$

quindi $\underline{\int}_{0}^{1} f(x)dx = \sup_{P} s_{P}(f) = 0.$

Siccome l'integrale superiore e l'integrale inferiore sono diversi, $f \notin R([0,1])$.

3) Vorremmo che l'ugualianza

$$\int_{a}^{b} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) dx = \lim_{n \to \infty} \int_{a}^{b} f_n(x) dx \tag{1.1}$$

valesse sotto condizioni più deboli di quelle dell'integrale di Riemann. Precisamente, per l'integrale di Riemann, una condizione sufficiente per la (1.1) è la seguente: $f_n \in C([a,b])$ e f_n coverge ad f uniformemente su [a,b]. Tale condizione è molto forte e non sempre verificata, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO:

Sia $f_n(x) = x^n$ su [0, 1]. Calcoliamo l'integrale di Riemann:

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

La successione x^n é puntualmente convergente alla funzione:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & se & 0 \le x < 1 \\ 1 & se & x = 1. \end{cases}$$

Poiché $f_n(x) \in C([0,1])$, mentre $f(x) \notin C([0,1])$, non c'è convergenza uniforme.

Non essendo soddisfatta la condizione di convergenza uniforme non possiamo applicare (1.1).

Osserviamo però che vale l'ugualianza:

$$0 = \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1}.$$

Vedremo che l'integrale di Lebesgue in questo caso consente il passaggio del limite sotto il segno d'integrale.

1.2 La misura esterna

Definizione 1.2.1. Sia X un insieme e sia P(X) l'insieme delle parti di X. $m \subseteq P(X)$ è una σ -algebra se:

- 1) $X \in m$,
- 2) m è chiusa rispetto all'operazione di complementazione: $A \in m \Rightarrow CA \in m$,
- 3) $m \ \dot{e} \ chiusa \ rispetto \ ad \ unioni \ numerabili: \ A_i \in m, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in m.$

La coppia (X, m) prende il nome di spazio misurabile e gli elementi di m si dicono insiemi misurabili.

Ricordiamo anche la definizione di spazio topologico.

Definizione 1.2.2. Sia X un insieme e sia P(X) l'insieme delle parti di X. Una famiglia $\tau \subseteq P(X)$ è una topologia se:

- 1) $X, \phi \in \tau$,
- 2) Se $A_1, ..., A_n \in \tau$, allora $A_1 \cap ... \cap A_n \in \tau$,
- 3) Se $\{A\}_{\alpha \in A} \subseteq \tau$, allora $\bigcup_{\alpha \in A} A_{\alpha} \in \tau$. (Osserviamo che l'unione potrebbe essere non numerabile).

La coppia (X, τ) prende il nome di spazio topologico.

Su di uno spazio misurabile (X,m), si può definire una misura μ nel modo seguente:

Definizione 1.2.3. Sia (X,m) un insieme misurabile. La funzione $\mu: m \to [0,+\infty]$ è una misura se verifica:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$
- 2) Se $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ è una successione di insiemi misurabili a 2 a 2 disgiunti, ovvero $E_i \cap E_j = \emptyset$, se $i \neq j$, allora

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$
 (1.2)

La proprietà (1.2) è detta σ -additività della misura m.

Il nostro prossimo obiettivo sarà la definizione di una misura sullo spazio \mathbb{R}^n .

Innannzitutto, fissiamo le seguenti notazioni. Sia $E \in \mathbb{R}^n$, insieme elementare, indichiamo la misura euclidea di E con |E|.

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$; definiamo

$$d(x,y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Vediamo ora di calcolare la misura euclidea degli insiemi elementari. Se n=1 gli insiemi elementari sono intervalli. Se l'insieme E è del tipo

$$E = [a, b], [a, b), (a, b], (a, b),$$

in tutti i casi

$$|E| = b - a$$

ovvero gli estremi dell'insieme E non influiscono sulla misura elementare.

In dimensione n=2 gli insiemi elementari sono rettangoli, quadrati e cerchi. Studiamo i rettangoli. Se $R=[a,b]\times [c,d]$, la misura euclidea di R coincide con l'area di R quindi

$$|R| = (b-a)(d-c).$$

Tale misura si estende anche al caso n > 2, dove il rettangolo $R \subset \mathbb{R}^n$ è dato da $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$, e risulta

$$|R| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Ricordiamo che un punto $x \in E$ si dice interno ad E se esiste r > 0 tale che la palla di centro x e raggio r, $B_r(x)$, è inclusa in E.

Indichiamo l'interno di E, ovvero l'insieme dei punti interni di E, con $\stackrel{\circ}{E}$. La misura euclidea gode della proprietà di additività:

se
$$R = \bigcup_{i=1}^{N} R_i$$
 e $\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \phi$ per ogni $i \neq j$, allora $|R| = \sum_{i=1}^{N} |R_i|$.

Ci proponiamo ora di definire un'applicazione μ^* , che chiameremo misura esterna, tale che:

- 1) Sia definita su ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$;
- 2) Se R è il rettangolo in \mathbb{R}^n , $\mu^*(R) = |R|$.

Definizione 1.2.4. si dice **misura** esterna di $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |R_i|, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right\}$$

dove R_i sono rettangoli chiusi.

Proprietà 1.2.5. La funzione μ^* è monotona:

$$A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B). \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Se $A \subset B$, ogni ricoprimento di B è anche ricoprimento di A. \square

Proprietà 1.2.6. Se R è un rettangolo chiuso, $\mu^*(R) = |R|$.

Dimostrazione. Si ha $\mu^*(R) \leq |R|$, perchè R è un ricoprimento rettangolare di se stesso e la disugualianza è giustificata dal significato di estremo inferiore nella definizione di μ^* . Resta da dimostrare che $|R| \leq \mu^*(R)$. Consideriamo un arbitrario ricoprimento \tilde{R}_j con $j=1,...,\infty$, risulta $R \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{R}_j$ e vogliamo provare che $|R| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{R}_j|$.

Sia $\epsilon > 0$, per ogni \tilde{R}_j consideriamo il rettangolo aperto S_j tale che $|S_j| = (1 + \epsilon)|\tilde{R}_j|$.

 $R \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{R}_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$. Ma R è un compatto e S_j è un suo ricoprimento aperto, possiamo quindi estrarre un suo sottoricoprimento finito: S_j , con i = 1..N. Essendo $R \subset \bigcup_{j=1}^{N} S_j$, risulta

$$|R| \le \sum_{j=1}^{N} |S_j| = \sum_{j=1}^{N} (1+\epsilon)|\tilde{R}_j| \le \sum_{j=1}^{\infty} (1+\epsilon)|\tilde{R}_j| = (1+\epsilon)\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{R}_j|.$$

Facendo tendere $\epsilon \to 0$, si ottiene $|R| \le \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{R}_j|$.

Per l'arbitrarietà del ricoprimento \tilde{R}_j , segue $|R| \leq \mu^*(R)$. In conclusione risulta $\mu^*(R) = |R|$.

Corollario 1.2.7. $\mu^*(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Il punto x è un rettangolo degenere di \mathbb{R}^n , quindi il risultato segue dalla proprietà precedente.

ESERCIZIO:

Dimostrare che $\mu^*(R) = |R|$ per ogni rettangolo R.

Soluzione. Sia \bar{R} la chiusura di R, allora $R \subseteq \bar{R}$ e, per la monotonia della funzione μ^* , si ha $\mu^*(R) \le \mu^*(\bar{R}) = |\bar{R}| = |R|$. Proviamo il viceversa. Per ogni $\epsilon > 0$, è possibile trovare un rettangolo chiuso $R_{\epsilon} \subset R$ tale che $|R| \le |R_{\epsilon}| + \epsilon$. Preso un ricoprimento $\{R_i\}$ di R, $\{R_i\}$ è anche un ricoprimento di R_{ϵ} e si ha

$$|R| \le |R_{\epsilon}| + \epsilon = \mu^*(R_{\epsilon}) + \epsilon \le \sum_{j=1}^{\infty} |R_j| + \epsilon.$$

Passando al limite per $\epsilon \to 0$, si ottiene $|R| \le \sum_{j=1}^{\infty} |R_j|$, da cui $|R| \le \mu^*(R)$ e quindi $\mu^*(R) = |R|$.

ESERCIZIO:

Si definisce contenuto esterno di Jordan di $E \subseteq \mathbb{R}$:

$$J_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^N |I_j|, E \subset \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ interval o chius o} \right\}$$

- i) Dimostrare che $J_*(E) = J_*(\bar{E});$
- ii) Trovare un insieme E numerabile contenuto in [0,1] tale che $J_*(E)=1$ e $\mu^*(E)=0$.

 Soluzione.
- i) Dimostriamo che $J_*(E) = J_*(\bar{E})$, ovvero che il contenuto esterno di Jordan di un insieme coincide col contenuto esterno di Jordan della chiusura dell'insieme. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, \bar{E} la sua chiusura quindi $E \subseteq \bar{E}$. Per ogni ricoprimento $\{I_j\}$ di \bar{E} , $\{I_j\}$ è anche ricoprimento di E quindi $J_*(E) \leq J_*(\bar{E})$. Viceversa, per ogni ricoprimento $\{I_j\}$ di E deve essere $E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$ quindi, passando alla chiusura, $\bar{E} \subseteq \overline{\bigcup_{j=1}^N I_j} = \bigcup_{j=1}^N I_j$ perchè gli I_j sono chiusi e l'unione è finita. Segue che $J_*(\bar{E}) \leq J_*(E)$. Unendo i due risultati, $J_*(E) = J_*(\bar{E})$.
- ii) Scegliamo l'insieme: $E=\mathbb{Q}\cap[0,1]$, ovvero $E=\cup_{n,m}\{\frac{m}{n}\}$ con $n\neq 0$ e $m\leq n$. Risulta $\mu^*(E)\leq \sum_{n,m}\left|\left\{\frac{m}{n}\right\}\right|=0$ perchè la misura esterna di un punto è nulla, quindi $\mu^*(E)=0$. Usiamo ora il punto (i). Poichè $\mathbb Q$ è un sottoinsieme denso di $\mathbb R$, risulta $\bar E=[0,1]$ quindi $J_*(E)=J_*(\bar E)=1$.

Proposizione 1.2.8. La funzione μ^* è σ -subadditiva:

$$E = \bigcup_{i=i}^{\infty} E_i \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(E) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $E=\cup_{i=1}^{\infty}E_{i}.$ Per ogni E_{i} deve valere l'ugualianza:

$$\mu^*(E_i) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |R_{i,k}|, \quad E_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{i,k} \right\}.$$

Per ogni $\epsilon > 0$, deve esistere un ricoprimento $\{R_{i,k}\}_k$ di E_i tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_{i,k}| \le \mu^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Quindi,

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{i,k}.$$

Allora.

$$\mu^*(E) \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |R_{i,j}| \le \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \epsilon.$$

Facendo tendere $\epsilon \to 0$, si ottiene la tesi.

Proprietà 1.2.9. *Se* $E = E_1 \cup E_2$, *con* $d(E_1, E_2) > 0$, *allora*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$d(E_1, E_2) = \inf_{x_1 \in E_1, x_2 \in E_2} |x_1 - x_2|,$$

$$con |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Per la subaddività di μ^* , si ha $\mu^*(E) \leq \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$. Proviamo la disuguaglianza opposta. Sia $\delta > 0$, tale che $d(E_1, E_2) > \delta$. Per ogni $\epsilon > 0$, esiste un ricoprimento $\{R\}_i$ di E tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} |R_i| \le \mu^*(E) + \epsilon.$$

Possiamo supporre, eventualmente suddividendo ulteriormente i rettangoli, che diam $(R_i) = \sup_{x,y \in R_1} |x-y| < \delta$. Quindi, ogni R_i interseca al più uno dei due insiemi E_1 , E_2 . Se indichiamo con J_1 (rispettivamente J_2) l'insieme degli indici per cui R_i interseca E_1 (risp. E_2), abbiamo

$$E_1 = \bigcup_{i \in J_1} R_i, \quad E_2 = \bigcup_{i \in J_2} R_i.$$

Quindi

$$\mu^{*}(E_{1}) + \mu^{*}(E_{2}) \leq \sum_{i \in J_{1}} |R_{i}| + \sum_{i \in J_{2}} |R_{i}|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |R_{i}|$$
$$\leq \mu^{*}(E) + \epsilon$$

Facendo tendere $\epsilon \to 0$, si ottiene la tesi.

La misura μ^* gode di proprietà di additività non solo nel caso precedente, ma anche quando gli insiemi in questione hanno una struttura particolare, come mostra il seguente risultato (per la dimostrazione, si rimanda a [2]).

Proprietà 1.2.10. Se $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$, $e \stackrel{\circ}{R_i} \cap \stackrel{\circ}{R_j} = \emptyset$, se $i \neq j$, allora

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|.$$

Tuttavia, in generale, μ^* non è additiva. Vediamo quindi di restringere μ^* ad una classe di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n che la renda additiva.

1.3 Insiemi misurabili

Definizione 1.3.1. Sia (X, τ) uno spazio topologico, si chiama σ -algebra dei boreliani \mathcal{B} la più piccola σ -algebra che contiene la topologia τ .

Definizione 1.3.2. Sia (X, τ) spazio topologico, se $A_i \subset \tau$, $i \in \mathbb{N}$, l'insieme G_{σ} è definito da

$$G_{\sigma} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \tag{1.4}$$

mentre, presa $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ famiglia di chiusi, definiamo F_{σ} l'insieme

$$F_{\sigma} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i. \tag{1.5}$$

Consideriamo ora $X = \mathbb{R}^n$ e costruiamo la σ -algebra di insiemi misurabili.

Definizione 1.3.3. Dato l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e indicato con A^C il suo complementare in \mathbb{R}^n , A si dice misurabile se per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C). \tag{1.6}$$

Si presti attenzione al fatto che l'equazione precedente non è verificata da ogni insieme.

Introduciamo ora un **criterio di misurabilità** per gli insiemi.

Proposizione 1.3.4. L'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un aperto \mathcal{O}_{ϵ} tale che $A \subseteq \mathcal{O}_{\epsilon}$ e $\mu^*(\mathcal{O}_{\epsilon} \setminus A) < \epsilon$.

Se A è misurabile, la **misura di Lebesgue** μ di A si definisce come

$$\mu(A) = \mu^*(A). \tag{1.7}$$

Esempio 1.3.5. 1) Tutti gli aperti di \mathbb{R}^n sono misurabili, in particolare i rettangoli aperti. 2) Tutti i complementari di insiemi misurabili sono misurabili, come si vede dalla (1.6). In particolare, i chiusi sono misurabili.

Vediamo ora alcune proprietà della misura di Lebesgue.

Teorema 1.3.6 (Teorema di Caratheodory). 1) La famiglia \mathcal{L} di insiemi misurabili è una σ -algebra. 2) La misura di Lebesgue μ è una misura σ -additiva su \mathcal{L} .

Corollario 1.3.7. La misura di Lebesgue \mathcal{L} è un'estensione della misura elementare (euclidea).

Proposizione 1.3.8. I compatti sono misurabili ed hanno misura finita.

Dimostrazione. Ricordiamo che un insieme K di \mathbb{R}^n è un compatto se e solo se è limitato e chiuso. Se K è chiuso, abbiamo visto che K è misurabile. Inoltre, in quanto compatto, esiste un quadrato n-dimensionale Q_N che lo contiene, ovvero

$$K \subseteq Q_N = [-N, N] \times [-N, N] \times \dots \times [-N, N]. \tag{1.8}$$

Poiché la misura elementare di Q_N è $|Q_N| = \mu(Q_N) = (2N)^n < +\infty$, per la monotonia della misura di Lebesgue possiamo concludere che

$$\mu(K) \leqslant \mu(Q_N) < +\infty. \tag{1.9}$$

e perciò K ha misura finita.

Proposizione 1.3.9. Si ha

$$\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty.$$

Dimostrazione. \mathbb{R}^n è aperto, quindi \mathbb{R}^n misurabile. Inoltre, $\forall N \in \mathbb{N}$ $Q_N \subseteq \mathbb{R}^n$, perciò, per la monotonia di μ , risulta

$$(2N)^n = \mu(Q_N) \leqslant \mu(\mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

Passando al limite per

$$N \to +\infty$$
, si ottiene $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

Esempio 1.3.10. Si può verificare che ogni semiretta $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, ha misura infinita. Basta mostrare che contiene tutti i chiusi del tipo $[a + \epsilon, N]$, con $\epsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, e passando al limite per $N \to +\infty$.

Enunciamo alcune importanti proprietà della misura μ , per la dimostrazione, si veda ad esempio [2].

Proposizione 1.3.11 (Unicità di μ). Se λ è una misura σ -additiva su \mathcal{L} e tale che $\lambda(R) = |R|$, allora $\lambda = \mu$.

Proposizione 1.3.12 (σ -finitezza di μ). È possibile ricoprire \mathbb{R}^n con insiemi di misura finita (μ è σ -finita). In particolare,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{N=1}^{\infty} Q_N, \tag{1.11}$$

con Q_N quadrati n-dimensionali.

Proposizione 1.3.13 (Regolarità di μ). Per ogni $E \in \mathcal{L}$, si ha:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(\mathcal{O}), \mathcal{O} \text{ aperto } e E \subseteq \mathcal{O}\}$$
 (1.12)

$$= \sup\{\mu(K), K \text{ compatto, con } K \subseteq E\}. \tag{1.13}$$

Proposizione 1.3.14 (Invarianza di μ per traslazioni). Per ogni $E \in \mathcal{L}$, l'insieme $E + h = \{x + h, x \in E\}$ è misurabile e risulta:

$$\mu(E+h) = \mu(E). \tag{1.14}$$

Proposizione 1.3.15. Sia $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ una catena ascendente infinita di sottoinsiemi appartenenti ad \mathcal{L} . Allora:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i \to +\infty} \mu(E_i). \tag{1.15}$$

Proposizione 1.3.16. Sia $E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$ una catena discendente infinita di sottoinsiemi appartenenti ad \mathcal{L} . Se esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_k) < +\infty$, allora:

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i \to +\infty} \mu(E_i). \tag{1.16}$$

Esempio 1.3.17. La proprietà precendente non vale con gli insiemi $E_n = [n, +\infty)$, perchè hanno misura infinita per ognin $\in \mathbb{N}$. Osserviamo invece che $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ e $\mu(\emptyset) = 0$.

1.4 Funzioni misurabili

Definizione 1.4.1. Una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ si dice **misurabile** se:

$$\forall \sigma \ aperto \ di \ \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(\sigma) \ \dot{e} \ misurabile.$$
 (1.17)

Proposizione 1.4.2. Se la funzione f è continua, f è anche misurabile.

Dimostrazione. Una funzione f è continua se le controimmagini di suoi aperti sono ancora aperti, e tali controimmagini sono anche misurabili, perchè aperti, perciò, per la (1.17), f è misurabile.

Teorema 1.4.3 (Criterio di misurabilità). Data $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. f misurabile.

2.
$$f^{-1}((a,+\infty)) = \{x \in E, f(x) > a\}$$
 è misurabile, $\forall a \in \mathbb{R}$.

- 3. $f^{-1}([a,+\infty))$ è misurabile, $\forall a \in \mathbb{R}$.
- 4. $f^{-1}([-\infty, a))$ è misurabile, $\forall a \in \mathbb{R}$.
- 5. $f^{-1}([-\infty, a])$ è misurabile, $\forall a \in \mathbb{R}$.

A partire da funzioni misurabili, possiamo ricavare altre funzioni misurabili, attraverso operazioni quali la combinazione lineare, il passaggio al limite, e così via. Vediamo allora alcune proprietà.

Proposizione 1.4.4. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili. Allora le funzioni:

$$\sup_{n} f_{n}, \quad \inf_{n} f_{n}, \quad \lim_{n} \sup_{n} f_{n}, \quad \lim_{n} \inf_{n} f_{n}$$
 (1.18)

sono misurabili.

Proposizione 1.4.5. Siano f, g funzioni misurabili. Allora, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ le funzioni:

$$\lambda f + \mu g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \ (con \ g \neq 0),$$
 (1.19)

sono misurabili.

Passiamo ora a definire le funzioni semplici.

Definizione 1.4.6. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, con $E_j \cap E_k = \emptyset$, se $j \neq k$. Si dice funzione semplice la funzione $s : E \to \mathbb{C}$,

$$s = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{E_j},\tag{1.20}$$

dove $\alpha_i \in \mathbb{C}$ e

$$\chi_{E_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E_j \\ 0 & \text{se } x \in E \setminus E_j \end{cases}$$
 (1.21)

Proposizione 1.4.7. Le funzioni semplici sono misurabili.

Dimostrazione. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, dimostriamo dapprima che $\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è misurabile. Usiamo il criterio di misurabilità (Teorema 1.4.3): proviamo che, $\forall a \in \mathbb{R}, \chi_E^{-1}\{(a, +\infty)\}$ è misurabile. Distinguiamo i tre casi:

• Se $a \ge 1$ allora $\chi_E^{-1}(a, +\infty) = \emptyset$, che è misurabile.

- Se $0 \le a < 1$, $\chi_E^{-1}(a, +\infty) = E$, misurabile per ipotesi.
- Se a < 0, $\chi_E^{-1}(a, +\infty) = \mathbb{R}$, che è misurabile.

Poichè la funzione s è combinazione lineare di funzioni misurabili, per la Proposizione 1.4.5 è misurabile.

Riprendendo un esempio citato nella prima sezione del testo, è importante rilevare che attraverso l'uso di funzioni semplici possiamo misurare insiemi che l'integrale di Riemann non riesce a misurare, come nel caso della **funzione di Dirichlet**.

Esempio 1.4.8. Sia $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, la funzione di Dirichlet, definita da

$$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & se \ x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & se \ x \notin \mathbb{Q}\cap[0,1] \end{array} \right.$$

Osserviamo che

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{\substack{m,n \in \mathbb{N} \\ n > 0 \\ m \le n}} \left\{ \frac{m}{n} \right\}. \tag{1.22}$$

Calcoliamo la misura di $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$:

$$\mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \mu\left(\bigcup_{\substack{m,n \in \mathbb{N} \\ n > 0 \\ m \leqslant n}} \left\{\frac{m}{n}\right\}\right) = \sum_{m,n} \mu\left(\left\{\frac{m}{n}\right\}\right) = 0, \tag{1.23}$$

per la σ -additività della misura μ . Pertanto $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ è misurabile e ha misura nulla.

Proposizione 1.4.9. Sia f misurabile e non negativa $(f \ge 0)$. Allora esiste una successione monotona non decrescente $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici non negative che converge puntualmente ad f:

$$\lim_{m \to +\infty} s_m(x) = f(x). \tag{1.24}$$

Dimostrazione. Fissiamo m > 0 sull'asse delle ordinate, e suddividiamo l'intervallo [0, m] in una partizione di sottoinsiemi della forma $\Delta_{m,k} = \left(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$, con $k = 1, \ldots, m2^m - 1$ e $\Delta_{m,0} = \left[0, \frac{1}{m}\right]$.

 $k=1,\ldots,m2^m-1$ e $\Delta_{m,0}=[0,\frac{1}{m}].$ Definiamo gli insiemi $F_m=f^{-1}((m,+\infty))$ e $E_{m,k}=f^{-1}(\Delta_{m,k})$. F_m è misurabile per il Teorema 1.4.3. Inoltre,

$$E_{m,k} = f^{-1}(\Delta_{m,k}) = f^{-1}\left(\left(\frac{k}{2^m}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{k+1}{2^m}\right]\right)$$
 (1.25)

$$= f^{-1}\left(\left(\frac{k}{2^m}, +\infty\right)\right) \cap f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{k+1}{2^m}\right]\right)$$
 (1.26)

ovvero $E_{m,k}$ è l'intersezione di due insiemi misurabili (Teorema 1.4.3) ed è quindi misurabile.

Introduciamo quindi la funzione semplice

$$s_m = m\chi_{F_m} + \sum_{k=0}^{2^m m - 1} \frac{k}{2^m} \chi_{E_{m,k}}.$$
 (1.27)

Per costruzione, $s_m \leq s_{m+1}$; dimostriamo che $\lim_{m\to+\infty} s_m(x) = f(x)$. Fissato $x\in E$, prendiamo $m\in\mathbb{N}$ tale che f(x)< m. Allora $\exists k\mid x\in E_{m,k}$ e, per costruzione della s_m ,

$$0 \leqslant f(x) - s_m(x) \leqslant \frac{1}{2^m},\tag{1.28}$$

Passando al limite per $m \to +\infty$, si ha quindi

$$\lim_{m \to +\infty} f(x) - s_m(x) = 0. \tag{1.29}$$

Corollario 1.4.10. Se f è una funzione misurabile definita su di un insieme E misurabile, inoltre f è non negativa e limitata, ovvero esiste M > 0 tale che $0 \le f \le M$, allora $s_m \to f$ uniformemente.

Dimostrazione. Prendiamo m > M, allora $f(x) - s_m(x) \leqslant \frac{1}{2^m}, \forall x \in E$. Quindi:

$$\sup_{x \in E} |f(x) - s_m(x)| \le \frac{1}{2^m} \tag{1.30}$$

che, per $m \to +\infty$, tende a 0.

Proposizione 1.4.11. Sia $f: E \to \mathbb{R}$ misurabile, allora esiste una successione $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici tali che $\lim_{m\to+\infty} s_m(x) = f(x)$ (limite puntuale) e

$$|s_m| \leqslant |s_{m+1}| \leqslant |f|. \tag{1.31}$$

Dimostrazione. Definiamo la parte positiva di f:

$$f_{+} = \max\{f(x), 0\}, \tag{1.32}$$

misurabile per la (1.18), e la parte negativa di f:

$$f_{-} = \max\{-f(x), 0\}, \tag{1.33}$$

anch'essa misurabile per la (1.18). Si ha $f = f_+ - f_-$. Per la Proposizione 1.4.9, esistono due successioni di funzioni semplici $s_m^{(1)}$ e $s_m^{(2)}$, tali che:

$$s_m^{(1)} \to f_+ \quad \text{e} \quad s_m^{(2)} \to f_-,$$
 (1.34)

puntualmente. Introduciamo la funzione semplice differenza $s_m:=s_m^{(1)}-s_m^{(2)}$, allora, per costruzione, la successione s_m converge ad f puntualmente. Si ha

$$|s_m| = s_m^{(1)} + s_m^{(2)} \leqslant s_{m+1}^{(1)} + s_{m+1}^{(2)} = |s_{m+1}|,$$
 (1.35)

cio
è $\left\vert s_{m}\right\vert$ è monotona nondecrescente, e

$$|s_{m+1}| = s_{m+1}^{(1)} + s_{m+1}^{(2)} \le f_+ + f_- = |f|,$$
 (1.36)

che completa la dimostrazione.

Capitolo 2

Integrale di Lebesgue

La teoria classica dell'integrazione (dovuta fra gli altri a Cauchy e Riemann), pur fornendo uno strumento analitico molto potente, si rivela insufficiente sotto vari punti di vista, soprattutto per quanto riguarda le condizioni di passaggio al limite sotto il segno di integrale. In ambito matematico si è quindi avvertita la necessità di introdurre uno strumento più forte e maneggevole. Il passo fondamentale in questo senso è stato fatto da Lebesgue che, a partire dai primissimi anni del 1900, ha introdotto una nuova nozione di integrale. La teoria dell'integrale di Lebesgue ha conosciuto uno sviluppo velocissimo con il contributo di vari studiosi che, in breve tempo, hanno realizzato uno strumento versatile, il quale ha permesso di aprire nuove frontiere nella ricerca matematica. Inoltre, la nozione di integrale di Lebesgue si estende ad una classe di funzioni più grande della classe di Riemann. L'esempio classico, in questo senso è rappresentato dalla funzione di Dirichlet $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$:

$$\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

che non è Riemann integrabile, ma, come vedremo in seguito, è Lebesgue integrabile.

2.1 Definizioni e proprietà dell'integrale

Definizione 2.1.1. Sia s una funzione semplice e non negativa, ovvero

$$s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{E_k}$$

dove:

1.
$$\alpha_k \geq 0$$

- 2. E_k insiemi misurabili di \mathbb{R}^n
- 3. $E_i \cap E_k = \emptyset$, se $j \neq k$.

Posto $E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k$ si definisce integrale di Lebesgue di s la quantità

$$\int_{E} s \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, \mu(E_k),$$

 $con \mu(E_k)$ misura di Lebesgue di E_k .

L'integrale di Lebesgue di s potrà quindi essere una quantità reale non negativa, oppure $+\infty$.

Definizione 2.1.2. Una funzione s semplice e non negativa si dice Lebesgue-integrabile, se risulta:

$$\int_E s \, d\mu < +\infty.$$

Di conseguenza, se E è un insieme misurabile,

$$\int_{E} \chi_{E} d\mu = \mu(E),$$

quindi χ_E è integrabile se e solo se $\mu(E)<\infty$. Si può provare, usando l'additività della misura μ , che

Proposizione 2.1.3. L'integrale di Lebesgue di funzioni s semplici e non negative non dipende dalla partizione su cui è definita s.

Definizione 2.1.4. Sia f una funzione misurabile e non negativa definita su di un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, definiamo l'integrale di Lebesgue di f:

$$\int_{E} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_{E} s \, d\mu, \quad s \text{ semplice}, \quad 0 \le s \le f \right\}. \tag{2.1}$$

Se $\int_E f d\mu < +\infty$, f si dice integrabile secondo Lebesgue e il valore dell'integrale è dato da (2.1).

Lemma 2.1.5. L'integrale di Lebesgue di funzioni non negative gode delle proprietà di:

1. Additività: se $E = E_1 \cup E_2$, con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, insiemi misurabili, allora data f integrabile su E,

$$\int_{E} f \, d\mu = \int_{E_{1}} f \, d\mu + \int_{E_{2}} f \, d\mu.$$

2. Linearità: se f e g sono funzioni integrabili e $a,b \geq 0$, allora af + bg è integrabile e:

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

3. Monotonia: se $0 \le f \le g$, allora:

$$\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu.$$

Introduciamo ora l'integrale per le funzioni con segno.

Se f è una funzione misurabile, allora possiamo scrivere:

$$f = f^+ - f^-$$

dove parte positiva f^+ e parte negativa f^- sono definite in (1.32) e (1.33).

Definizione 2.1.6. Data f funzione misurabile su $E \subseteq \mathbb{R}^n$, se f^+ e f^- sono funzioni Lebesgue-integrabili, allora si definisce l'integrale di Lebesgue di f la quantità:

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Osserviamo che $|f| = f^+ + f^-$, inoltre:

Proposizione 2.1.7. $f \ \dot{e} \ integrabile \Leftrightarrow |f| \ \dot{e} \ integrabile.$

Dimostrazione. Supponiamo f integrabile. Poiché:

$$|f| = f^+ + f^-$$

per la linearitá dell'integrale,

$$\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty.$$

Viceversa, poiché $f^+, f^- \leq |f|$, per la monotonia dell'integrale risulta,

$$\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu \le \int |f| d\mu < +\infty,$$

da cui la tesi. \Box

L'integrale si estende poi a funzioni a valori in $\mathbb C$ nel modo seguente.

Definizione 2.1.8. Sia $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ misurabile, dove $f = \mathbf{Re}(f) + i \mathbf{Im}(f)$ con $\mathbf{Re}(f), \mathbf{Im}(f): E \to \mathbb{R}$, allora f è Lebesgue-integrabile se lo sono $\mathbf{Re}(f)$ e $\mathbf{Im}(f)$ e si pone

$$\int f \, d\mu := \int \mathbf{Re}(f) \, d\mu + i \, \int \mathbf{Im}(f) \, d\mu.$$

Lemma 2.1.9. L'integrale di Lebesgue gode delle proprietà di:

1. Additività: se $E = E_1 \cup E_2$, con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, insiemi misurabili, allora, data f integrabile su E,

$$\int_{E} f \, d\mu = \int_{E_1} f \, d\mu + \int_{E_2} f \, d\mu.$$

2. Linearità: se f e g sono funzioni integrabili e $a,b\in\mathbb{C}$, allora af+bg è integrabile e:

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

3. Monotonia: se $0 \le |f| \le g$ e g integrabile, allora f è integrabile e

$$\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu.$$

4. Assoluta continuità:

$$\left| \int f \, d\mu \right| \le \int |f| \, d\mu.$$

Definizione 2.1.10. Si dice che una proposizione p(x) è vera q.o. (quasi ovunque) se $\mu(\{x: p(x) \in falsa\}) = 0$.

Proprietà 2.1.11. Sia f misurabile su E e $f \ge 0$, allora,

- i) se f è integrabile $\Rightarrow f(x) < +\infty$ q.o.
- ii) $\int f(x) dx = 0 \Rightarrow f = 0$ q.o.

Dimostrazione. i) Preso $k \in \mathbb{N}$, sia

$$E_k = \{x \in E : f(x) > k\} = f^{-1}((k, +\infty)).$$

Quindi E_k è misurabile e $E_{k+1} \subseteq E_k$. Inoltre

$$E_{\infty} := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x : f(x) = +\infty\}.$$

Osserviamo che

$$k\mu(E_k) \le \int_E \chi_{E_k} f d\mu \le \int_E f d\mu < +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

da cui $\lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = 0$,e, per la continuità della misura per successioni decrescenti, segue che, $\mu(E_\infty) = 0$.

ii) La dimostrazione è simile al passo precedente. Per $k \in \mathbb{N}, k > 0$, si definisce

$$F_k = \left\{ x \in E : f(x) \ge \frac{1}{k} \right\},$$

e $F_k \subseteq F_{k+1}$. Sia $F = \bigcup_k F_k = \{x : f(x) > 0\}$. Osserviamo che

$$\frac{1}{k}\mu(F_k) \le \int_E \chi_{F_k} f d\mu \le \int_E f d\mu = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+,$$

quindi $\mu(F_k) = 0$ per ogni k > 0 e $\mu(F) = \lim_{k \to \infty} \mu(F_k) = 0$.

Inoltre si hanno le seguenti:

Proprietà 2.1.12. Date f, g, allora:

- i) se $|f| \le g$ e g integrabile, allora f é integrabile e $\int |f| \le \int g$.
- $|ii| | \int f | \leq \int |f|.$

Proprietà 2.1.13. Se $f \in R([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n])$, allora $f \ \dot{e}$ Lebesgue-integrabile.

Dunque l'integrale di Lebesgue estende l'integrale di Riemann.

2.2 Passaggio al limite sotto il segno

Sia f_n una successione di f misurabile e positiva tale che $f_n(x)$ converga puntualmente ad f(x), ci chiediamo se è vero che:

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n(x) \stackrel{?}{=} \int f(x).$$

Il seguente esempio mostra che non è sempre vero:

Esempio 2.2.1.

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Si ha che:

$$\int f_n \, dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Inoltre, comunque fissato $x \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 / \frac{1}{n_0} < x$. Da cui:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$$

Allora:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dx \le \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = 1.$$

Tale disuguaglianza vale in generale, come mostra il seguente risultato.

Lemma 2.2.2 (Fatou). Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n , non negative q.o., allora:

$$\int \lim_{n \to +\infty} \inf f_n \, d\mu \quad \leq \quad \lim_{n \to +\infty} \inf \int f_n \, d\mu.$$

Teorema 2.2.3 (Teorema della convergenza dominata). Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili con $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ q.o. e supponiamo che esista $g \geq 0$ integrabile, tale che $|f_n| \leq g$ q.o., allora:

- i) f_n, f sono integrabili $e \int f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$.
- ii) Si ha (convergenza in media) $\lim_{n\to+\infty} \int |f-f_n| d\mu = 0$.

Dimostrazione. i) Poichè $|f_n| \leq g$ e g è integrabile, per la monotonia dell'integrale:

$$\int |f_n| \, d\mu \quad \le \quad \int g \, d\mu \quad < +\infty$$

e perciò $|f_n|$ è integrabile, quindi f_n è integrabile. Inoltre, $|f_n| \to |f|$, infatti:

$$\left| |f_n(x)| - |f(x)| \right| \le \left| f_n(x) - f(x) \right| \to 0 \quad \text{q.o.}$$

Poiché $|f_n(x)| \le g(x) \quad \forall n$ q.o., passando al limite,

$$|f(x)| = \lim_{n \to +\infty} |f_n(x)| \le g(x),$$

da cui f è integrabile. Dalle ipotesi abbiamo che $-g \le f_n \le g$, $\forall n$ e q.o.; in particolare:

$$-g \le f_n, \tag{2.2}$$

$$f_n \le g. \tag{2.3}$$

Dalla (2.2) otteniamo che $f_n + g \ge 0$ q.o.; per il lemma di Fatou:

$$\int \lim (f_n + g) \le \liminf \int (f_n + g)$$

poichè f_n è convergente ($\lim = \lim \inf = \lim \sup$). Quindi:

$$\int f + \int g \leq \lim_{n \to +\infty} \inf \int f_n + \int g,$$

da cui

$$\int f \leq \lim_{n \to +\infty} \inf \int f_n. \tag{2.4}$$

Analogamente, dalla (2.3), otteniamo che $g - f_n \ge 0$ q.o.; per il lemma di Fatou:

$$\int \lim (g - f_n) \le \lim \inf \int (g - f_n)$$

da cui

$$\int g - \int f \le \int g - \limsup \int f_n.$$

Perciò,

$$\int f \ge \lim_{n \to +\infty} \sup \int f_n. \tag{2.5}$$

Mettendo insieme la (2.4) e la (2.5) si ha

$$\int f \leq \liminf \int f_n \leq \limsup \int f_n \leq \int f$$

da cui si ha

$$\int f = \lim_{n \to +\infty} \int f_n.$$

 $|f - f_n| \le |f| + |f_n| \le 2g$. Allora per quanto visto in i),

$$\lim_{n \to +\infty} \int |f - f_n| = \int \lim_{n \to +\infty} |f - f_n| = 0$$

poiché per ipotesi, abbiamo che $|f - f_n| \to 0$ puntualmente q.o., per $n \to +\infty$. Questo completa la dimostrazione.

Teorema 2.2.4 (Teorema della convergenza monotona). Siano $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili non negative tali che $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ q.o.. Allora:

$$\int \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ q.o. (può anche essere $F(x) = +\infty$. Per il Lemma di Fatou:

$$\int f \le \lim_{n \to +\infty} \int f_n$$

perchè le due successioni sono monotone non decrescenti e quindi ammettono limite (finito o infinito). Poiché $f_n \leq f$ q.o., per la monotonia dell'integrale:

$$\int f_n \le \int f \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Perciò:

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n \quad \le \quad \int f$$

confrontando con la (2.2), si ottiene

$$\int f = \lim_{n \to +\infty} \int f_n.$$

Corollario 2.2.5. Sia $\{a_k\}_k$, $a_k \geq 0$ q.o., a_k misurabili, allora:

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k.$$

Dimostrazione. Si consideri la successione delle ridotte $f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)$, si ha $f_n \ge 0$ q.o. e $f_n \le f_{n+1}$ q.o.. Per il teorema della convergenza monotona:

$$\int \lim_{n \to +\infty} f_n = \lim_{n \to +\infty} \int f_n.$$

Allora,

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} \int \sum_{k=1}^{n} a_k$$

e per linearitá

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \int a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k,$$

da cui la tesi.

Esempio 2.2.6. Calcolare l'integrale della Gaussiana $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2} dy$. Per n=2, con $y=(y_1,y_2)$, si ha:

$$e^{-y^2} = e^{-(y_1^2 + y_2^2)}$$
.

Ricordando che le coordinate polari assumono la forma:

$$\begin{cases} y_1 = \rho \cos \theta \\ y_2 = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Si ha dunque:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-y^2} \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} -2e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \pi.$$

Ora,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(y_1^2+y_2^2)}\,dy_1\,dy_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-y_1^2}e^{-y_2^2}\,dy_1\,dy_2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-y_1^2}\,dy_1\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-y_2^2}\,dy_2\Big) = \pi,$$

da cui

$$\int_{\mathbb{D}} e^{-y^2} \, dy = \sqrt{\pi} = \pi^{1/2}.$$

Lo stesso ragionamento vale per il caso n-dimensionale:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y_1^2 + \dots + y_n^2)} \, dy_1 \, \dots dy_n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, dy \right)^n = \pi^{n/2}.$$

Esempio 2.2.7. La successione $f_n(x) = n|x|e^{-n|x|}$ non soddisfa le ipotesi del teorema della convergenza monotona, ma soddisfa invece quelle del teorema della convergenza dominata. Infatti, $f_n(x) \to 0$ e

$$|f_n(x)| \le g(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \le 1\\ |x|e^{-|x|} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

ovunque e g è integrabile. Applicando il teorema di Lebesgue otteniamo che:

$$\int n|x|e^{-n|x|}dx \to 0.$$

Esempio 2.2.8. La successione $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$ soddisfa le ipotesi del teorema della convergenza monotona. Infatti, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $f_n(x) \geq 0$, allora

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} 1 dx = +\infty$$

Esempio 2.2.9. Mostriamo un esempio in cui non vale la proprietà di passaggio al limite sotto il segno. Si consideri la successione $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$. Tale successione non soddisfa le ipotesi dei teoremi di convergenza monotona e dominata. Si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ e l'invarianza per trasaalzioni della misura di Lebesgue dà

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}.$$

Capitolo 3

Gli spazi L^p

3.1 Prime definizioni

Definizione 3.1.1. Dato (X, M, m) uno spazio di misura. Diciamo che una proposizione P(x) è vera q.o. (quasi ovunque) se

$$m(\{x \in X : P(x) \ e \ falsa\}) = 0.$$

In esso definiamo la seguente relazione di equivalenza:

$$f \sim q \Leftrightarrow f = q, q.o. x \in X.$$

Ora prendendo $1 \le p < \infty$ definiamo lo spazio quoziente:

$$L^p(X) = \left\{ f: X \to \mathbb{C} \text{ misurabili e tali che } \int_X |f|^p dm < \infty \right\} / \sim.$$

Pertanto lo spazio $L^p(X)$ così definito non sarà uno spazio di funzioni bensì uno spazio di classi di equivalenza di funzioni. Due funzioni definiscono lo stesso elemento se l'insieme su cui differiscono ha misura nulla.

• Se $1 \le p < \infty$, allora poniamo

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p dm\right)^{1/p}.$$

• Se $p = \infty$, poniamo

$$||f||_{\infty} = esssup_X |f(x)|$$

con l'estremo superiore essenziale definito nel modo seguente

Definizione 3.1.2.
$$essup_X |f(x)| = \inf \{ \alpha \ge 0 : m(\{x/|f(x)| > \alpha\}) = 0 \}$$

che è pertanto, come dice il nome stesso, essenzialmente l'estremo superiore della funzione a meno di insiemi di misura nulla. Si vede facilmente che la definizione 1.2 è equivalente a

$$\inf \left\{ \alpha \ge 0 : |f(x)| \le \alpha \ q.o. \right\}.$$

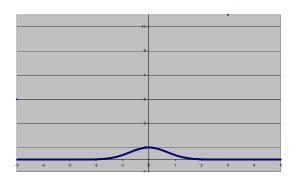
Definiremo dunque:

$$L^{\infty}(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} / esssup_X | f(x) | < \infty \}.$$

Esempio 3.1.3. Considero la f definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & se \ x \in \mathbb{R} - \{-5, 3\} \\ 5 & se \ x = -5 \\ \infty & se \ x = 3 \end{cases}$$

la cui rappresentazione grafica è:



In questo caso, $X = \mathbb{R}$ e $m = \mu$, misura di Lebesgue su \mathbb{R} . Per tale f risulterà pertanto: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \infty$. Questa \underline{non} è la $||f||_{\infty}$, in questo caso avremo infatti $||f||_{\infty} = 1$.

Definiamo ora un'altra norma, strettamente legata alla precedente:

Definizione 3.1.4. Si dice norma uniforme di f

$$||f||_U = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Osservazione 3.1. Dalle definizioni segue che:

$$||f||_{\infty} \leq ||f||_{U}$$
.

Se la f è continua, però, esse coincidono cioè vale la seguente

propo 3.1. Sia (X, M, m) uno spazio di misura. Se f è continua risulta $||f||_{\infty} = ||f||_{U}$.

Dimostrazione. Si ha

$$\{x : |f(x)| > \alpha\} = \{x : f(x) < -\alpha\} \cup \{x : f(x) > \alpha\}$$

= $f^{-1}(-\infty, -\alpha) \cup f^{-1}(\alpha, \infty).$

L'insieme, essendo unione di aperti, è aperto. Ora un aperto U di X, diverso dall'insieme vuoto, ha sempre misura positiva. Infatti preso $x \in U, \exists \epsilon > 0$ tale che $B(x, \epsilon) \subset U$, e $m(B(x, \epsilon)) > 0$. Per cui, in questo caso,

$$m(\lbrace x: |f(x)| > \alpha \rbrace) = 0 \Leftrightarrow \lbrace x: |f(x)| > \alpha \rbrace = \emptyset,$$

quindi la norma infinito coincide con quella uniforme.

Osservazione 3.2. • $||f_n - f||_U \to 0 \Leftrightarrow f_n$ converge ad f uniformemente.

• $||f_n - f||_{\infty} \to 0 \Leftrightarrow f_n$ converge ad f uniformemente su $A \subset X$, con A insieme misurabile e tale che $m(X \setminus A) = 0$. Questo ci dice dunque che gli insiemi di misura nulla non danno contributo nemmeno in termini di convergenza.

Esempio 3.1.5. Consideriamo il caso particolare in cui $X = \mathbb{N}$, $M = P(\mathbb{N})$ ed m sia la misura che conta i punti.

Preso $E \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow m(E) = \sharp E$ (osserviamo quindi che l'unico insieme di misura nulla è \emptyset) mentre le $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sono le successioni $a = (a_n)_n$. Allora in questo caso particolare, per $1 \le p < \infty$ avremo

$$L^{p}(X) = l^{p}(X) = \left\{ (a_{n})_{n} / \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n}|^{p} < \infty \right\}$$

dove

$$||a||_{l^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$$

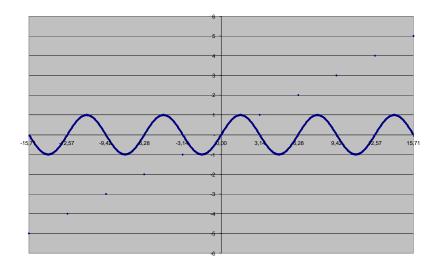
è una norma. Se invece $p = \infty$ allora si definisce

$$||a||_{l^{\infty}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Esempio 3.1.6. Il seguente esempio chiarisce la differenza tra norma infinito e norma uniforme nel caso di funzioni discontinue. Sia $X = \mathbb{R}$ e $m = \mu$, la misura di Lebesgue su \mathbb{R} . Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ k & \text{se } x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

la cui rappresentazione grafica è la sequente:



risulta

$$||f||_U = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \infty$$

mentre

$$||f||_{\infty} = esssup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1$$

dato che $\mu(k\pi/k \in \mathbb{Z}) = 0$, per cui i valori f(x) = k ottenuti sono trascurabili. Risulta quindi:

$$||f||_{\infty} \neq ||f||_{U}$$
.

3.2 Proprietà degli spazi L^p

D'ora in avanti, restringiamo la nostra attenzione al caso $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $m = \mu$, misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n . Per semplicità poniamo $L^p = L^p(X)$, $d\mu = dx$.

Proposizione 3.2.1. Sia $1 \le p \le \infty$. L^p è uno spazio vettoriale.

Dimostrazione. Sappiamo che $L^p \subseteq L$, spazio vettoriale delle funzioni misurabili; per cui sarà sufficiente mostrare che L^p è sottospazio vettoriale utilizzando il criterio per i sottospazi, ovvero mostrando che una combinazione lineare di elementi di L^p è ancora un elemento di L^p . Per semplicità mostriamo solo che L^p è chiuso rispetto alla somma infatti, se $f \in L^p$, si verifica immediatamente che $\lambda f \in L^p \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ (usando l'omogeneità del sup nel caso $p = \infty$ e la linearità dell'integrale nel caso $1 \le p < \infty$). La domanda che ci stiamo ponendo è dunque:

$$\forall f, g \in L^p \Rightarrow f + g \in L^p$$
?

Caso $p = \infty$. Si ha

$$|(f+g)(x)| \le |f(x)| + |g(x)|, \, \forall x \in X.$$

Il nostro obiettivo è dimostrare che $||f+g||_{\infty} < \infty$. Si ha

$$||f||_{\infty} = \sup_{x \in A} |f(x)|, con \mu(X \setminus A) = 0$$

$$||g||_{\infty} = \sup_{x \in B} |g(x)|, \operatorname{con} \mu(X \setminus B) = 0.$$

Posto $E=A\cap B$ si ha $(X\setminus A)\cup (X\setminus B)=X\setminus (A\cap B)=X\setminus E$ e $\mu(X\setminus E)\leq \mu(X\setminus A)+\mu(X\setminus B)=0$ Per cui avremo:

$$||f + g||_{\infty} = \sup_{x \in E} |f(x) + g(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in E} (|f(x)| + |g(x)|)$$

$$\leq \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} |g(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in B} |g(x)|$$

$$= esssup_{x \in A} |f(x)| + essup_{x \in B} |g(x)|$$

$$= ||f||_{\infty} + ||g||_{\infty} < \infty, \tag{3.1}$$

perchè, per ipotesi, $f, g \in L^{\infty}$.

Caso $1 \le p < \infty$. $\forall x \in X$, si ha

$$\begin{split} (|f(x) + g(x)|)^p & \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \\ & \leq \left(2 \max_{x \in X} (|f(x)|, |g(x)|) \right)^p \\ & = 2^p \left(\max_{x \in X} (|f(x)|, |g(x)|) \right)^p \\ & \leq 2^p \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p \right). \end{split}$$

Per la monotonia dell'integrale di Lebesgue,

$$||f + g||_p^p = \int_X |f(x) + g(x)|^p dx$$

$$\leq \int_X 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) dx$$

$$= 2^p \left(\int_X |f(x)|^p dx + \int_X |g(x)|^p dx \right)$$

$$= 2^p \left(||f||_p^p + ||g||_p^p \right)$$

che, essendo la somma di due quantità finite moltiplicate per una costante, è finita. $\hfill\Box$

Un'altra proprietà degli spazi L^p è legata alla seguente

Definizione 3.2.2. Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Si dice **norma** una funzione $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^+$ tale che $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C}$:

- 1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (proprietà di omogeneità)
- 3. $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$ (disuquaglianza di Minkowski)

In particolare uno spazio vettoriale si dice normato se è dotato di una norma.

Ci domandiamo ora se lo spazio vettoriale L^p sia normato. La risposta è affermativa ma, per poterlo dimostrare, sono necessarie alcune proprietà.

Proposizione 3.2.3 (Disuguaglianza di Hölder). Dato $1 \le p \le \infty$ sia p' il suo esponente coniugato, cioè tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Allora, se $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ si ha $fg \in L^1$, con

$$||fg||_1 \le ||f||_p ||g||_{p'}. \tag{3.2}$$

Osservazione 3.3. Anche l'indice p' verifica $1 \le p' \le \infty$ e, in particolare:

- $p=1 \Rightarrow p'=\infty$
- $p = \infty \Rightarrow p' = 1$
- $p=2 \Rightarrow p'=2$.

Dimostrazione. Caso $p = \infty$ e p' = 1 (o viceversa).

Se $||f||_{\infty} = 0 \Rightarrow ||f||_{U} = 0$ q.o. $\Rightarrow f = 0$ q.o. $\Rightarrow fg = 0$ q.o. $\Rightarrow \int_{X} |fg| = 0 \Rightarrow ||fg||_{1} = 0$ mentre $||f||_{\infty} ||g||_{1} = 0$ per cui la disuguaglianza cercata è soddisfatta con il segno di uguale.

Se $||f||_{\infty} > 0$, dato che $|f(x)| \le ||f||_{\infty} q.o.$, si ha:

$$||fg||_1 = \int_X |f(x)g(x)|dx$$

$$= \int_X |f(x)||g(x)|dx$$

$$\leq \int_X ||f||_\infty |g(x)|dx$$

$$= ||f||_\infty \int_X |g(x)|dx$$

$$= ||f||_\infty ||g||_1$$

Caso 1 .

Se $||f||_p = 0 \Rightarrow \int_X |f|^p = 0 \Rightarrow |f|^p = 0$ q.o. $\Rightarrow f = 0$ q.o. $\Rightarrow fg = 0$ q.o. $\Rightarrow ||fg||_1 = 0$ per cui, ancora una volta, la disuguaglianza si trasforma in uguaglianza. Caso analogo se $||g||_{p'} = 0$.

Sia ora $||f||_p > 0$ e $||g||_{p'} > 0$. Da

$$1$$

passiamo al reciproco, ottenendo

$$0 < \frac{1}{p} < 1.$$

Poniamo $\frac{1}{p}=\lambda.$ Abbiamo bisogno della seguente disuguaglianza numerica

Lemma 3.2.4. Sia $\lambda \in (0,1)$. Allora, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ risulta:

$$a^{\lambda}b^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda)b \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Se $b = 0 \Rightarrow 0 \leq \lambda a$ e la (3.3) è vera. Se $b \neq 0$, dividiamo ambo i membri per b e otteniamo:

$$\frac{a^{\lambda}b^{1-\lambda}}{b} \le \frac{\lambda a + (1-\lambda)b}{b}$$

cioè

$$a^{\lambda}b^{-\lambda} \le \lambda \frac{a}{b} + (1 - \lambda)$$

ovvero

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} \le \lambda \frac{a}{b} + (1 - \lambda)$$

Ora, posto $\frac{a}{b}=t\geq 0$ e definita $\phi(t)=t^{\lambda}-\lambda t$ vogliamo dimostrare che $\phi(t)\leq 1-\lambda$. Si ha

$$\phi'(t) = \lambda t^{\lambda - 1} - \lambda = \lambda \left(\frac{1}{t^{1 - \lambda}} - 1 \right) = \lambda \left(\frac{1 - t^{1 - \lambda}}{t^{1 - \lambda}} \right)$$
$$\phi'(t) = 0 \iff 1 - t^{1 - \lambda} = 0$$
$$\Leftrightarrow t^{1 - \lambda} = 1$$
$$\Leftrightarrow t = 1.$$

Sostituendo si ricava che $\phi(1) = 1 - \lambda$. Vediamo che si tratta di un massimo. Infatti,

$$\phi'(t) \ge 0 \Leftrightarrow 1 - t^{1-\lambda} \ge 0$$

 $\Leftrightarrow t^{1-\lambda} \le 1$
 $\Leftrightarrow t < 1.$

Per cui la ϕ cresce in [0,1], ovvero $\phi(t) \leq \phi(1) = 1 - \lambda$.

Applicando il lemma precedente a

$$\lambda = \frac{1}{p} \Rightarrow 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'},$$

$$a = \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p, \ b = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}}\right)^p$$

si ottiene

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{p'} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \right)^{p'}.$$

A questo punto, integrando ambo i membri su \mathbb{R}^n , applicando le proprietà di monotonia e di linearità otteniamo:

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |g(x)| dx \le \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |g(x)| dx \le ||f||_p ||g||_{p'}$$

ovvero

$$||fg||_1 \le ||f||_p ||g||_{p'} < \infty,$$

poichè, per ipotesi, $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$. Questo ci dice che la moltiplicazione puntuale $\cdot: L^p \times L^{p'} \to L^1$ è una applicazione continua.

Proposizione 3.2.5 (Disuguaglianza di Minkowski). $Se\ f,g\in L^p\ risulta$ $f+g\in L^p\ e$

$$||f + g||_p \le ||f||_p + ||g||_p. \tag{3.4}$$

Dimostrazione. Caso $1 . Utilizzando, nell'ordine, il fatto che <math>|f + g| \le |f| + |g|$ (cioè la disuuaglianza di Minkowski per il modulo), la monotonia e la linearità dell'integrale e la disuguaglianza di Hölder appena dimostrata, abbiamo:

$$\int_{X} |f+g|^{p} dx = \int_{X} |f+g||f+g|^{p-1} dx
\leq \int_{X} |f||f+g|^{p-1} dx + \int_{X} |g||f+g|^{p-1} dx
\leq \left(\int_{X} |f|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{X} \left(|f+g|^{p-1} dx\right)^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} +
+ \left(\int_{X} |g|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{X} \left(|f+g|^{p-1}\right)^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{3.5}$$

dove $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow p' = \frac{p}{p-1}$, quindi

$$\left(\int_{X} |f+g|^{(p-1)p'} dx\right)^{1/p'} = \left(\int_{X} |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$= \|f+g\|_{p}^{p-1}$$

Sostituendo quest'ultima osservazione nella (3.5) abbiamo:

$$||f+g||_p^p = \int_X |f+g|^p dx \le ||f||_p ||f+g||_p^{p-1} + ||g||_p ||f+g||_p^{p-1},$$

da cui, dividendo ambo i membri per $||f + g||_p^{p-1}$, si ottiene (3.4). Se p = 1, usiamo la disuguaglianza di Minkowski per il modulo

$$|f + g|(x) \le |f(x)| + |g(x)|.$$

Integriamo e, sfruttando la linearità dell'integrale, otteniamo

$$||f + g||_1 = \int_X |(f + g)(x)| dx$$

$$\leq \int_X |f(x)| dx + \int_X |g(x)| dx$$

$$= ||f||_1 + ||g||_1.$$

Se $p = \infty$, la disuguaglianza è già stata dimostrata nella (3.1).

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare la seguente

Proposizione 3.2.6. $(L^p, \|\cdot\|_p)$ è uno spazio vettoriale normato.

Dimostrazione. Si tratta di vedere se la $\|\cdot\|_p$ verifica le tre condizioni della definizione di norma.

- 1. $||f||_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.o. $\Leftrightarrow f = 0$ in L^p .
- 2. Essendo $|\cdot|$ una norma, risulta $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)|$. Se $p < \infty$ integrando ambo i membri elevati alla p-esima potenza su X e applicando la linearità dell'integrale si ha:

$$\int_X |\lambda f(x)|^p dx = \int_X |\lambda|^p |f(x)|^p dx = |\lambda|^p \int_X |f(x)|^p dx$$

da cui, estraendo la radice p-esima risulta:

$$||\lambda f||_p = |\lambda| ||f||_p.$$

Se invece $p = \infty$ la proprietà diventa ovvia per l'omogeneità del sup.

3. La disuguaglianza di Minkowski è stata dimostrata nella Proposizione 1.4.

Vediamo infine la generalizzazione della disuguaglianza di Hölder.

Proposizione 3.2.7 (Disuguaglianza di Hölder generalizzata). Siano $1 \le p_j \le \infty$, j = 1, ..., n, tali che

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r} \le 1.$$

Se $f_j \in L^{p_j}$, $\forall j = 1, ..., n$, allora $\prod_{j=1}^n f_j \in L^r$ e

$$\|\prod_{j=1}^{n} f_j\|_r \le \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{p_j}.$$
(3.6)

Dimostrazione. Per n=2, considero $f_1 \in L^{p_1}$ e $f_2 \in L^{p_2}$ con

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r} \le 1.$$

Moltiplicando ambo i membri per r si ottiene

$$\frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = 1,$$

relazione del tipo $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, il che ci permette di applicare la disuguaglianza di Hölder, con esponenti $p=\frac{p_1}{r}$ e $p'=\frac{p_2}{r}$ alle funzioni $|f_1|^r\in L^{\frac{p_1}{r}}$ e $|f_2|^r\in L^{\frac{p_2}{r}}$. Otteniamo

$$|||f_1|^r |f_2|^r ||_1 \le |||f_1|^r ||_{\underline{p_1}} |||f_2|^r ||_{\underline{p_2}}. \tag{3.7}$$

Ma

$$|||f_1|^r||_{\frac{p_1}{r}} = \left(\int |f_1|^r \frac{p_1}{r}\right)^{\frac{r}{p_1}} = ||f_1||_{p_1}^r$$

e analogamente

$$|||f_2|^r||_{\frac{p_2}{r}} = \left(\int |f_1|^{r\frac{p_2}{r}}\right)^{\frac{r}{p_2}} = ||f_2||_{p_2}^r.$$

Sostituendo nella (3.7) abbiamo

$$||f_1f_2||_r^r \le ||f_1||_{p_1}^r ||f_2||_{p_2}^r$$

da cui, estraendo la radice r-esima, si ottiene la tesi.

Per n > 2, la dimostrazione si fa per induzione. Sappiamo che la tesi è vera nel caso n = 2; pertanto supponiamo vera la relazione per n-1 fattori e dimostriamo che vale per n fattori $f_j \in L^{p_j}$, $j = 1, \ldots, n$, tali che $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}} + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r} \le 1$. Posto

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_{n-1}}$$

e usando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$\|\prod_{j=1}^{n-1} f_j\|_p \le \prod_{j=1}^{n-1} \|f_j\|_{p_j}.$$

Posto $f=\prod_{j=1}^{n-1}f_j$, applichiamo il caso n=2 ad $f\in L^p$ ed $f_n\in L^{\frac{1}{p_n}}$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p_n}=\frac{1}{r}$, e otteniamo

$$||ff_n||_r \le ||f||_p ||f_n||_{p_n}.$$

Infine, sostituendo il valore di f, si ottiene la tesi:

$$\|\prod_{j=1}^n f_j\|_r \le \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{p_j}.$$

Capitolo 4

Completezza degli spazi L^p

Definizione 4.0.8. Sia X uno spazio vettoriale. Un'applicazione $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ si dice **distanza in** X, se e solo se $\forall x, y, z \in X$ sono soddisfatte le seguenti tre proprietà:

- 1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2. d(x,y) = d(y,x) (simmetria)
- 3. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia (X, d) è detta spazio metrico. Uno spazio normato $(X, \| \cdot \|_X)$ è un caso particolare di spazio metrico con la distanza naturale: $d(x, y) = \| x - y \|_X$. In particolare, gli spazi L^p sono spazi normati (e quindi spazi metrici).

In uno spazio normato si ha quindi una topologia avente come base di aperti le palle aperte :

$$B(0,r) = \{ x \in X : ||x||_X < r \}$$

e le traslate

per
$$h \in X$$
 $B(h,r) = h + B(0,r) = \{x \in X : ||x - h||_X < r\}.$

Definizione 4.0.9. $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X se:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \ \forall m, n > \nu \quad || \ x_n - x_m \mid|_X < \epsilon.$$

Definizione 4.0.10. Uno spazio metrico (X, d) si dice **completo** se ogni sua successione di Cauchy è convergente in X.

Definizione 4.0.11. Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato. Se è completo si dice spazio di Banach.

Dimostreremo che $(L^p, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$, è di Banach.

Definizione 4.0.12. *Sia* $(X, \|\cdot\|_X)$ *uno spazio normato.*

Una serie $\sum_{n} x_n$, con $x_n \in X$, si dice **convergente** a $x \in X$, se la successione delle ridotte $\sum_{n=1}^{N} x_n$ converge a $x \in X$, ossia:

$$\lim_{N \to +\infty} \| \sum_{n=1}^{N} x_n - x \|_{X} = 0.$$

In tal caso si pone $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Definizione 4.0.13. Una serie $\sum_{n} x_n$, con $x_n \in X$, si dice **assolutamente** convergente se è convergente la serie delle norme, ossia se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \parallel x_n \parallel_X < \infty.$$

Un criterio per verificare la completezza di uno spazio normato è il seguente.

Teorema 4.0.14. Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato.

Allora X è di Banach se e solo se ogni serie assolutamente convergente è convergente in X.

Dimostrazione.

" \Rightarrow " Sia $\sum x_n$, con $x_n \in X$, una serie assolutamente convergente e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.
Tesi: $\sum x_n$ converge ad un certo $x \in X$.

Sia $S_N = \sum_{n=1}^N x_n$ la ridotta N-sima della serie, proviamo che la successione delle ridotte $\{S_N\}$ è di Cauchy. Ovvero, dobbiamo provare che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \nu > 0 \ / \ \forall N > M > \nu \quad \parallel S_N - S_M \parallel < \epsilon.$$

Si ha, applicando la disuguaglianza di Minkowski,

$$\parallel S_N - S_M \parallel = \parallel \sum_{n=M+1}^N x_n \parallel \leq \sum_{n=M+1}^N \parallel x_n \parallel = \sum_{n=1}^N \parallel x_n \parallel - \sum_{n=1}^M \parallel x_n \parallel < \epsilon$$

 $\forall N>M>\nu$, poichè, per ipotesi, la serie delle norme $\sum \parallel x_n \parallel$ è convergente in \mathbb{R} e quindi è una succesione di Cauchy. Pertanto, per la completezza di X, $\lim_{N\to+\infty} S_N = x \in X.$

" \Leftarrow " Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X, proviamo che è convergente in X.

 $\forall j \in \mathbb{N}$, prendiamo $\epsilon = 2^{-j}$ e quindi

$$\exists n_j > 0 \ / \ \forall m, n \ge n_j \quad \| \ x_n - x_m \ \| < 2^{-j}.$$

Possiamo sempre costruirci gli n_j tali che $n_1 < n_2 < \ldots < n_j < n_{j+1} < \ldots$ Poniamo

$$y_1 = x_{n_1}$$

 $y_2 = x_{n_2} - x_{n_1}$
 \vdots
 $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$.

Consideriamo la serie telescopica $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$. La ridotta k-esima della serie è

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \ldots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_k}.$$

Quindi la successione delle ridotte della serie $\sum y_j$ è una sottosuccessione di Cauchy della successione di Cauchy di partenza $\{x_n\}$. La serie $\sum y_j$ è assolutamente convergente, infatti:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| y_j \| = \| x_{n_1} \| + \sum_{j=2}^{\infty} \| x_{n_j} - x_{n_{j-1}} \| \le \| x_{n_1} \| + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} < \infty,$$

poichè $n_j > n_{j-1}$ e, per ipotesi, $\forall m, n \geq n_j$ si ha $||x_{n_j} - x_{n_{j-1}}|| < \frac{1}{2^{j-1}}$. Allora, per ipotesi, la serie converge semplicemente

$$\sum_{j=1}^{\infty} y_j \longrightarrow x \in X.$$

Ossia:

$$\lim_{k \to +\infty} \| \sum_{j=1}^{k} y_j - x \| = \lim_{k \to +\infty} \| x_{n_k} - x \| = 0,$$

e quindi la sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ è convergente a $x \in X$.

Sappiamo che, se da una successione di Cauchy $\{x_n\}$ estraiamo una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente, allora anche la succesione di Cauchy di partenza converge allo stesso elemento, ovvero $\{x_n\} \longrightarrow x \in X$ e quindi X è di Banach.

Usiamo il criterio precedente per provare la completezza degli spazi L^p .

Dimostrazione.

Caso
$$1 \le p < \infty$$
.

Sia $\sum f_n$ una serie assolutamente convergente $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_p = c_p < \infty$, proviamo che la serie $\sum f_n$ converge in norma L^p , allora, per il Teorema 1, L^p è uno spazio di Banach.

Sia

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|,$$

facciamo vedere che g(x) è finita quasi ovunque. Consideriamo la ridotta N-esima

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} |f_n(x)|.$$

Osserviamo che la successione delle ridotte è monotona crescente $g_N(x) \leq g_{N+1}(x)$ q.o., e quindi $g_N^p(x) \leq g_{N+1}^p(x)$ q.o. Proviamo che $g \in L^p$. Si ha

$$\|g\|_{p}^{p} = \int |g(x)|^{p} = \int (\lim_{N \to \infty} g_{N}(x))^{p} = \int \lim_{N \to \infty} (g_{N}(x))^{p} = \lim_{N \to \infty} \int g_{N}(x)^{p} =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \|\sum_{n=1}^{N} |f_{n}(x)|\|_{p}^{p} \leq \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \|f_{n}\|_{p}\right)^{p} = \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \|f_{n}\|_{p}\right)^{p} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n}\|_{p}\right)^{p} = c_{p}^{p} < \infty.$$

Dove si è usato il Teorema di convergenza monotona, applicato alla successione $\{g_N^p(x)\}$ monotona crescente q.o. e la disuguaglianza di Minkowski.

Poichè $g \in L^p$, g(x) è finita q.o. e quindi, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente q.o. e, dunque, è convergente q.o. Poniamo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ q.o. Osserviamo che

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = g(x),$$

e quindi $f \in L^p$, in quanto

$$\int |f(x)|^p \le \int g(x)^p = \parallel g \parallel_p^p < \infty.$$

Dimostriamo ora la convergenza in norma L^p .

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x) \right|^p \leq \left(\left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| + |f(x)| \right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n(x)| + |f(x)| \right)^p \\ \leq (g(x) + g(x))^p \leq (2g(x))^p = 2^p g(x)^p \text{ q.o. } x.$$

Poichè g^p è integrabile, possiamo applicare il Teorema di convergenza dominata e passare il limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{N \to \infty} \| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \|_p^p = \lim_{N \to \infty} \int \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x) \right|^p dx =$$

$$= \int \lim_{N \to \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x) \right|^p dx = 0,$$

Quindi $\sum_n f_n$ converge in norma L^p ad $f \in L^p$.

Caso
$$p = \infty$$
.

Proviamo che ogni successione di Cauchy in L^{∞} è convergente in L^{∞} . Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in L^{∞} , ovvero,

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \nu_{\epsilon} > 0 : \forall n, m > \nu_{\epsilon}, \parallel f_n - f_m \parallel_{\infty} < \epsilon.$$

Inoltre $|f_n(x) - f_m(x)| \le ||f_n - f_m||_{\infty} \quad \forall x \notin A_{n,m} \quad \text{con } \mu(A_{n,m}) = 0.$ Sia

$$A = \bigcup_{n,m} A_{n,m}.$$

Allora, per la subadditività della misura,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n,m} A_{n,m}\right) \le \sum_{n,m} \mu(A_{n,m}) = 0.$$

Quindi,

$$\forall x \notin A \ e \ \forall n, m > \nu_{\epsilon}, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \le ||f_n - f_m||_{\infty} < \epsilon.$$
 (4.1)

Allora, $\forall x \notin A$, $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in \mathbb{C} , che è completo $\Rightarrow f_n(x) \longrightarrow f(x)$ puntualmente. Poniamo

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \ \forall x \in A.$$

Dimostriamo ora che la successione $\{f_n\}$ converge a f uniformemente sul complementare di A. Passando al limite in (4.1),

$$\lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon, \quad \forall x \notin A,$$

passando al sup,

$$\sup_{x \notin A} |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon, \quad \forall n > \nu_{\epsilon}.$$

Quindi f è il limite uniforme della $\{f_n\}$. Per ipotesi $f_n \in L^{\infty}$, dunque $f \in L^{\infty}$ al di fuori di A (poichè il limite uniforme di una successione di funzioni limitate è limitato). Inoltre,

$$|| f_n - f ||_{\infty} \le \sup_{x \notin A} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall n > \nu_{\epsilon}.$$
 (4.2)

Poichè la (4.2) vale $\forall \epsilon > 0$, ciò equivale a dire che

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{\infty} = 0$$

e cioè che $\{f_n\}$ converge a f in norma L^{∞} .

Osservazioni. In virtù dei Teoremi 1 e 2, abbiamo:

- 1. Ogni serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ assolutamente convergente in L^p , converge puntualmente q.o.
- 2. Ogni successione di Cauchy $\{f_n\}$ in L^p ammette una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ convergente puntualmente q.o.

Proposizione 4.0.16. Se $1 \le p < q < r \le \infty$, allora

$$L^q \subset L^p + L^r$$
.

ovvero $\forall f \in L^q, \exists g \in L^p, h \in L^r / f = g + h.$

Dimostrazione. Sia $E = \{x \mid |f(x)| > 1\}$, dove $f \in L^q$. E è misurabile, poichè:

$$E = f^{-1}(-\infty, -1) \cup f^{-1}(1, +\infty)$$

e $f^{-1}(-\infty, -1)$ e $f^{-1}(1, +\infty)$ sono due insiemi misurabili, in quanto controimmagini, mediante una funzione misurabile f, di due aperti. Possiamo quindi scrivere f come

$$f(x) = f(x)\chi_E + f(x)\chi_{E^c} = g(x) + h(x),$$

dove per E^c intendiamo il complementare di E. Occorre solo più verificare che $g \in L^p$ e $h \in L^r$.

Per $x \in E$, |f(x)| > 1 e, poichè p < q, si ha:

$$|g(x)|^p = |f(x)|^p \chi_E \le |f(x)|^q \chi_E \le |f(x)|^q$$
.

Passando agli integrali e ricordando che $f \in L^q$,

$$\int |g|^p \le \int |f|^q < \infty,$$

quindi $g \in L^p$.

Per $x \in E^c$, $|f(x)| \le 1$ e, siccome q < r, otteniamo:

$$|h(x)|^r = |f(x)|^r \chi_{E^c} \le |f(x)|^q \chi_{E^c} \le |f(x)|^q.$$

Passando agli integrali e ricordando che $f \in L^q$,

$$\int |h|^r \le \int |f|^q < \infty,$$

quindi $h \in L^r$.

Proposizione 4.0.17. Se $1 \le p < q < r \le \infty$, allora:

$$L^p \cap L^r \subset L^q$$

e

$$|| f ||_q \le || f ||_p^{\lambda} || f ||_r^{1-\lambda},$$
 (4.3)

dove $\lambda \in (0,1)$ è definito da

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + (1 - \lambda)\frac{1}{r} \ .$$

Dimostrazione.

Caso $r = \infty$.

Dobbiamo dimostrare che se $f \in L^p \cap L^\infty$, allora $f \in L^q$ e che vale la (4.3), dove ci aspettiamo che $\lambda = p/q$. Si ha

$$|f|^q = |f|^{q-p+p} = |f|^{q-p} |f|^p.$$

Osserviamo che $|f(x)| \, \leq \, \parallel f \parallel_{\infty} \,$ q.o., dunque, elevando tutto alla q-p si ha:

$$|f(x)|^{q-p} \le ||f||_{\infty}^{q-p}$$
 q.o.

e quindi

$$|f|^q \le ||f||_{\infty}^{q-p} |f|^p$$
 q.o.

Passando agli integrali

$$\int |f|^q \le \|f\|_{\infty}^{q-p} \int |f|^p < \infty,$$

poichè per ipotesi, $f \in L^p \cap L^\infty$. Da quest'ultima disuguaglianza possiamo quindi già concludere che $f \in L^q$. Estraendo ora la radice q-esima:

$$|| f ||_q \le || f ||_{\infty}^{1-(p/q)} \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p} \frac{p}{q}} = || f ||_{\infty}^{1-(p/q)} || f ||_p^{p/q},$$

che è proprio la (4.3), dove $\lambda = p/q$.

Caso
$$1 \le r < \infty$$
.

Applichiamo la disuguaglianza di Hölder generalizzata, prendendo:

$$p_1 = \frac{p}{\lambda}$$
 e $p_2 = \frac{r}{1-\lambda}$

e

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{p}{\lambda}} + \frac{1}{\frac{r}{(1-\lambda)}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

al prodotto

$$|f| = |f|^{\lambda} |f|^{1-\lambda}.$$

Controlliamo prima che siano verificate tutte le ipotesi.

$$\parallel |f|^{\lambda} \parallel_{\frac{p}{\lambda}} = \left(\int |f|^{\lambda \frac{p}{\lambda}} \right)^{\lambda/p} = \left[\left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\lambda} = \parallel f \parallel_p^{\lambda} < \infty,$$

poichè $f \in L^p$, quindi $|f|^{\lambda} \in L^{p/\lambda}$. Analogamente si dimostra che $|f|^{1-\lambda} \in L^{r/(1-\lambda)}$:

$$\| |f|^{1-\lambda} \|_{\frac{r}{1-\lambda}} = \left(\int |f|^{(1-\lambda)\frac{r}{(1-\lambda)}} \right)^{(1-\lambda)/r} = \left[\left(\int |f|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right]^{1-\lambda} = \| f \|_r^{1-\lambda} < \infty,$$

poichè $f \in L^r$. Quindi:

$$|| f ||_q \le || |f|^{\lambda} ||_{p/\lambda} || |f|^{1-\lambda} ||_{r/(1-\lambda)} = || f ||_p^{\lambda} || f ||_r^{1-\lambda},$$

che è proprio ciò che volevamo dimostrare.

ESERCIZIO

Dimostrare che, se $1 \le p < r \le \infty$, $L^p \cap L^r$ è uno spazio di Banach con la norma $||f||_{L^p \cap L^r} = ||f||_p + ||f||_r$.

Soluzione.

Vogliamo provare che $(L^p \cap L^r, \|\cdot\|_{L^p \cap L^r})$ è uno spazio di Banach. Procediamo per gradi, provando prima che $L^p \cap L^r$ è uno spazio vettoriale normato e, in secondo luogo, che è completo.

- 1. $(L^p \cap L^r, \|\cdot\|_{L^p \cap L^r})$ è uno spazio normato poichè:
 - $L^p \cap L^r$ è uno spazio vettoriale in quanto intersezione di due spazi vettoriali.
 - $\|\cdot\|_{L^p\cap L^r}$ è una norma poichè:
 - (a) $\|\cdot\|_{L^p\cap L^r}$: $L^p\cap L^r\longrightarrow [0,+\infty)$. Questo è ovvio in quanto:

$$f \in L^p \cap L^r \implies f \in L^p \land f \in L^r$$

$$\Rightarrow \|f\|_p \in [0, +\infty) \land \|f\|_r \in [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^p \cap L^r} = \|f\|_p + \|f\|_r \in [0, +\infty).$$

(b) $|| f ||_{L^p \cap L^r} = 0 \iff f = 0$, infatti: poichè $|| f ||_{L^p \cap L^r} = || f ||_p + || f ||_r$ è la somma di due quantità positive o nulle , $|| f ||_{L^p \cap L^r} = 0 \iff || f ||_p = 0 = || f ||_r \iff f = 0$, essendo $|| \cdot ||_p$ e $|| \cdot ||_r$ due norme.

(c) $\|\lambda f\|_{L^p \cap L^r} = |\lambda| \|f\|_{L^p \cap L^r}, \forall f \in L^p \cap L^r, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ infatti:}$

$$\| \lambda f \|_{L^{p} \cap L^{r}} = \| \lambda f \|_{p} + \| \lambda f \|_{r} = |\lambda| \| f \|_{p} + |\lambda| \| f \|_{r}$$
$$= |\lambda| (\| f \|_{p} + \| f \|_{r}) = |\lambda| \| f \|_{L^{p} \cap L^{r}},$$

sempre usando il fatto che $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_r$ sono due norme.

(c) Minkowski:

$$|| f + g ||_{L^p \cap L^r} \le || f ||_{L^p \cap L^r} + || g ||_{L^p \cap L^r} \quad \forall f, g \in L^p \cap L^r.$$

Poichè $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_r$ due norme in L^p e L^r rispettivamente, si ha:

$$|| f + g ||_{L^{p} \cap L^{r}} = || f + g ||_{p} + || f + g ||_{r}$$

$$\leq (|| f ||_{p} + || g ||_{p}) + (|| f ||_{r} + || g ||_{r})$$

$$= (|| f ||_{p} + || f ||_{r}) + (|| g ||_{p} + || g ||_{r})$$

$$= || f ||_{L^{p} \cap L^{r}} + || g ||_{L^{p} \cap L^{r}}.$$

2. Dimostriamo che $L^p \cap L^r$ è completo, usando il Teorema 1.

Sia $\sum f_n$ una serie assolutamente convergente in $L^p \cap L^r$, ovvero $\sum \| f_n \|_{L^p \cap L^r} < \infty \iff \sum \| f_n \|_{L^p \cap L^r} = \sum (\| f_n \|_p + \| f_n \|_r) = (\sum \| f_n \|_p + \sum \| f_n \|_r) < \infty \iff \sum \| f_n \|_p < \infty \land \sum \| f_n \|_r < \infty$. Abbiamo quindi che $\sum f_n$ è assolutamente convergente sia in L^p che in L^r , i quali sono completi, allora:

$$\lim_{N \to \infty} \| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \|_p = 0 \wedge \lim_{N \to \infty} \| \sum_{n=1}^{N} f_n - f' \|_r = 0.$$

Ma chi ci assicura che $f \equiv f'$? La convergenza puntuale q.o., infatti:

$$\sum f_n(x) \longrightarrow f(x) \in \mathbb{C}$$
 q.o. $x \in \sum f_n(x) \longrightarrow f'(x) \in \mathbb{C}$ q.o. x

e quindi, per l'unicità del limite in $\mathbb{C},\,f\equiv f'$ q.o. x. Allora:

$$\lim_{N \to \infty} \| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \|_{L^p \cap L^r} = \lim_{N \to \infty} \left(\| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \|_p + \| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \|_r \right)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \|_p + \lim_{N \to \infty} \| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \|_r$$

$$= 0.$$

Abbiamo così provato che $\sum f_n$ è convergente in $L^p \cap L^r$.

Ricordiamo il seguente lemma:

Lemma 4.0.18. Siano $0 < \lambda < 1$, $a, b \ge 0$, allora vale la seguente disuguaglianza numerica:

$$a^{\lambda}b^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda)b. \tag{4.4}$$

Osservazione: Se $1 \leq p < q < r \leq \infty,$ la mappa di inclusione

$$i: L^p \cap L^r \longrightarrow L^q$$

è continua, infatti:

$$\| f \|_{q} \leq \| f \|_{p}^{\lambda} \| f \|_{r}^{1-\lambda}$$

$$\leq \lambda \| f \|_{p} + (1-\lambda) \| f \|_{r}$$

$$\leq \| f \|_{p} + \| f \|_{r} = \| f \|_{L^{p} \cap L^{r}} .$$

$$(4.3)$$

Capitolo 5

L^2 e densità in L^p

5.1 Lo spazio L^2

Consideriamo lo spazio L^p nel caso in cui sia p=2. La norma in L^2 è data da

$$||f||_2 = \left(\int_E |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile. Se $f: E \to \mathbb{C}$ appartiene ad L^2 viene detta **quadrato** integrabile o sommabile.

Osserviamo che il quadrato della norma di $f \in L^2$ è

$$||f||_2^2 = \int_E |f(x)|^2 dx$$

mentre il modulo quadro della $f \in L^2$ è

$$|f(x)|^2 = f(x) \cdot \overline{f(x)}.$$

Dunque il modulo quadro si può vedere come prodotto e questo ci suggerisce l'introduzione di un prodotto scalare:

$$\langle f, f \rangle = \int_E f(x) \cdot \overline{f(x)} \ dx = \int_E |f(x)|^2 \ dx = ||f||_2^2.$$

Quindi: prese $f,g\in L^2$ definiamo

$$\langle f, g \rangle = \int_E f(x) \cdot \overline{g(x)} \ dx.$$

Proposizione 5.1.1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare, cioè una forma sesquilineare hermitiana definita positiva.

Dimostrazione. Ricordiamo che una forma sesquilineare è lineare rispetto alla prima componente (le costanti si portano fuori) e antilineare rispetto alla seconda (le costanti si portano fuori e se ne fa il coniugato).

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è lineare rispetto alla prima componente, infatti $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall f_1, f_2, g \in L^2$

$$\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \int_E (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \overline{g} dx$$

che per la linearità dell'integrale è uguale a

$$\lambda_1 \cdot \int_E f_1 \cdot \overline{g} \ dx + \lambda_2 \cdot \int_E f_2 \cdot \overline{g} \ dx = \lambda_1 \cdot \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \cdot \langle f_2, g \rangle.$$

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è antilineare rispetto alla seconda componente, infatti $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\forall g_1, g_2, f \in L^2$

$$\langle f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle = \int_E f \cdot \overline{(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)} \ dx = \int_E f \cdot (\overline{\lambda_1} \overline{g_1} + \overline{\lambda_2} \overline{g_2}) \ dx$$

che per la linearità dell'integrale è uguale a

$$\overline{\lambda_1} \cdot \int_E f \cdot \overline{g_1} \ dx + \overline{\lambda_2} \cdot \int_E f \cdot \overline{g_2} \ dx = \overline{\lambda_1} \cdot \langle f, g_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \cdot \langle f, g_2 \rangle.$$

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è hermitiana, cio
è $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$, infatti

$$\overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\int_E g(x) \cdot \overline{f(x)} \ dx} = \int_E \overline{g(x)} \cdot f(x) \ dx$$

che per la commutatività della moltiplicazione puntuale è uguale a

$$\int_{E} f(x) \cdot \overline{g(x)} \ dx = \langle f, g \rangle.$$

Nei passaggi precedenti abbiamo potuto usare il fatto che il coniugato passa dentro l'integrale di Lebesgue:

$$\overline{\int h} = \int \overline{h}.$$

Se infatti prendiamo $h=\operatorname{Re} h+i\cdot\operatorname{Im} h,$ per definizione di integale di Lebesgue

$$\int h = \int \operatorname{Re} h + i \cdot \int \operatorname{Im} h$$

$$\int \overline{h} = \int \operatorname{Re} \overline{h} + i \cdot \int \operatorname{Im} \overline{h} ;$$

ma Re $h = \text{Re } \overline{h}$ e Im $h = -\text{Im } \overline{h}$, quindi:

$$\int \overline{h} = \int \operatorname{Re} \overline{h} + i \cdot \int \operatorname{Im} \overline{h} = \int \operatorname{Re} h + i \cdot \int (-\operatorname{Im} h) =$$

$$= \int \operatorname{Re} h - i \cdot \int \operatorname{Im} h = \left(\int \operatorname{Re} h + i \cdot \int \operatorname{Im} h \right) =$$

$$= \int \overline{h}.$$

4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definita positiva, ossia

$$\langle f,f\rangle \geq 0 \quad , \quad \langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ in } L^2 \text{ , cioè } f = 0 \text{ q.o. } .$$

Questo è ovvio dalla relazione

$$\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2,$$

perchè $\|f\|_2^2 \geq 0$ e, per le proprietà della norma, $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

Proposizione 5.1.2 (Cauchy-Schwartz). Prese $f, g \in L^2$, vale la disuguaglianza

$$|\langle f, g \rangle| \le ||f||_2 \cdot ||g||_2. \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Per definizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$|\langle f, g \rangle| = \left| \int f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx \right|.$$

Per l'assoluta continuità dell'integrale

$$|\langle f, g \rangle| \le \int |f(x)| \cdot \left| \overline{g(x)} \right| dx.$$

Essendo $\left| \overline{g(x)} \right| = |g(x)|$, allora

$$|\langle f, g \rangle| \leq \int |f(x)| \cdot |g(x)| dx =$$

$$= \int |(f \cdot g)(x)| dx = ||f \cdot g||_1.$$

Per la disuguaglianza di Hölder, con p = 2, quindi anche p' = 2:

$$||f \cdot g||_1 \le ||f||_2 \cdot ||g||_2$$

da cui

$$|\langle f, g \rangle| \le ||f||_2 \cdot ||g||_2$$

ovvero la disuguaglianza (5.1).

Definizione 5.1.3. Uno spazio vettoriale H munito di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si dice **spazio** di **Hilbert** se è completo rispetto alla norma

$$\left\|\cdot\right\|=\left(\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Osservazione. (1) Qui è stato fatto il percorso contrario: dalla $\|\cdot\|_2$ in L^2 si è fatto vedere che discende un prodotto scalare.

(2) Lo spazio di Hilbert è un particolare spazio di Banach: è uno spazio di Banach in cui la norma deriva da un prodotto scalare.

Proposizione 5.1.4. L^2 è uno spazio di Hilbert.

Esempio 5.1.5. Consideriamo

$$L^{2}([-\pi,\pi]) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ periodiche di periodo } 2\pi\},$$

lo spazio su cui si basa l'analisi di Fourier. Questo è uno spazio di Hilbert: la successione $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base dello spazio, cioè

$$\forall f \in L^{2}([-\pi, \pi]), f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n} e^{2\pi i n x}, \text{ con } \alpha_{n} = \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle.$$

5.2 Densità in L^p

Definizione 5.2.1. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Un sottoinsieme $D \subset X$ si dice **denso** in X se

$$\forall f \in X, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in D \quad tale \ che \quad \|f - g\|_X < \varepsilon,$$

cioè ogni elemento di X può essere approssimato bene quanto vogliamo da un elemento di D.

Si ha che

$$\overline{D}^{\,\|\cdot\|_X} = X\,.$$

Infatti $D \subset X$, dunque $\overline{D} \subset \overline{X}$, ma $X = \overline{X}$ perchè X è di Banach, quindi è un chiuso e dunque $\overline{D} \subset X$. In più $X \subset \overline{D}$ perchè ogni elemento di X lo approssimiamo bene quanto vogliamo con un elemento di D: presa $f \in X$, $\forall n$ esiste $g_n \in D$ tale che

$$||f - g_n||_X < \frac{1}{n},$$

ovvero,

$$f = \lim_{n \to +\infty} g_n \in \overline{D}.$$

Proposizione 5.2.2. Sia $1 \le p < \infty$, $X = \bigcup_{k=1}^{N} E_k$, E_k misurabile $\forall k, E_k \cap E_j = \emptyset$. Allora l'insieme

$$\left\{ s \text{ funzione semplice, } s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{E_k}, \, \mu(E_k) < \infty, \, \alpha_k \neq 0 \right\}$$
 (5.2)

è denso in L^p .

Se $p = \infty$, l'insieme

$$\left\{ s \text{ funzione semplice, } s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{E_k} \right\}$$
 (5.3)

è denso in L^{∞} .

Dimostrazione. Trattiamo il caso $p < \infty$. Consiederiamo l'insieme (5.2) e per prima cosa verifichiamo che è contenuto in L^p . Considerata una funzione semplice

$$s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{E_k},$$

vogliamo dimostare che $s \in L^p$ o, equivalentemente, che $|s|^p \in L^1$. Poichè $x \in X = \bigcup_{k=1}^N E_k$, $\exists k$ tale che $x \in E_k$; possiamo allora scrivere

$$|s(x)| = \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k \chi_{E_k}(x)|$$

e, poichè le funzioni caratteristiche sono non negative,

$$|s(x)| = \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k| \chi_{E_k}(x).$$

Dunque:

$$|s(x)|^p = \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^p \chi_{E_k}(x).$$

 $|s(x)|^p$ è una funzione semplice non negativa. Per le funzioni semplici non negative la definizione di integrale di Lebesgue è

$$\int |s|^p = \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^p \cdot \mu(E_k),$$

quantità finita perchè, per ipotesi, $\mu(E_k)$ è finita $\forall k$. Quindi $\|s\|_p < \infty$ se e solo se $\mu(E_k) < \infty$, $\forall k = 1, 2, ..., N$, dunque l'insieme (5.2) è contenuto in L^p .

Dobbiamo ora controllare che l'insieme (5.2) sia denso. Ricordiamo che se f è misurabile, allora esiste una successione $\{s_m\}_m$ di funzioni semplici che converge puntualmente ad f:

$$\lim_{m \to +\infty} s_m(x) = f(x) \quad \text{con} \quad |s_m(x)| \le |s_{m+1}(x)| \le |f(x)|. \tag{5.4}$$

Data $f \in L^p$ (quindi in particolare f è misurabile) allora esiste $\{s_m\}_m$ come nella (5.4). Osserviamo che

$$|s_m| < |f|$$
,

dunque

$$|s_m|^p \leq |f|^p$$
.

Per la monotonia dell'integrale,

$$\int |s_m|^p \le \int |f|^p < \infty$$

perchè $f \in L^p$, quindi $\int |s_m|^p < \infty$, ovvero $s_m \in L^p$, $\forall m$. Allora, poichè

$$|s_m| = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cdot \mu(E_k)$$

e poichè $\int |s_m| < \infty$ implica che $\mu(E_k)$ deve essere finita $\forall k$, le s_m sono funzioni semplici combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di insiemi di misura finita, dunque appartengono all'insieme (5.2).

Consideriamo

$$||f - s_m||_p^p = \int |f - s_m|^p (x) dx,$$

dove sappiamo che $\lim_{m\to+\infty} |f(x)-s_m(x)|=0$ puntualmente q.o. . Vogliamo quindi usare il Teorema della convergenza dominata; per farlo vediamo se riusciamo a controllare $|f-s_m|^p$ con una funzione in L^1 . Si ha

$$|f - s_m|^p \le (|f| + |s_m|)^p \le (|f| + |f|)^p = (2 \cdot |f|)^p = 2^p \cdot |f|^p \in L^1$$

poichè $f \in L^p$. Allora applichiamo il Teorema della convergenza dominata e otteniamo:

$$\lim_{m \to +\infty} \|f - s_m\|_p^p = \lim_{m \to +\infty} \int |f - s_m|^p \ dx = \int \lim_{m \to +\infty} |f - s_m|^p \ dx = 0.$$

Dunque le funzioni semplici definite su insiemi misurabili sono dense in L^p con p finito.

Passiamo ora al caso in cui $p = \infty$. Ci limitiamo a considerare $f \in L^{\infty}$, $f \geq 0$. Il caso generale segue dal fatto che una funzione qualunque la possiamo

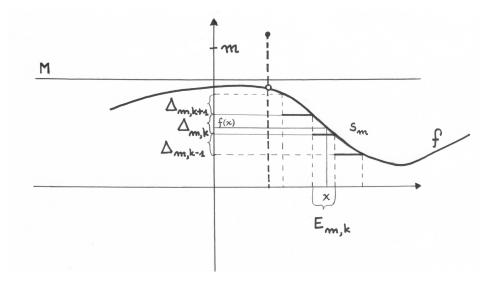
sempre scrivere come combinazione lineare di funzioni non negative: infatti, presa $f = \text{Re } f + i \cdot \text{Im } f$, si ha che $\text{Re } f = \text{Re } f_+ - \text{Re } f_-$, $\text{Im } f = \text{Im } f_+ - \text{Im } f_-$ e quindi

$$f = \operatorname{Re} f_{+} - \operatorname{Re} f_{-} + i \cdot \operatorname{Im} f_{+} - i \cdot \operatorname{Im} f_{-},$$

cioè è combinazione lineare di quattro funzioni non negative. Se $f \geq 0$, può essere approssimata con funzioni semplici non negative $s_m(x)$ tali che

$$f(x) - s_m(x) \le \frac{1}{2^m}.$$

Precisamente, se $f \in L^{\infty}$, allora $|f(x)| \leq M$ q.o. . Preso m > M, si ha che, per q.o. x, f(x) appartiene ad uno degli intervallini $\Delta_{m,k} = \left(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$, $k = 0, \ldots, m2^m - 1$, cioè, per q.o. x, $f(x) - s_m(x) \leq 1/2^m$, come mostrato in figura.



Poichè vale per quasi ogni x, questo in particolare ci dice che

$$||f - s_m||_{\infty} \le \frac{1}{2^m} \quad \forall m > M.$$

Per $m \to +\infty$, si ha

$$\lim_{m \to +\infty} \|f - s_m\|_{\infty} = 0.$$

Dunque f è limite di una successione $\{s_m\}$ di funzioni semplici. Tuttavia in questo caso le funzioni semplici s_m sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili che possono avere misura infinita.

Consideriamo adesso due esempi che mostrano come nel caso $p=\infty$ non è necessaria l'ipotesi $\mu(E_k)<\infty$.

Esempio 5.2.3. Consideriamo la funzione semplice s=1 su \mathbb{R} , cioè $s=\chi_{\mathbb{R}}$. Si $ha \|s\|_{\infty}=1$, dunque $s\in L^{\infty}$, anche se $\mu(\mathbb{R})=+\infty$.

Esempio 5.2.4. Consideriamo la funzione semplice

$$s(x) = \begin{cases} 1 & su \ \mathbb{R}^+ \\ 0 & su \ \mathbb{R}^- \end{cases}$$

cioè $s(x) = \chi_{\mathbb{R}^+} + 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}^-}$. Anche in questo caso $||s||_{\infty} = 1$, dunque $s \in L^{\infty}$ sebbene $\mu(\mathbb{R}^+) = +\infty$, $\mu(\mathbb{R}^-) = +\infty$ e $\alpha_2 = 0$.

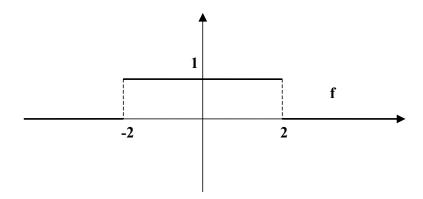
Definizione 5.2.5. Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Si dice supporto di f e si indica con supp f:

$$supp f = \overline{\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}},$$

cioè la chiusura dell'insieme degli x tali che f(x) non è nullo.

Esempio 5.2.6. *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \ |x| < 2 \\ 0 & se \ |x| \ge 2. \end{cases}$$



Il suo supporto è:

$$supp f = \overline{(-2,2)} = [-2,2].$$

Osserviamo che la chiusura è fatta in E, nell'insieme di definizione.

Esemplo 5.2.7. Se $E = (-\infty, 2)$, consideriamo $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se |x| < 2 \\ 0 & se x \le -2. \end{cases}$$

Il suo supporto è un chiuso di E, nella topologia indotta, ed è [-2,2) con $2 \notin suppf$ perchè $2 \notin E$.

Sia (X, d) uno spazio metrico, definiamo

$$C_C(X) = \{ f \in \mathcal{C}(X) \text{ con supporto compatto } \}.$$

Proposizione 5.2.8. Siano $1 \leq p < \infty$ e $E \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $C_C(E)$ è denso in $L^p(E)$.

Dimostrazione. Se $f \in C_C(E)$, allora $f \in L^p$ perchè è una funzione Riemannintegrabile quindi anche Lebesgue-integrabile. Sfruttiamo allora il fatto che le funzioni semplici sono dense in L^p .

Come primo passo dimostriamo che, preso un insieme $B \subseteq E$ misurabile, con $\mu(B) < \infty$, considerata la funzione caratteristica χ_B , allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste $f_{\varepsilon} \in C_C(E)$ che la approssima, cioè tale che

$$\|\chi_B - f_{\varepsilon}\|_p^p < \varepsilon.$$

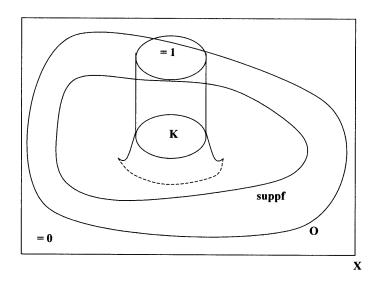
Usiamo il seguente:

Lemma 5.2.9 (Lemma di Urysohn). Sia(X, d) uno spazio metrico. $Presi\ K \subseteq X$ compatto $e\ O \subseteq X$ aperto, $con\ K \subset O$, esiste una $f \in C_C(X)$ tale che

1.
$$0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in X$$

2.
$$f(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

3.
$$supp f \subset O$$
.



Per usare il Lemma dobbiamo dunque trovare K e O. Sappiamo che $\mu(B) < \infty$ e la regolarità di μ ci dice che

$$\mu(B) = \inf \{ \mu(O), B \subset O, O \text{ aperto } \} =$$

$$= \sup \{ \mu(K), K \subset B, K \text{ compatto } \}.$$

Allora preso l' $\varepsilon > 0$ di prima consideriamo K_{ε} e O_{ε} (dipendenti da ε) sufficientemente vicini a B tali che $\mu\left(O_{\varepsilon} \smallsetminus K_{\varepsilon}\right) < \varepsilon$ (possiamo proprio per la regolarità di μ ricordata) con $K_{\varepsilon} \subset B \subset O_{\varepsilon}$, K_{ε} compatto e O_{ε} aperto. Abbiamo dunque K_{ε} , un compatto di E, e un aperto O_{ε} , con $K_{\varepsilon} \subset O_{\varepsilon}$, quindi per il Lemma di Urysohn esiste $f_{\varepsilon} \in C_{C}(E)$ tale che

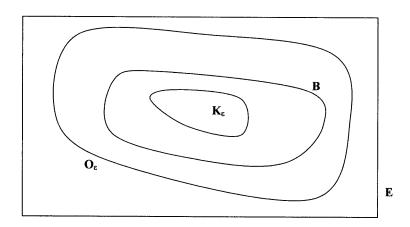
1.
$$0 \le f_{\varepsilon}(x) \le 1 \quad \forall x \in E$$

2.
$$f_{\varepsilon}(x) = 1 \quad \forall x \in K_{\varepsilon}$$

3.
$$supp f_{\varepsilon} \subset O_{\varepsilon}$$

che equivale a dire

$$\chi_{K_{\varepsilon}} \le f_{\varepsilon}(x) \le \chi_{O_{\varepsilon}}.$$



Valutiamo $\|\chi_B - f_{\varepsilon}\|_p^p$. Si ha

$$\|\chi_B - f_{\varepsilon}\|_p^p = \int_E |\chi_B(x) - f_{\varepsilon}(x)|^p dx$$

poichè su $E \smallsetminus O_{\varepsilon}$ abbiamo $\chi_B(x) = 0$ e $f_{\varepsilon}(x) = 0$, allora

$$\|\chi_B - f_{\varepsilon}\|_p^p = \int_{O_{\varepsilon}} |\chi_B(x) - f_{\varepsilon}(x)|^p dx =$$

$$= \int_{O_{\varepsilon} \setminus K_{\varepsilon}} |\chi_B(x) - f_{\varepsilon}(x)|^p dx + \int_{K_{\varepsilon}} |\chi_B(x) - f_{\varepsilon}(x)|^p dx$$

ma, su K_{ε} , $\chi_B(x) = 1$ e $f_{\varepsilon}(x) = 1$, dunque

$$|\chi_B(x) - f_{\varepsilon}(x)|^p = 0,$$

allora resta:

$$\|\chi_B - f_{\varepsilon}\|_p^p = \int_{O_{\varepsilon} \setminus K_{\varepsilon}} |\chi_B(x) - f_{\varepsilon}(x)|^p dx.$$

 f_{ε} e χ_{B} sono tali che $0 \leq f_{\varepsilon}(x) \leq 1$ e $0 \leq \chi_{B}(x) \leq 1,$ quindi

$$0 \le \chi_B(x) - f_{\varepsilon}(x) \le 1$$

dunque possiamo maggiorare $|\chi_B(x) - f_{\varepsilon}(x)|^p$ con 1, ottenendo

$$\|\chi_B - f_{\varepsilon}\|_p^p \le \int_{O_{\varepsilon} \setminus K_{\varepsilon}} 1 \ dx = \mu \left(O_{\varepsilon} \setminus K_{\varepsilon}\right).$$

Per come abbiamo scelto O_{ε} e K_{ε} , $\mu(O_{\varepsilon} \setminus K_{\varepsilon}) < \varepsilon$, allora

$$\|\chi_B - f_{\varepsilon}\|_p^p < \varepsilon.$$

Abbiamo così che χ_B con $\mu(B) < \infty$ può essere approssimata in norma L^p da un elemento f_{ε} di $C_C(E)$.

Ora, come secondo passo, prendiamo $f \in L^p$ e dimostriamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g_{\varepsilon} \in C_C(E) \text{ tale che } \|f - g_{\varepsilon}\|_p < c \cdot \varepsilon,$$

con c > 0 opportuna. Usiamo la densità delle funzioni semplici in L^p : data $f \in L^p$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una funzione semplice

$$s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{E_k}, \quad \mu(E_k) < \infty, \quad \alpha_k \neq 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$$

tale che $\|f-s\|_p^p<\varepsilon$. Per quanto dimostrato nel primo passo per χ_{E_k} esiste $g_{\varepsilon,k}\in C_C(E)$ tale che

$$\|\chi_{E_k} - g_{\varepsilon,k}\|_p < \varepsilon \quad \forall k.$$

Definiamo la seguente funzione:

$$g_{\varepsilon} := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k g_{\varepsilon,k} \in C_C(E).$$

Consideriamo $||f - g_{\varepsilon}||_p$; possiamo scriverla come $||f - s + s - g_{\varepsilon}||_p$, e quindi per la disuguaglianza di Minkowski:

$$\begin{aligned} \|f - g_{\varepsilon}\|_{p} &\leq \|f - s\|_{p} + \|s - g_{\varepsilon}\|_{p} = \\ &= \|f - s\|_{p} + \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_{k} \chi_{E_{k}} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_{k} g_{\varepsilon, k} \right\|_{p} = \\ &= \|f - s\|_{p} + \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_{k} \left(\chi_{E_{k}} - g_{\varepsilon, k} \right) \right\|_{p}. \end{aligned}$$

Ma per la densità delle funzioni semplici $\|f-s\|_p<\varepsilon$ e per la disuguaglianza di Minkowski

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(\chi_{E_k} - g_{\varepsilon,k} \right) \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{N} \left| \alpha_k \right| \left\| \chi_{E_k} - g_{\varepsilon,k} \right\|_p < \sum_{k=1}^{N} \left| \alpha_k \right| \varepsilon.$$

Quindi:

$$\|f - g_{\varepsilon}\|_{p} < \varepsilon + \sum_{k=1}^{N} |\alpha_{k}| \varepsilon = \left(1 + \sum_{k=1}^{N} |\alpha_{k}|\right) \varepsilon = c \cdot \varepsilon$$

con
$$c = 1 + \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|$$
. Quindi $C_C(E)$ è denso in $L^p(E)$.

Capitolo 6

La convoluzione

6.1Operatori di traslazione

Sia $X = \mathbb{R}^n$. Si consideri $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ossia $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, e un generico vettore $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ con norma euclidea $|\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$. $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ è detto multi-indice e $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ è il suo ordine o lunghezza. Poniamo:

$$\mathbf{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \tag{6.1}$$

$$\mathbf{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_n}^{\alpha_n} \dots \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_1}^{\alpha_1} f(\mathbf{x}).$$
(6.1)

Vale allora la seguente definizione:

Definizione 6.1.1. Per ogni funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}), si definisce operatore $di traslazione \tau_h$

$$\tau_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposizione 6.1.2. Se $1 \le p \le \infty$, allora $\|\tau_{\mathbf{h}} f\|_p = \|f\|_p$.

Dimostrazione. Sia $1 \le p < \infty$ e $f \in L^p$, allora

$$\|\tau_{\mathbf{h}}f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{\mathbf{h}}f|^p d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h})|^p d\mathbf{x}$$

con il cambiamento di variabili $\mathbf{x} - \mathbf{h} = \mathbf{y}^{1}$, il determinante Jacobiano è 1, qunidi $d\mathbf{x} = d\mathbf{y}$, e

$$\|\tau_{\mathbf{h}}f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} = \|f\|_p^p,$$

$$\begin{array}{c|c}
\hline
 & 1 \text{cioè} \left\{ \begin{array}{c}
 x_1 - h_1 = y_1 \\
 \vdots & \text{con matrice Jacobiana} \\
 x_n - h_n = y_n
\end{array} \right. & = I_n$$

ovvero l'invarianza per traslazioni dello spazio L^p per $p<\infty$. Per il caso $p=\infty$, si procede in modo analogo:

$$\|\tau_{\mathbf{h}}f\|_{\infty} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{ess sup}} |\tau_{\mathbf{h}}f|(\mathbf{x}) = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{ess sup}} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h})| = \underset{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{ess sup}} |f(\mathbf{y})| = \|f\|_{\infty}.$$

Proposizione 6.1.3. i) Per $1 \le p < \infty$, τ_h è continuo in norma L^p , ovvero

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \|\tau_{\mathbf{h}} f - f\|_p = 0. \tag{6.3}$$

ii) Per $p = \infty$, si ha f è uniformemente continua $\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{h} \to 0} \|\tau_{\mathbf{h}} f - f\|_{\infty} = 0$.

Dimostrazione. i) Usiamo la proprietà che $C_c(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ è denso in L^p per $p < \infty$. Per prima cosa verifichiamo l'eq. (6.3) per funzioni $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, con suppg compatto. $\tau_{\mathbf{h}}g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{h})$ e $\forall \mathbf{h}$ fissato supp $\tau_{\mathbf{h}}g$ è compatto. Preso \mathbf{h} tale che $|\mathbf{h}| < 1$, possiamo trovare un compatto K tale che supp $\tau_{\mathbf{h}}g \subset K \forall |\mathbf{h}| < 1$. Allora si ha

$$\|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_{p}^{p} = \int_{\mathbb{R}^{n}} |\tau_{\mathbf{h}}g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})|^{p} d\mathbf{x}$$
$$= \int_{K} |\tau_{\mathbf{h}}g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})|^{p} d\mathbf{x}$$
$$\leq \|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_{\infty}^{p} \int_{K} d\mathbf{x}$$
$$\leq \|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_{\infty}^{p} \mu(K).$$

Puntualmente $\lim_{\mathbf{h}\to 0} g(\mathbf{x}-\mathbf{h}) = g(\mathbf{x})$ perchè g è continua sul compatto K, poichè g è a supporto compatto, g è anche uniformemente continua su \mathbb{R}^d , ovvero $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \|g(\cdot -\mathbf{h}) - g\|_{\infty} = 0$. Pertanto, passando al limite, si ha $\|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_{\infty}^p \mu(K) \to 0$, e quindi:

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \|\tau_{\mathbf{h}} g - g\|_p = 0. \tag{6.4}$$

Fin qui l'abbiamo verificato solo per funzioni g continue e a supporto compatto. Consideriamo ora una funzione $f \in L^p$ e dimostriamo che $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0 / \forall \mathbf{h} |\mathbf{h}| < \delta ||\tau_{\mathbf{h}} f - f||_p < \epsilon$. Fissato $\epsilon > 0$, per la densità di C_c in L_p , $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che $||f - g||_p < \frac{\epsilon}{3}$, allora

$$\|\tau_{\mathbf{h}}f - f\|_{p} = \|\tau_{\mathbf{h}}f - \tau_{\mathbf{h}}g + \tau_{\mathbf{h}}g - g + g - f\|_{p}$$

$$\leq \|\tau_{\mathbf{h}}f - \tau_{\mathbf{h}}g\|_{p} + \|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_{p} + \|g - f\|_{p}.$$

Poichè
$$(\tau_{\mathbf{h}}f - \tau_{\mathbf{h}}g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - g(\mathbf{x} - \mathbf{h}) = (f - g)(\mathbf{x} - \mathbf{h}) = \tau_{\mathbf{h}}(f - g)(\mathbf{x}),$$

$$\|\tau_{\mathbf{h}}f - f\|_{p} \leq \|\tau_{\mathbf{h}}(f - g)\|_{p} + \|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_{p} + \|f - g\|_{p}$$

$$\leq 2\|f - g\|_{p} + \|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_{p}$$

$$< \frac{2}{3}\epsilon + \|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_{p}.$$

Per la (6.4) $\exists \delta > 0 \ / \ \|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_p < \frac{\epsilon}{3} \ \forall |\mathbf{h}| < \delta$, da cui segue la tesi. ii) Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$ è uniformemente continua se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta \ / \ \forall |\mathbf{h}| < \delta \ |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| < \epsilon \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Ciò equivale a

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| \le \epsilon,$$

ovvero $\|\tau_{\mathbf{h}}f - f\|_{\infty} \leq \epsilon$; equivalentemente $\lim_{\mathbf{h} \to 0} \|\tau_{\mathbf{h}}f - f\|_{\infty} = 0$, cioè la tesi. \square

Esempio 6.1.4. Costruzione della funzione campana.

In dimensione n=1, consideriamo inizialmente la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0\\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

il cui grafico è mostrato nella figura 1 a sinistra.



Figura 6.1:

La sua traslata $\tau_{-1}f(x)$ e la sua simmetrica $\tau_1f(-x)$ sono, rispettivamente,

$$\tau_{-1}f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x+1}} & x > -1 \\ 0 & x \le -1 \end{cases} \quad \tau_{-1}f(-x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x}} & x < 1 \\ 0 & x \ge 1. \end{cases}$$

I grafici sono riportati in figura 1, rispettivamente in mezzo e a destra. Definiamo funzione a campana

$$\varphi(x) = \tau_{-1}f(x) \cdot \tau_{-1}f(-x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}\right)} = e^{-\left(\frac{2}{1-x^2}\right)} & |x| < 1\\ 0 & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Essa è pari: $\varphi(x) = \varphi(-x)$ e con supp $\varphi = [-1, 1]$. Il suo grafico è riportato in



Figura 6.2:

figura 2. $\varphi(x)$ è una funzione a campana centrata nell'origine. In dimensione n la funzione campana φ con centro nell'origine è data da:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1\\ 0 & |x| \ge 1. \end{cases}$$

La funzione campana centrata in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e di raggio R è data da

$$\varphi_{R,x_0} = \begin{cases} e^{-\frac{1}{R^2 - |x - x_0|^2}} & |x - x_0| < R \\ 0 & |x - x_0| \ge R. \end{cases}$$

6.2 Operatori di convoluzione

Definizione 6.2.1. Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}(o\mathbb{R})$ misurabili. Si definisce convoluzione f * g la funzione

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$
 (6.5)

definita per tutti gli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ per cui (6.5) è convergente (ossia $f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) \in L^1(\mathbb{R}^n_{\mathbf{y}})$.

Proposizione 6.2.2. Se $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f * g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $||f * g||_{\infty} \leq ||f||_{\infty} ||g||_{1}$.

Dimostrazione. Si ha

$$|f * g(\mathbf{x})| = \left| \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \le \int |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| |g(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$$

Poniamo $f^*(\mathbf{x}) := f(-\mathbf{x})$; si può osservare che, se $f \in L^{\infty}$ allora $f^* \in L^{\infty}$ e $\|f\|_{\infty} = \|f^*\|_{\infty}$. Poichè $|\tau_{\mathbf{x}}f^*(\mathbf{y})| \leq \|\tau_{\mathbf{x}}f^*\|_{\infty}$ q.o. e, per l'invarianza per traslazioni, $\|\tau_{\mathbf{x}}f^*\|_{\infty} = \|f^*\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}$, si ha

$$|f * g(\mathbf{x})| = \int |\tau_{\mathbf{x}} f^*(\mathbf{y})| |g(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \le ||f||_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = ||f||_{\infty} ||g||_1 < \infty$$

per ipotesi, quindi $||f * g||_{\infty} \le ||f||_{\infty} ||g||_{1}$.

Teorema 6.2.3 (di Fubini). $Sia\ F(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ allora

$$F_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}, \quad F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n_{\mathbf{y}}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

sono definite q.o. ed inoltre $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), F_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

Proposizione 6.2.4. i) $f * g(\mathbf{x}) = g * f(\mathbf{x})$

$$ii) f * (g * h)(\mathbf{x}) = (f * g) * h(\mathbf{x})$$

$$iii)$$
 $\tau_{\mathbf{h}}(f * g)(\mathbf{x}) = (\tau_{\mathbf{h}}f) * g(\mathbf{x}) = f * (\tau_{\mathbf{h}}g)(\mathbf{x})$

iv)
$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{y} \in \operatorname{supp} f, \mathbf{z} \in \operatorname{supp} g \}$$

Dimostrazione. i) Siccome $f * g(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$, ponendo $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}$, quindi $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$ e d $\mathbf{y} = d\mathbf{z}$, si ottiene

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z})g(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x} - \mathbf{z})f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = g * f(\mathbf{x}).$$

ii) Poniamo

$$f * g * h(\mathbf{x}) := \iint_{\mathbb{R}^n_t \times \mathbb{R}^n_x} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}) h(\mathbf{z}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{z}. \tag{6.6}$$

Applichiamo Fubini alla funzione: $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z})h(\mathbf{z}) \in L^1(\mathbb{R}^n_{\mathbf{y}} \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{z}})$ q.o. poichè vale la (6.6); integrando rispetto a \mathbf{z} si ottiene il primo membro della ii), mentre rispetto a \mathbf{y} il secondo.

iii) Si ha $\tau_{\mathbf{h}}(f * g)(\mathbf{x}) = (f * g)(\mathbf{x} - \mathbf{h}) = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{h} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$. Posto $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}$, allora $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$ e $d\mathbf{y} = d\mathbf{z}$ si ottiene

$$\tau_{\mathbf{h}}(f * g)(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{z} - \mathbf{h})g(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} = \int (\tau_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{z})g(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} = (\tau_{\mathbf{h}} f) * g(\mathbf{x}).$$

Posto invece $\mathbf{h} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$, quindi $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{h}$ e d $\mathbf{y} = d\mathbf{z}$ si ottiene

$$\tau_{\mathbf{h}}(f * g)(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{z})g(\mathbf{z} - \mathbf{h}) \, d\mathbf{z} = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{z})\tau_{\mathbf{h}}g(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} = f * (\tau_{\mathbf{h}}g)(\mathbf{x}).$$

iv) Dimostriamo solamente che se $\mathbf{x} \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, allora $f * g(\mathbf{x}) = 0$. $\forall \mathbf{y} \in \operatorname{supp} g$, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin \operatorname{supp} f$ per ipotesi. Allora

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\text{supp} g} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0,$$

dato che $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin \text{supp } f$ e quindi $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$.

La disuguaglianza $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right\|_p \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p$ si estende al caso continuo nel modo seguente:

Teorema 6.2.5 (Disuguaglianza integrale di Minkowski). Sia $1 \le p \le \infty$. Supponiamo che:

- i) $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sia una funzione in $L^p_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n)$ per q.o. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,
- ii) $\mathbf{y} \mapsto \|f(\cdot,\mathbf{y})\|_n$ sia in $L^1_{\mathbf{y}}(\mathbb{R}^n)$

(dunque $\int_{\mathbb{R}^n} \|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{L^p_{\mathbf{x}}} d\mathbf{y}$ è ben definita). Allora la mappa $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è in $L^1_{\mathbf{y}}(\mathbb{R}^n)$ q.o. $\mathbf{x}, \mathbf{x} \mapsto \int f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ è in $L^p_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right\|_{L^p_{\mathbf{x}}} \le \int_{\mathbb{R}^n} \| f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \|_{L^p_{\mathbf{x}}} \, d\mathbf{y}.$$

Teorema 6.2.6 (Disuguaglianza di Young). Sia $1 \le p \le \infty, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con

$$||f * g||_p \le ||f||_p ||g||_1. \tag{6.7}$$

Dimostrazione. Il caso $p = \infty$ è già contenuto nella proposizione 6.2.2. Per $1 \le p < \infty$, vogliamo calcolare

$$||f * g||_p = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\|_{L^p_{\mathbf{x}}}$$

Controlliamo che siano verificate le ipotesi della disuguaglianza integrale di Minkowski per la funzione $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})$. Si ha

$$||f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})||_{L_{\mathbf{x}}^{p}} = |g(\mathbf{y})| ||f(\mathbf{x} - \mathbf{y})||_{L_{\mathbf{x}}^{p}} = |g(\mathbf{y})| ||f||_{L^{p}} < \infty$$

per q.o. y perchè, per ipotesi, $f \in L^p$ e $g \in L^1$, quindi $|g(y)| < \infty$ per q.o. y. Quindi la i) è verificata. Inoltre,

$$\int \|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}\|_{L_{\mathbf{x}}^{p}} = \|f\|_{p} \int |g(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} = \|f\|_{p} \|g\|_{1} < \infty,$$

perchè, per ipotesi $f \in L^p$ e $g \in L^1$, dunque anche la ii) è verificata. Allora possiamo applicare Minkowski:

$$||f * g||_p = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\|_p \le \int_{\mathbb{R}^n} ||f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y})||_{L_{\mathbf{x}}^p} d\mathbf{y}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} ||f||_p |g(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = ||f||_p \int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = ||f||_p ||g||_1 < \infty$$

da cui la tesi. In generale vale:

Teorema 6.2.7 (Disuguaglianza di Young generalizzata). Siano $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p,q,r \leq \infty$, tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ allora

$$||f * g||_r \le ||f||_p ||g||_q.$$

Ritorniamo alla definizione di convoluzione $f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$. Non esiste una funzione $e = e(\mathbf{x})$ tale che $f * e(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, cioè che faccia da elemento neutro nella convoluzione. Tuttavia, esiste una famiglia di funzioni $\{\varphi_{\epsilon}\}_{\epsilon}$ tale che $f * \varphi_{\epsilon} \longrightarrow f$ in L^p per $\epsilon \to 0$ e $p < \infty$. $\{\varphi_{\epsilon}\}_{\epsilon}$ si dice *identità* approssimata.

Vediamo ora come si costruisce: sia $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, poniamo

$$\varphi_{\epsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^n} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) \quad \text{dove} \quad \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} = \left(\frac{x_1}{\epsilon}, \dots, \frac{x_n}{\epsilon}\right).$$

Ponendo $\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}=\mathbf{y},$ quindi $\mathbf{x}=\epsilon\mathbf{y}$ e d
 $\mathbf{x}=\epsilon^n\,\mathrm{d}\mathbf{y},$ si ha

$$\|\varphi_{\epsilon}\|_{1} = \frac{1}{\epsilon^{n}} \int |\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \frac{1}{\epsilon^{n}} \int |\varphi(\mathbf{y})| \epsilon^{n} d\mathbf{y} = \|\varphi\|_{1},$$

quindi $\varphi_{\epsilon} \in L^1$. Analogamente, se si pone $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = a$, allora $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\epsilon}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = a$.

Teorema 6.2.8. Sia $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e φ_{ϵ} definita come sopra, allora:

- i) Se $1 \le p < \infty$, $f \in L^p$, si ha $f * \varphi_{\epsilon} \to af$ in norma L^p .
- ii) Se $p = \infty$, $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ed è uniformemente continua, allora $f * \varphi_{\epsilon} \to f$ uniformemente su \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. i) Si ha

$$f * \varphi_{\epsilon}(\mathbf{x}) - af(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi_{\epsilon}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int \varphi_{\epsilon}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \cdot f(\mathbf{x}) = \int [f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x})] \varphi_{\epsilon}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Posto $\frac{\mathbf{y}}{\epsilon} = \mathbf{z}, \, \mathbf{y} = \epsilon \mathbf{z}, \, \mathrm{d} \mathbf{y} = \epsilon^n \mathrm{d} \mathbf{z}$ allora,

$$f * \varphi_{\epsilon}(\mathbf{x}) - af(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{z}) - f(\mathbf{x})] \varphi(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^n} [\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] \varphi(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}$$

osservando che

$$\|f * \varphi_{\epsilon} - af\|_{p} = \left\| \int [\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] \varphi(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right\|_{p} \le \int \| |(\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f)(\mathbf{x})| \cdot |\varphi(\mathbf{z})| \|_{p} \, d\mathbf{z}$$

per la disuguaglianza integrale di Minkowski. Infatti, posto $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f)(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{z})$, si ha

$$||F(\cdot,\mathbf{z})||_p = ||\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f||_p |\varphi(\mathbf{z})| \le (||\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f||_p + ||f||_p) |\varphi(\mathbf{z})| \le 2||f||_p |\varphi(\mathbf{z})|,$$

per l'invarianza per traslazioni in L^p ed essendo $\varphi(\mathbf{z}) \in L^1$. Inoltre $||F(\cdot, \mathbf{z})||_p \in L^1_{\mathbf{z}}(\mathbb{R}^n)$, poichè $\varphi(\mathbf{z}) \in L^1$ per q.o. \mathbf{z} .

Quindi abbiamo dimostrato che $||f*\varphi_{\epsilon}-af||_p \leq \int ||\tau_{\epsilon \mathbf{z}}f-f||_p |\varphi(\mathbf{z})| d\mathbf{z}$. Passando al limite:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|f * \varphi_{\epsilon} - af\|_{p} \le \lim_{\epsilon \to 0} \int \|\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f\|_{p} |\varphi(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z}.$$

Posto $g_{\epsilon}(\mathbf{z}) = \|\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f\|_p |\varphi(\mathbf{z})|$, si ha $|g_{\epsilon}(\mathbf{z})| \leq 2\|f\|_p |\varphi(\mathbf{z})|$. Dato che $\varphi \in L^1$, per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|f * \varphi_{\epsilon} - af\|_{p} \le \int \lim_{\epsilon \to 0} \|\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f\|_{p} |\varphi(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z} = 0,$$

perchè $\lim_{\epsilon \to 0} \|\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f\|_p = 0$ per continuità dell'operatore di traslazione $\tau_{\epsilon \mathbf{z}}$ in $L^p(p < \infty)$.

ii) Caso $p = \infty$. Essendo f uniformemente continua allora anche $f * \varphi_{\epsilon}$ è uniformemente continua per il teorema 6.2.9 sotto e quindi, ragionando come in i)

$$||f * \varphi_{\epsilon} - af||_{\infty} \le \int ||\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f||_{\infty} |\varphi(\mathbf{z})| d\mathbf{z}.$$

Inoltre,

$$||F(\mathbf{x}, \mathbf{z})||_{\infty} \le 2||f||_{\infty}|\varphi(\mathbf{z})|$$

e

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|f * \varphi_{\epsilon} - af\|_{\infty} \le \int \lim_{\epsilon \to 0} \|\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f\|_{\infty} |\varphi(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z} = 0,$$

in quanto $\lim_{\epsilon \to 0} \|\tau_{\epsilon \mathbf{z}} f - f\|_{\infty} = 0$, perchè f è uniformemente continua per ipotesi. \square

Teorema 6.2.9. Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (cioè $\Leftrightarrow \partial^{\alpha} g \in C(\mathbb{R}^n) \, \forall \alpha |\alpha| \leq k$) $e \|\partial^{\alpha} g\|_{\infty} < \infty \, \forall \alpha, |\alpha| \leq k$ allora

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$$
 con $\partial^{\alpha}(f * g)(\mathbf{x}) = (f * \partial^{\alpha}g)(\mathbf{x}).$

In particolare, se g è uniformemente continua, allora f * g è uniformemente continua.

Capitolo 7

La trasformata di Fourier

7.1 La classe di Schwartz

Definizione 7.1.1 (Classe di Schwartz). Si dice che $f \in S(\mathbb{R}^n)$, la classe di Schwartz, se $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e se, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$, $||x^{\alpha} \partial^{\beta} f||_{\infty} = c_{\alpha,\beta}$.

Allora, per $|x| \to +\infty$, si ha che, $\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \forall k \in \mathbb{N}$:

$$f(x), \, \partial^{\beta} f(x) = o\left(\frac{1}{|x|^k}\right),$$

cioè f e le sue derivate decadono all'infinito più rapidamente di ogni potenza di x. $S(\mathbb{R}^n)$ è detta "classe di funzioni a decrescenza rapida".

Esempio 7.1.2. $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$.

Ricordiamo che $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle "funzioni test" ed è così definito:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } supp\, f \text{ è compatto in } \mathbb{R}^n\}.$$

Sia $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. È $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ per definizione e verifica $||x^{\alpha} \partial^{\beta} f||_{\infty} = c_{\alpha,\beta}$ perchè se f è a supporto compatto le derivate continuano ad esserlo e pure se moltiplicate per potenze di x; quindi $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 7.1.3. $f(x) = e^{-|x|^2} = e^{-\sum_{j=1}^n x_j^2} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Ovviamente $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Osserviamo che, dato $x = (x_1, \dots, x_n)$, si ha:

$$\partial_{x_j} e^{-|x|^2} = -2x_j e^{-|x|^2}.$$

In generale, per induzione, si ha:

$$\partial^{\alpha} e^{-|x|^2} = p_{\alpha}(x) e^{-|x|^2},$$

dove $p_{\alpha}(x)$ è un polinomio di grado $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Quindi:

 $x^{\beta} \partial^{\alpha} e^{-|x|^2} = p_{\alpha,\beta}(x) e^{-|x|^2},$

dove $p_{\alpha,\beta}(x)$ è un polinomio di grado $|\alpha + \beta| = \alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_n$. La gaussiana decresce più rapidamente delle potenze di x, quindi:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |p_{\alpha,\beta}(x) e^{-|x|^2}| < c_{\alpha,\beta}.$$

Su $S(\mathbb{R}^n)$ consideriamo la famiglia di seminorme:

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \|x^{\alpha} \partial^{\beta} f\|_{\infty}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{+}^{n}.$$

Infatti, sono non negative e verificano le seguenti due proprietà rispettivamente dette proprietà di omogeneità e disuguaglianza di Minkowski(o disuguaglianza triangolare):

1)
$$p_{\alpha,\beta}(\lambda f) = \|x^{\alpha} \partial^{\beta}(\lambda f)\|_{\infty} = \|\lambda x^{\alpha} \partial^{\beta} f\|_{\infty} = \|\lambda\| \|x^{\alpha} \partial^{\beta} f\|_{\infty} = \|\lambda\| p_{\alpha,\beta}(f);$$

2)
$$p_{\alpha,\beta}(f+g) = \|x^{\alpha} \partial^{\beta}(f+g)\|_{\infty} \le \|x^{\alpha} \partial^{\beta} f\|_{\infty} + \|x^{\alpha} \partial^{\beta} g\|_{\infty} = p_{\alpha,\beta}(f) + p_{\alpha,\beta}(g).$$

Una famiglia di seminorme equivalenti a $p_{\alpha,\beta}$ è data da:

$$\widehat{p}_{k,\beta}(f) = \|(1+|x|)^k \,\partial^{\beta} f\|_{\infty}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Non è una famiglia di norme perchè, a parte per $\beta = 0$, si ha:

$$\widehat{p}_{k,\beta}(f) = 0 \Rightarrow \partial^{\beta} f = 0,$$

e questo in generale non implica f=0.

Una famiglia di norme equivalente alle precedenti è:

$$||f||_k = \sum_{|\beta| \le k} ||(1+|x|)^k \,\partial^{\beta} f||_{\infty}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La topologia generata dalla precedente famiglia di seminorme (che è la stessa generata dalle altre due famiglie) dà a S la struttura di spazio vettoriale topologico localmente convesso. Precisamente, si introduce la metrica:

$$d(f,g) = \sum_{k} 2^{-k} \frac{\|f - g\|_{k}}{1 + \|f - g\|_{k}}$$

e si può dimostrare che (S, d) è uno spazio metrico completo; quindi con questa famiglia di norme $S(\mathbb{R}^n)$ è di Frechét.

Proposizione 7.1.4. $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $S(\mathbb{R}^n)$.

7.2 La trasformata di Fourier

Definizione 7.2.1 (Trasformata di Fourier). Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si definisce trasformata di Fourier di f e si indica \hat{f} oppure $\mathscr{F}f$ la funzione:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) \, dx,$$

 $dove \ \xi \in \mathbb{R}^n \ \dot{e} \ detta$ variabile duale $e \ si \ pone$:

$$x\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \, \xi_j \,, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \,, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

 $\widehat{f}(\xi)$ è ben definita $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|e^{-ix\xi}f(x)| = |e^{-ix\xi}||f(x)| = |f| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

L'integrale di una funzione in L^1 è ben definito, quindi $\widehat{f}(\xi)$ è ben definita.

Proposizione 7.2.2. $\mathscr{F}: L^1 \longrightarrow L^\infty$ è un operatore lineare e continuo, con $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che \mathscr{F} è lineare:

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} (\lambda f + \mu g)(x) \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) \, dx$$
$$+ \mu \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} g(x) \, dx = \lambda \, \mathcal{F} f + \mu \, \mathcal{F} g.$$

Verificando che l'immagine è in L^{∞} e la continuità in un punto (ad esempio lo zero), abbiamo automaticamente la continuità dell'operatore \mathscr{F} .

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) \, dx \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix\xi}| |f(x)| \, dx = ||f||_1 \quad , \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Passando all'estremo superiore ottengo $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_{1}$, cioè la continuità di \mathscr{F} in zero e quindi su tutto L^{1} .

Esempio 7.2.3. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione "porta" di ampiezza T, $p_T : \mathbb{R} \to [0,1]$, definita da:

$$p_T(x) = \begin{cases} 1 & , & se \mid x \mid \le T/2 \\ 0 & , & se \mid x \mid > T/2. \end{cases}$$

Osserviamo che $p_T \in L^1(\mathbb{R})$; la sua $\widehat{p_T}(\xi)$ è quindi ben definita e vale:

$$\widehat{p_T}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} p_T(x) \, dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-ix\xi} \, dx =$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} = \frac{1}{i\xi} (e^{i\frac{T}{2}\xi} - e^{-i\frac{T}{2}\xi}) = \frac{\sin\frac{T}{2}\xi}{\frac{\xi}{2}} = \frac{2\sin\frac{T}{2}\xi}{\xi} &, \text{ se } \xi \neq 0 \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dx = T &, \text{ se } \xi = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $p_T(\xi)$ è continua e va a 0 all'infinito.

Proposizione 7.2.4. $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Se $f \in S(\mathbb{R}^n)$, allora $f = o\left(\frac{1}{|x|^k}\right)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, quindi:

$$|f(x)| \le \frac{c_k}{(1+|x|)^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Questa disuguaglianza, usando il criterio d'integrabilità impropria in dimensione n, ci permette di affermare la tesi. Il *Criterio d'integrabilità impropria in* \mathbb{R}^n afferma:

se
$$|f(x)| \le \frac{c_k}{(1+|x|)^k}$$
, $k > n$, allora $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Allora, prendiamo k > n e così si ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposizione 7.2.5 (di $S(\mathbb{R}^n)$). Valgono le seguenti due proprietà:

- A) Se $f \in S$, allora, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, x^{\alpha} \partial^{\beta} f \in S$.
- B) Definiamo $D_{x_j} := -i\partial_{x_j}$. Allora $\forall f \in S$:

$$\widehat{D_{x_j}f}(\xi) = \xi_j \widehat{f}(\xi) \tag{7.1}$$

$$\widehat{x_j f}(\xi) = -D_{\xi_j} \widehat{f}(\xi). \tag{7.2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo A).

E' ovvio che $x^{\alpha}\partial^{\beta}f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Mostriamo che, $\forall\,\widehat{\alpha},\,\widehat{\beta}\in\mathbb{Z}_+^n$:

$$||x^{\widehat{\alpha}}\partial^{\widehat{\beta}}(x^{\alpha}\partial^{\beta}f)||_{\infty} = c_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}.$$

Usando la Formula di Leibniz in \mathbb{R}^n ,

$$\forall f, g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad \partial^{\alpha}(fg) = \sum_{\beta < \alpha} {\alpha \choose \beta} \partial^{\alpha-\beta} f \, \partial^{\beta} g,$$

otteniamo:

$$\begin{array}{rcl} \partial^{\widehat{\beta}}(x^{\alpha}\partial^{\beta}f) & = & \sum_{finita} c_{\delta,\gamma} x^{\delta} \partial^{\gamma}f \\ x^{\widehat{\alpha}}\partial^{\widehat{\beta}}(x^{\alpha}\partial^{\beta}f) & = & \sum_{finita} c_{\delta,\gamma} x^{\widehat{\alpha}+\delta} \partial^{\gamma}f \end{array}$$

dove $0 \le \delta \le \alpha$ e $\beta \le \gamma \le \beta + \widehat{\beta}$.

Quindi, per la disuguaglianza di Minkovski,

$$||x^{\widehat{\alpha}}\partial^{\widehat{\beta}}(x^{\alpha}\partial^{\beta}f)||_{\infty} \leq \sum_{finita} |c_{\delta,\gamma}| ||x^{\widehat{\alpha}+\delta}\partial^{\gamma}f||_{\infty} = c_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}} < +\infty,$$

perchè $\|x^{\widehat{\alpha}+\delta} \partial^{\gamma} f\|_{\infty} = c_{\widehat{\alpha},\delta,\gamma}$, essendo, per ipotesi, $f \in S$ e la somma è finita.

Dimostriamo B); verifichiamo la (7.1). Si ha

$$\widehat{D_{x_j}f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}(-i)\,\partial_{x_j}f(x)\,dx. \tag{7.3}$$

L'idea è fare un'integrazione per parti rispetto ad una variabile $x_j \in \mathbb{R}$ e poi fare l'integrazione per fili. Ciò è garantito dal teorema di Fubini sullo spazio prodotto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$: se $F = e^{-ix\xi}(-i) \partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora possiamo integrare per fili e scambiare l'ordine di integrazione.

Verifichiamo:

$$|F| = |e^{-ix\xi}(-i)\partial_{x_j}f| = |\partial_{x_j}f| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Integriamo per parti su \mathbb{R} rispetto alla variabile x_i :

$$\int_{\mathbb{R}_{x_j}} e^{-i\sum_{j=1}^n x_j \xi_j} (-i) \, \partial_{x_j} f(x) \, dx_j$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \left[e^{-ix\xi} (-i) f(x) \right]_{-M}^{+M} - \int_{\mathbb{R}_{x_j}} (-i\xi_j) e^{-ix\xi} (-i) f(x) \, dx_j$$

$$= \xi_j \int_{\mathbb{R}_{x_j}} e^{-ix\xi} f(x) \, dx_j. \tag{7.4}$$

Quindi, integrando per fili nella (7.3) e usando (7.4), si ha:

$$\widehat{D_{x_j}f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}_{x_j}} e^{-ix\xi}(-i) \, \partial_{x_j} f \, dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \dots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\xi_j \int_{\mathbb{R}_{x_j}} e^{-ix\xi} f(x) \, dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \dots dx_n$$

$$= \xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Dimostriamo la (7.2) utilizzando il seguente:

Teorema 7.2.6 (Derivazione sotto il segno per domini illimitati). *Sia* $K(x,y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *misurabile tale che:*

- 1) $|K(x,y)| \le |g(x)|, \forall y \in \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R}^n);$
- 2) $|\partial_y K(x,y)| \le |h(x)|, \forall y \in \mathbb{R}, h \in L^1(\mathbb{R}^n).$

Allora: $F(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) dx$ è ben definita e derivabile con derivata uguale a

$$F'(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y K(x, y) dx.$$

Verifichiamo le ipotesi del Teorema 7.2.6 per $K(x, \xi_i) = e^{-ix\xi} f(x)$:

- 1) $|e^{-ix\xi}f(x)| = |f| \in L^1, \ \forall \xi_i \in \mathbb{R};$
- 2) $|\partial_{\xi_i}(e^{-ix\xi}f(x))| = |-ix_j e^{-ix\xi}f(x)| = |x_j f| \in L^1, \ \forall \xi_j \in \mathbb{R} \ (x_j f \in S).$

Le ipotesi sono verificate; otteniamo quindi:

$$\partial_{\xi_j} \widehat{f}(\xi) = \partial_{\xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) \, dx = -i \int_{\mathbb{R}^n} x_j \, e^{-ix\xi} f(x) \, dx = -i \widehat{x_j f}(\xi).$$

Moltiplicando per +i abbiamo la tesi.

Osservazione 7.2.1. Definendo $D^{\alpha} := (-i)^{|\alpha|} \partial^{\alpha}$, per $f \in S$ le formule (7.1) e (7.2) si generalizzano per induzione come segue:

$$\widehat{D_x^{\alpha}f}(\xi) = \xi^{\alpha}\widehat{f}(\xi), \tag{7.5}$$

$$\widehat{x^{\alpha}f}(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D_{\varepsilon}^{\alpha} \widehat{f}(\xi). \tag{7.6}$$

Queste proprietà ci permettono di capire le relazioni tra f e \hat{f} : se f è derivabile molte volte, allora \hat{f} decresce molto all'infinito e viceversa.

Proposizione 7.2.7. Se $f \in S$, allora $\hat{f} \in S$.

Dimostrazione. Dalla (7.5) osserviamo che $\widehat{f} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Verifichiamo che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|\xi^{\alpha} \partial^{\beta} \widehat{f}\|_{\infty} < +\infty$.

$$\begin{split} \|\xi^\alpha \, \partial^\beta \widehat{f}\|_\infty &= & \|\xi^\alpha \, D_\xi^\beta \widehat{f}\|_\infty = \|\widehat{F}^\alpha \, \widehat{x^\beta f}\|_\infty = \|\widehat{D}_x^\alpha (\widehat{x^\beta f})\|_\infty \\ &\leq & \|D_x^\alpha (\widehat{x^\beta f})\|_1 = \|\partial_x^\alpha (\widehat{x^\beta f})\|_1 \\ &\leq & \sum_{finita} |c_{\gamma\,\delta}| \, \|x^\delta \, \partial^\gamma f\|_1 < C \,, \end{split}$$

perchè $f \in S$ implica $x^{\delta} \partial^{\gamma} f \in S$ ed in particolare $x^{\delta} \partial^{\gamma} f \in L^{1}$.

Teorema 7.2.8 (di Riemann-Lebesgue). Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, ovvero \widehat{f} è continua e $\lim_{\xi \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ (in particolare \widehat{f} è uniformemente continua).

Dimostrazione 1. Per ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Poichè $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^1(\mathbb{R}^n)$, esiste una successione $f_j \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_j \xrightarrow{j \to \infty} f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Dato che $f_j \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$, segue che $f_j \in S(\mathbb{R}^n)$ e quindi che $\widehat{f_j} \in S(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Valutiamo $\|\widehat{f_j} - \widehat{f}\|_{\infty}$:

$$\|\widehat{f}_j - \widehat{f}\|_{\infty} \stackrel{\text{linearità di } \mathscr{F}f}{=} \|\widehat{f_j - f}\|_{\infty} \stackrel{\text{continuità di } \mathscr{F}f}{\leq} \|f_j - f\|_1 \stackrel{j \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Segue che $\widehat{f} \in \overline{C_0}^{\parallel \cdot \parallel_{\infty}} = C_0$.

Dimostrazione 2. Limitiamoci alla dimensione n = 1.

Ricordiamo che $\lim_{\xi\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ se e solo se $\forall \epsilon > 0 \ \exists R$ tale che per $|\xi| \geq R$ risulta $|\widehat{f}(\xi)| < \epsilon$.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \cos(x\xi) f(x) dx - i \int_{\mathbb{R}^n} \sin(x\xi) f(x) dx$$
$$= F(\xi) - i G(\xi),$$

dove $F(\xi)$ e $G(\xi)$ sono rispettivamente la coseno trasformata e la seno trasformata. La nostra tesi risulta applicando il teorema di Riemann-Lebesgue separatamente sulle due trasformate e mostrando che:

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) f(x) \, dx = 0 \tag{7.7}$$

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x\xi) f(x) \, dx = 0 \tag{7.8}$$

Usiamo il seguente risultato.

Lemma 7.2.9. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, fissato $\epsilon > 0$, esiste una "funzione scala" \tilde{f} tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \tilde{f}(x)| \, dx < \epsilon,$$

dove la "funzione scala" $\tilde{f}(x)$ è una somma di funzioni porta (scaloidi):

$$\tilde{f}(x) := \sum_{j=1}^{N} f_j(x), \ dove \quad f_j(x) = \begin{cases} M_j, & se \ a_j \le x \le b_j \\ 0, & altrove \end{cases}$$

 $e(a_j, b_j) \cap (a_k, b_k) = 0 \text{ se } j \neq k.$

(Gli scaloidi sono quelli che intervengono nella definizione di integrale di Riemann come estremo superiore delle aree degli scaloidi inscritti.)

Attraverso il lemma ci riduciamo a dimostrare il teorema di Riemann-Lebesgue per la singola funzione porta.

$$F_{j}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) f_{j}(x) dx = \int_{a_{j}}^{b_{j}} M_{j} \cos(x\xi) dx = M_{j} \int_{a_{j}}^{b_{j}} \cos(x\xi) dx$$
$$= \frac{M_{j}}{\xi} \left[\sin(b_{j}\xi) - \sin(a_{j}\xi) \right].$$

Inoltre,

$$|F_{j}(\xi)| = \frac{M_{j}}{|\xi|} |\sin(b_{j}\xi) - \sin(a_{j}\xi)| \le \frac{M_{j}}{|\xi|} |\sin(b_{j}\xi)| + \frac{M_{j}}{|\xi|} |\sin(a_{j}\xi)|$$

$$\le \frac{2M_{j}}{|\xi|} \stackrel{|\xi| \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dato $\epsilon > 0$, mostriamo che esiste H tale che per $|\xi| > H$ si ha $|F(\xi)| < \epsilon$, ovvero vale la (7.7).

Considerando $\frac{\epsilon}{2}>0$ nel Lemma 7.2.9, troviamo un approssimante \tilde{f} tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \tilde{f}(x)| \, dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{7.9}$$

Allora, aggiungendo e togliendo \tilde{f} si ha:

$$|F(\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) f(x) \, dx \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) [(f(x) - \tilde{f}(x)) + \tilde{f}(x)] \, dx \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) [(f(x) - \tilde{f}(x)] \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) \tilde{f}(x) \, dx \right|$$

$$\leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) [f(x) - \tilde{f}(x)] \, dx \right| + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) \tilde{f}(x) \, dx \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\cos(x\xi)| \, |f - \tilde{f}|(x) \, dx + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) \tilde{f}(x) \, dx \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f - \tilde{f}|(x) \, dx + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) \tilde{f}(x) \, dx \right|.$$

Applicando la (7.9) e la definizione di \tilde{f} ,

$$|F(\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) \sum_{j=1}^{N} f_j(x) dx \right| = \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) f_j(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) f_j(x) dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} \frac{2M_j}{|\xi|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{2}{|\xi|} \sum_{j=1}^{N} M_j$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{|\xi|} < \epsilon.$$

Se vale

$$\frac{2M}{|\xi|} < \frac{\epsilon}{2} \Longrightarrow |\xi| > \frac{4M}{\epsilon} := H.$$

Procedendo nello stesso modo si dimostra la (7.8) e si ha quindi la tesi.

Teorema 7.2.10. La trasformata di Fourier è una mappa sequenzialmente continua da $S(\mathbb{R}^n)$ in $S(\mathbb{R}^n)$, cioè precisamente se $f_j \to 0$ in $S(\mathbb{R}^n)$, allora anche la sua trasformata di Fourier \widehat{f}_j tende a 0 in $S(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Possiamo riscrivere la tesi come

$$\forall \alpha, \beta, \quad ||\xi^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}\widehat{f}_{j}(\xi)||_{\infty} \to 0$$

Ora, tenendo in considerazione il fatto che

$$\partial_x^{\alpha}(x^{\beta}f_j) = \sum_{\text{finite}} c_{\gamma,\delta} x^{\gamma} \partial^{\delta} f_j,$$

si può scrivere

$$||\xi^{\alpha}\widehat{x^{\beta}f_{j}(\xi)}||_{\infty} = ||\partial_{x}^{\alpha}(x^{\beta}f_{j})(\xi)||_{\infty} \leq ||\partial_{x}^{\alpha}(x^{\beta}f_{j})||_{1} \leq \sum_{finita} c_{\gamma,\delta}||x^{\alpha}\partial^{\delta}f_{j}||_{1} \to 0.$$

Dunque la mappa di Fourier è continua in senso sequenziale. □Enunciamo ora il seguente

Teorema 7.2.11. La trasformata di Fourier $\hat{f}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ è un'applicazione lineare biiettiva (cioè è un isomorfismo algebrico) ed è bicontinuo sequenzialmente. Più precisamente si definisce **trasformata di Fourier inversa**:

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix\xi} g(\xi) d\xi.$$

Si osserva che per l'operatore \mathcal{F}^{-1} valgono tutte le proprietà dimostrate per l'operatore \mathcal{F} . In particolare:

$$\mathcal{F}^{-1}: L^1 \to L^\infty \quad e \quad \mathcal{F}^{-1}: S \to S$$

con continuità sequenziale.

7.3 Il teorema di inversione

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 7.3.1. Teorema di inversione

In $S(\mathbb{R}^n)$ risulta

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = I \quad e \quad \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I$$

In particolare per $f \in S(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

che è la formula di antitrasformazione.

Dimostrazione. Riscriviamo la tesi:

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \left(\int e^{-iy\xi} f(y) dy \right) d\xi =$$
$$= (2\pi)^{-n} \int \left(\int e^{-i(y-x)\xi} f(y) dy \right) d\xi.$$

Osserviamo che non è possibile cambiare l'ordine di integrazione in quanto $\int |f(y)| d\xi dx = \infty$ e dunque non è possibile applicare il teorema di Fubini. Scriviamo allora

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int 1e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

e introduciamo una funzione $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ tale che $\varphi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Consideriamo ora una successione di funzioni $\varphi(\frac{\xi}{j}) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2j^2}}$, con $j=1,2,\ldots$; ovviamente

$$\lim_{j \to \infty} \varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) = \lim_{j \to \infty} e^{-\frac{|\xi|^2}{2j^2}} = 1.$$

Ciò significa che

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \int \left(\lim_{j \to \infty} \varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) \right) e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int \lim_{j \to \infty} \left(\varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \right) d\xi. \tag{7.10}$$

Ora si utilizza il teorema della convergenza dominata nella forma:

$$\int \lim_{j \to \infty} h_j(\xi) d\xi = \lim_{j \to \infty} \int h_j(\xi) d\xi$$

dove si è supposta la dominazione

$$|h_j(\xi)| \le H(\xi), \forall j \quad con \quad \int H(\xi)d\xi \le +\infty.$$

A questo punto osserviamo che nella scrittura (7.10) la quantità

$$\left| \varphi \left(\frac{\xi}{j} \right) e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \right|$$

si può maggiorare con $|\widehat{f}(\xi)|$ in quanto $|\varphi(\frac{\xi}{j})| \le 1$ e $|e^{ix\xi}| = 1$. Ciò significa che si può porre $|\widehat{f}(\xi)| = H(\xi)$ e quindi

$$(2\pi)^{-n} \int \lim_{j \to \infty} \left(\varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \right) d\xi = (2\pi)^{-n} \lim_{j \to \infty} \int \varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{7.11}$$

Possiamo subito osservare che in generale se non c'è dominazione uniforme, non si può far passare il limite fuori dal segno di integrale. Lavoriamo ora sull'uguaglianza (7.11) notando anzitutto che:

$$\left| \varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) e^{-i(y-x)\xi} f(y) \right| \le \left| \varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) \right| |f(y)|,$$

$$\left|\varphi\left(\frac{\xi}{j}\right)\right| \le \frac{C_N'}{(1+|\xi|^2)^N}$$
 e che $|f(y)| \le \frac{C_N}{(1+|y|^2)^N}$.

risulta quindi vera la seguente maggiorazione:

$$\left| \varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) e^{-i(y-x)\xi} f(y) \right| \le \frac{C_N' C_N}{(1+|\xi|^2)^N (1+|y|^2)^N}.$$

Ma

$$(1+|\xi|^2)^N(1+|y|^2)^N = (1+|\xi|^2+|y|^2+|\xi|^2|y|^2)^N \ge (1+|\xi|^2+|y|^2)^N,$$

quindi:

$$\left|\varphi\left(\frac{\xi}{j}\right)e^{-i(y-x)\xi}f(y)\right| \le \frac{C_N'C_N}{(1+|\xi|^2+|y|^2)^N}$$

che è una quantità appartenente a $L^1(\mathbb{R}^{\nvDash \ltimes} y, \xi)$ con N > 2n.

A questo punto abbiamo le condizioni necessarie per applicare il Teorema di Fubini:

$$(2\pi)^{-n} \lim_{j \to \infty} \int \int \varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) e^{-i(y-x)\xi} f(y) dy d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \lim_{j \to \infty} \int f(y) \left(\int e^{-i(y-x)\xi} \varphi\left(\frac{\xi}{j}\right) d\xi\right) dy.$$

Applichiamo ora una sostituzione: $\xi = jt$, quindi $d\xi = j^n dt$; risulta dunque che la scrittura precedente si scrive come:

$$= (2\pi)^{-n} \lim_{j \to \infty} \int f(y) \left(\int j^n e^{-i(y-x)jt} \varphi(t) dt \right) dy;$$

ma, $\int j^n e^{-i(y-x)jt} \varphi(t) dt = j^n \widehat{\varphi}((y-x))j$.

Poniamo ora $(y-x)j=\eta$ e osserviamo che $y=\frac{\eta}{j}+x$ e $dy=\frac{d\eta}{j}$.

Dunque, proseguendo con l'ugluaglianza abbiamo che:

$$= (2\pi)^{-n} \lim_{j \to \infty} \int f(y) j^n \widehat{\varphi}((y-x)j) \, dy = (2\pi)^{-n} \lim_{j \to \infty} \int f(x+\frac{\eta}{j}) \widehat{\varphi}(\eta) \, d\eta.$$

Se scriviamo $f(x + \frac{\eta}{i})\widehat{\varphi}(\eta) = h_j(\eta)$, allora osserviamo che

$$\lim_{j \to \infty} h_j(\eta) = \lim_{j \to \infty} f(x + \frac{\eta}{j})\widehat{\varphi}(\eta) = f(x)\widehat{\varphi}(\eta).$$

Sarebbe utile, dunque, poter applicare il teorema del passaggio del limite sotto il segno d'integrale; per fare ciò è necessario studiare il modulo:

$$|f(x + \frac{\eta}{j})\widehat{\varphi}(\eta)| \le |f(x + \frac{\eta}{j})||\widehat{\varphi}(\eta)|$$

e, ponendo $M = \max(|f(x + \frac{\eta}{i})|)$, risulta

$$\leq M|\widehat{\varphi}(\eta)| \leq \frac{MC}{(1+|\eta|^2)^N},$$

con 2N>n. Ciò significa che il teorema può essere applicato e otteniamo dunque che

$$(2\pi)^{-n} \lim_{j \to \infty} \int f(x + \frac{\eta}{j}) \widehat{\varphi}(\eta) \, d\eta = (2\pi)^{-n} \int f(x) \widehat{\varphi}(\eta) \, d\eta =$$
$$= (2\pi)^{-n} f(x) \int \widehat{\varphi}(\eta) \, d\eta = f(x) (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}(\eta) \, d\eta.$$

Ora, poichè $\varphi(x)=e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, allora $\widehat{\varphi}(\eta)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\eta|^2}{2}}$ e quindi

$$(2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}(\eta) \, d\eta = (2\pi)^{-n} \int (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \, d\eta = (2\pi)^{-n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} = 1.$$

Siamo dunque arrivati alla tesi, infatti da questi passaggi risulta che

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi = f(x).$$

7.4 Convergenza di funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definizione 7.4.1. Sia $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, j = 1, 2, ... una successione di funzioni. Si dice che

$$\lim_{j \to \infty} f_j(x) = 0 \quad in \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ la successione $x^{\alpha} \partial^{\beta} f_j(x), j = 1, 2 \dots$ converge uniformemente a $f \equiv 0$ in \mathbb{R}^n , ovvero la successione numerica

$$||x^{\alpha}\partial^{\beta}f_{j}(x)||_{\infty} \to 0, \quad per \ j \to \infty.$$

È un senso di convergenza molto forte che implica tutte le altre (puntuale, uniforme, \mathcal{L}^1 , \mathcal{L}^2 , \mathcal{L}^{∞} , etc...).

Osservazione 7.4.2. La convergenza di una successione di funzioni ad una funzione discende dalla convergenza in 0. Infatti siano f_j , $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, j = 1, 2, ... allora

$$\lim_{j\to\infty} f_j = f \quad in \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

significa

$$\lim_{j \to \infty} (f_j - f) = 0 \quad in \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 7.4.3. Se $f_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$||x^{\alpha}\partial^{\beta}f_{j}||_{1} \to 0 \quad per \ j \to \infty.$$
 (7.12)

Dimostrazione. Supponiamo che 2N > n allora, posto $c = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^N}$, si ha

$$||x^{\alpha}\partial^{\beta}f_{j}(x)||_{1} = \int_{\mathbb{R}^{n}} |x^{\alpha}\partial^{\beta}f_{j}(x)| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{1}{(1+|x|^{2})^{N}} |(1+|x|^{2})^{N}x^{\alpha}\partial^{\beta}f_{j}(x)| dx$$

$$\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^{n}} |(1+|x|^{2})^{N}x^{\alpha}\partial^{\beta}f_{j}(x)| \int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{dx}{(1+|x|^{2})^{N}}$$

$$= c \sup_{x \in \mathbb{R}^{n}} |\sum_{\text{finite}} c_{\gamma}x^{\gamma}\partial^{\beta}f_{j}(x)|$$

$$\leqslant c \sum_{\text{finite}} c_{\gamma} \sup_{x \in \mathbb{R}^{n}} |x^{\gamma}\partial^{\beta}f_{j}(x)| \to 0,$$

poiché $||x^{\delta}\partial^{\beta}f_{j}|| \to 0 \ \forall \ \gamma, \ \beta$, per ipotesi, e la somma è finita.

Teorema 7.4.4. La trasformata di Fourier è una mappa sequenzialmente continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Precisamente, se $f_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora anche $\widehat{f}_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Dalle (7.5) e (7.6) e per la continuità della trasformata di Fourier da \mathcal{L}^1 a \mathcal{L}^∞ si ha

$$\begin{split} ||\xi^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}\widehat{f_{j}}(\xi)||_{\infty} &= ||\xi^{\alpha}\widehat{x^{\beta}f_{j}}(\xi)||_{\infty} = ||\widehat{\partial^{\alpha}(x^{\beta}f_{j})}(\xi)||_{\infty} \\ &\leqslant ||\partial^{\alpha}(x^{\beta}f_{j})(x)||_{1} \leqslant \sum_{\text{finita}} c_{\gamma,\delta}||x^{\gamma}\partial^{\delta}f_{j}||_{1} \end{split}$$

con $c_{\gamma,\delta}$ costanti positive. Per il Teorema 7.4.3 si ha che $||x^{\gamma}\partial^{\delta}f_{j}||_{1} \to 0$ e Poiché abbiamo una combinazione lineare finita si ha la tesi.

Esempio 7.4.5. Calcoliamo la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per far ciò studiamo l'equazione differenziale y' + xy = 0 e un integrale generale di tale equazione è del tipo $y(x) = ce^{-\int x dx}$. Quindi per la linearità di \mathcal{F}

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y' + xy = 0 \Rightarrow \widehat{y' + xy} = 0 \Rightarrow \widehat{y'} + \widehat{xy} = 0.$$

Poiché $\widehat{y'} = \widehat{i(-i)y'} = \widehat{iDy} = i\xi \widehat{y}$, si ottiene

$$i\xi\widehat{y} - D_{\xi}\widehat{y} = 0 \Rightarrow i\xi\widehat{y} + i(\widehat{y})' = 0 \Rightarrow (\widehat{y})' + \xi\widehat{y} = 0 \Rightarrow \widehat{y}(\xi) = ce^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Determiniamo ora la costante c. Per $\xi = 0$ si ha

$$\widehat{y}(0) = c \quad e \quad \widehat{y}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix \cdot 0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

quindi $c = \sqrt{2\pi}$, ovvero

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Nel caso n-dimensionale si usa Fubini e si ha

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{|x|^2}{2}}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-ix_1 \cdot \xi_1} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \right) \cdots \left(e^{-ix_n \cdot \xi_n} e^{-\frac{x_n^2}{2}} \right) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 \cdot \xi_1} e^{-\frac{x_1^2}{2}} dx_1 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n \cdot \xi_n} e^{-\frac{x_n^2}{2}} dx_n \right)$$

$$= (\sqrt{2\pi})^n e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$$

Osserviamo che $\mathcal{F}(e^{-\frac{|x|^2}{2}}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Capitolo 8

Lo spazio delle distribuzioni temperate $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

8.1 Introduzione alle distribuzioni

Le distribuzioni vennero introdotte da Schwartz intorno al 1950. I presupposti del suo lavoro sono da ricercare nel nuovo approccio allo studio delle funzioni, nato intorno agli anni '30. In questo periodo, di fronte alle difficoltà che si incontravano nello studio puntuale delle funzioni, si spostò l'attenzione su un'informazione più generale quale l'area. Era necessaria una teoria dell'integrazione il più generale possibile, necessità colmata dall'integrale di Lebesgue, a partire dal quale vennero definiti gli spazi \mathcal{L}^p come classi di funzioni coincidenti quasi ovunque.

Schwartz cercò di dare una formalizzazione a quest'idea di funzione come informazione riguardante una distribuzione d'area. Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ risulta quindi conosciuta nel momento in cui sappiamo per ogni intervallo [a,b] "quanta" area c'è. Per capire la distribuzione d'area di f si introducono delle funzioni φ , che chiameremo funzioni test, per calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x,\tag{8.1}$$

detto: "il valore del test". Le funzioni test vengono scelte tra spazi funzionali molto particolari, i cui elementi godono di grande regolarità, le scelte più comuni

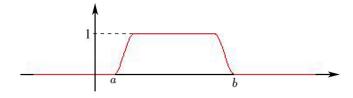


Figura 8.1: Esempio di funzione test.

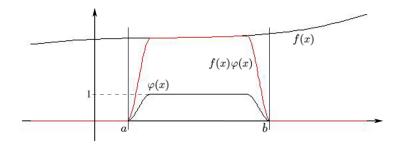


Figura 8.2: Test della funzione f rispetto a φ .

sono infatti C_0^{∞} e S. I valori dei test consentono di capire la distribuzione d'area, infatti se per esempio consideriamo una funzione simile a quella in figura 8.1, l'integrale (8.1) sarà una buona approssimazione dell'integrale di f su [a, b]

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \sim \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx.$$

La funzione viene ora interpretata come la relazione che lega ogni funzione test con il valore del test, cioè la funzione diventa una forma lineare sullo spazio delle funzioni test, che chiameremo "distribuzione".

Le distribuzioni in realtà erano già state introdotte precedentemente nell'ambito della fisica matematica e della meccanica quantistica (per spiegare fenomeni come per esempio l'impulso) come oggetti non ben definiti, per esempio la δ di Dirac era una funzione misteriosa tale che

$$\int_{a}^{b} \delta(x) dx = 1, \ \forall [a, b] \text{ con } 0 \in [a, b],$$
$$\int_{a}^{b} \delta(x) dx = 0, \ \forall [a, b] \text{ con } 0 \notin [a, b].$$

Nell'ottica introdotta da Schwartz la δ viene interpretata come un'applicazione da $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ in \mathbb{R} tale che

$$\varphi \mapsto \delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = \varphi(0).$$

Un altro aspetto molto positivo di questa interpretazione più generale delle funzioni come distribuzioni, riguardava l'operatore di derivazione che in questo contesto diventa definito su una qualsiasi funzione anche non derivabile. Una distribuzione f può essere vista come una forma lineare che ad ogni funzione test associa il valore dell'integrale $\int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Supponiamo inizialmente che la f sia una funzione derivabile, possiamo interpretare anche la derivata come distribuzione

$$f': \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Suppponiamo ora di aver scelto una funzione test nello spazio $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$, perciò esiste un intervallo [a,b] al di fuori del quale la φ è identicamente nulla. Ciò implica che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) dx = \int_{a}^{b} f'(x)\varphi(x) dx.$$

Applichiamo ora la formula di integrazione per parti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x,$$

tendendo conto che $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ e che $\varphi'(x)$ è identicamente nulla fuori dall'intervallo [a,b], otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Prendendo questo risultato come definizione di derivata di distribuzione, ossia

$$f': \varphi \mapsto -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x,$$
 (8.2)

abbiamo definito la derivata di una funzione anche nei casi in cui non esiste la derivata classica. Affinché la definizione sia consistente deve esistere la derivata della φ . Generalizzando anche alle derivate successive, si comprende la necessità di scegliere funzioni test molto regolari, in spazi come \mathcal{C}_0^{∞} ed \mathcal{S} .

Il discorso fatto si estende in modo naturale alle funzioni definite in generale su \mathbb{R}^n ; le distribuzioni sono quindi applicazioni da uno spazio funzionale a valori in \mathbb{R} o \mathbb{C} . Le scelte più comuni per quanto riguarda gli spazi funzionali delle funzioni test sono $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Ad ogni scelta possibile corrispondono teorie delle distribuzioni diverse: l'insieme delle distribuzioni definite su $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ viene indicato con $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, quelle definite su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ed infine quelle su $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Le inclusioni sugli spazi delle funzioni test si invertono nel passaggio alle distribuzioni:

$$\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$
$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Ai fini dei nostri studi, lo spazio ideale è $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in quanto è stabile per trasformata di Fourier, ovvero, come vedremo, la trasformata di Fourier è una isomorfismo da \mathcal{S}' in sé.

Abbiamo affermato che le "vecchie" funzioni possono essere trattate come distribuzioni. Cerchiamo di giustificare questa affermazione dimostrando un caso particolare di immersione di uno spazio funzionale classico in uno spazio di distribuzioni.

Proposizione 8.1.1. $C^0(\mathbb{R}^n)$ è contenuto in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione $i: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definita da, $\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$,

$$i: f \mapsto u_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \text{ con } u_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$
 (8.3)

Innanzitutto la mappa è ben definita, nel senso che per una qualsiasi funzione test l'integrale esiste, in quanto $f(x)\varphi(x)$ risulta essere una funzione continua e diversa da 0 su un dominio limitato di \mathbb{R}^n . Per dimostrare la tesi è quindi sufficiente verificare l'iniettività di i. Siano f e g due funzioni in \mathcal{C}^0 tali che $u_f = u_g$, cioè

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}, \ \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x. \tag{8.4}$$

L'obiettivo è dimostrare che $f \equiv g$. Date la successione di funzioni $\psi_k \in \mathcal{C}_0^{\infty}$, definite da

$$\psi_k(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(1/k)^2 - |x|^2}}, & |x| \leqslant \frac{1}{k} \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{k} \end{cases}$$

consideriamo le corrispondenti φ_k normalizzate

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x) \, \mathrm{d}x} \, \psi_k(x).$$

Mediante una semplice traslazione $x \mapsto x - x_0$, possiamo quindi ottenere una successione di funzioni $\varphi_{k,x_0}(x) = \varphi_k(x - x_0)$, centrate in un qualsisi punto x_0 di \mathbb{R}^n tali che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{k,x_0}(x) \, \mathrm{d}x = \int_{|x-x_0| \leq 1/k} \varphi_{k,x_0}(x) \, \mathrm{d}x = 1.$$

Andiamo ora ad effettuare il test su queste funzioni: per la (8.4), si ha, $\forall k$

$$u_f(\varphi_{k,x_0}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_{k,x_0}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_{k,x_0}(x) dx = u_g(\varphi_{k,x_0}).$$

Prendiamo in considerazione ora $u_f(\varphi_{k,x_0})$,

$$u_f(\varphi_{k,x_0}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_{k,x_0}(x) dx = \int_{|x-x_0| \le 1/k} f(x)\varphi_{k,x_0}(x) dx.$$

Dal momento che stiamo integrando su un compatto, f è una funzione continua e $\varphi_{k,x_0} \geqslant 0$, possiamo applicare il Teorema della media, che garantisce l'esistenza di un valore $y_{x_0,k}$ appartenente al disco di centro x_0 e raggio 1/k, ovvero $|y_{x_0,k}-x_0| \leqslant \frac{1}{k}$, tale che

$$\int_{|x-x_0| \le 1/k} f(x) \varphi_{k,x_0}(x) \, \mathrm{d}x = f(y_{x_0,k}) \int_{|x-x_0| \le 1/k} \varphi_{k,x_0}(x) \, \mathrm{d}x = f(y_{x_0,k}).$$

Andando a considerare il limite per $k \to \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} u_f(\varphi_{k,x_0}) = \lim_{k \to \infty} f(y_{x_0,k}) = f(x_0),$$

perché $|y-x_0| \leq \frac{1}{k} \to 0$. Con procedimento analogo su $u_g(\varphi_{k,x_0})$ si ottiene

$$\lim_{k \to \infty} u_g(\varphi_{k,x_0}) = g(x_0),$$

e tenendo conto della (8.4), si ha

$$f(x_0) = \lim_{k \to \infty} u_f(\varphi_{k,x_0}) = \lim_{k \to \infty} u_g(\varphi_{k,x_0}) = g(x_0).$$

Per l'arbitrarietà di $x_0 \in \mathbb{R}^n$ segue l'iniettività di i.

8.2 Prime definizioni ed esempi

Dopo un'introduzione molto intuitiva sulle distribuzioni, passiamo ora ad introdurre le distribuzioni temperate in modo rigoroso.

Definizione 8.2.1. Lo spazio di distribuzioni $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio vettoriale di tutte le forme lineari $u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ sequenzialmente continue; cioè per ogni successione di funzioni φ_j in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (vedi Definizione 7.4.1), si ha $u(\varphi_j) \to 0$ in \mathbb{C} .

Dunque $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è un sottospazio proprio del duale algebrico di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))'$$
.

Vediamo ora quali funzioni, tra quelle già incontrate e conosciute, fanno parte di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Consideriamo $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, funzione a crescita algebrica¹ (o crescita lenta), cioè tale che esista un intero intero N > 0 e una costante $c_N > 0$ per cui

$$|f(x)| \le c_N (1+|x|^2)^N$$
. (8.5)

Ogni funzione f a crescita algebrica definisce una distribuzione u_f in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \ u_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Innanzitutto, verifichiamo che la distribuzione u_f sia ben definita, cioè che l'integrale converga. Si ha

$$|u_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |\varphi(x)| \, \mathrm{d}x,$$

¹Alle funzioni a crescita algebrica appartengono tutte le funzioni a crescita al più polinomiale, mentre non vi appartiene, per esempio, la funzione e^x .

a questo punto possiamo applicare la maggiorazione (8.5) alla f, mentre per quanto riguarda la φ , trattandosi di una funzione a decrescita rapida, sappiamo che per ogni $\tilde{N} > 0$ esiste una costante $c_{\tilde{N}}$ tale che

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{c_{\tilde{N}}}{(1+|x|^2)^{\tilde{N}}}.$$

Pertanto otteniamo:

$$|u_f(\varphi)| \le \int_{\mathbb{R}^n} c_N \left(1 + |x|^2\right)^N \frac{c_{\tilde{N}}}{(1 + |x|^2)^{\tilde{N}}} dx = c_N c_{\tilde{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{\tilde{N} - N}},$$

integrale convergente per $2(\tilde{N}-N)>n$. Dal momento che la maggiorazione sulla φ è valida per un arbitrario \tilde{N} , è sufficiente considerare per esempio $\tilde{N}>\frac{n}{2}+N$.

La linearità di u_f discende immediatamente dalla proprietà di linearità dell'integrale, rimane quindi da verificare la continuità sequenziale. Consideriamo una successione di funzioni φ_j che tendono a 0 per $j \to \infty$. Per ogni φ_j vale la maggiorazione

$$|\varphi_j(x)| \leqslant \frac{c_{\tilde{N},j}}{(1+|x|^2)^{\tilde{N}}}$$

ed inoltre dato che $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ abbiamo che $c_{\tilde{N},j} \to 0$ per j tendende a ∞ . Andiamo ora a valutare la successione $u_f(\varphi_j)$. Con passaggi analoghi alla dimostrazione di buona definizione, si ha

$$|u_f(\varphi_j)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_j(x) \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi_j(x)| \, \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} c_N \left(1 + |x|^2 \right)^N \frac{c_{\tilde{N},j}}{\left(1 + |x|^2 \right)^{\tilde{N}}} \, \mathrm{d}x = c_N c_{\tilde{N},j} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + |x|^2 \right)^{\tilde{N} - N}}.$$

L'integrale non dipende dall'indice j, Poiché $c_{\tilde{N},j}$ tende a 0, otteniamo $u_f(\varphi_j) \to 0$ per $j \to \infty$. D'ora in poi potremo quindi considerare un qualsiasi polinomio P(x) come una distribuzione di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ovvero $P: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, con

$$\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{P}^n} P(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x.$$

Osservazione 8.2.2. In $S'(\mathbb{R}^n)$ quindi non troviamo tutte le funzioni continue, ad esempio $e^x \notin S'(\mathbb{R}^n)$.

Proprietà 8.2.3. Per $1 \leq p \leq \infty$, si ha

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. La linearità è immediata, verifichiamo la buona definizione e la continuità sequenziale.

Caso p = 1. Data $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, consideriamo l'applicazione u_f che ad ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ associa $u_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$. Le funzioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sono limitate, allora $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$|u_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)| \, \mathrm{d}x$$
$$\le ||\varphi||_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, \mathrm{d}x \le ||\varphi||_{\infty} ||f||_1 < \infty,$$

quindi la u_f è ben definita. Consideriamo ora una successione di funzioni φ_i tendenti a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo che

$$\varphi_j \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \|\varphi_j\|_{\infty} \to 0, \text{ per } j \to \infty,$$

da cui, se $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$|u_f(\varphi_i)| \leq ||f||_1 ||\varphi_i||_{\infty} \to 0, \text{ per } j \to \infty,$$

ovvero $u_f(\varphi_i) \to 0$ in \mathbb{C} .

Caso $1 . Consideriamo ora <math>f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Presa $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, valutiamo $|u_f(\varphi)| = |\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx|$. Per la disuguaglianza di Hölder,

$$|u_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| \le ||f||_p ||\varphi||_q, \text{ con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Affinché u_f sia ben definito, deve essere $\|\varphi\|_q < \infty$. Per comodità ragioniamo con $\|\varphi\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx$. Per le proprietà di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\forall N > 0, \ \forall c_N > 0, \ |\varphi(x)| \le \frac{c_N}{(1+|x|^2)^N},$$

da cui

$$\|\varphi\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q \, \mathrm{d}x \leqslant c_N^q \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^{Nq}},$$

integrale convergente se 2Nq > n, cioè se considero un qualsiasi $N > \frac{n}{2q}$. Presa una successione φ_j tendente a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, per ogni φ_j vale la maggiorazione $|\varphi_j(x)| \leqslant \frac{c_{N,j}}{(1+|x|^2)^N}$ e

$$c_{N,j} \to 0$$
, per $j \to \infty$.

Si ha quindi

$$|u_f(\varphi_j)| \le c_{N,j} ||f||_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^2)^{Nq}} \right)^{\frac{1}{q}} \to 0, \text{ per } j \to \infty.$$

Caso $p = \infty$. Sia $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. u_f è ben definita perché $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$|u_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)| \, \mathrm{d}x$$
$$\le ||f||_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = ||f||_{\infty} ||\varphi||_1 < \infty.$$

Per dimostrare la continuità sequenziale, ricordiamo la proprietà

$$\varphi_j \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \varphi_j \to 0 \text{ in } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n),$$

da cui si ricava

$$|u_f(\varphi_i)| \leq ||f||_{\infty} ||\varphi_i||_1 \to 0,$$

ovvero $u_f(\varphi_i) \to 0$ in \mathbb{C} .

8.3 Operatori in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Estendiamo ora alcuni operatori lineari alle distribuzioni. Il procedimento per l'estensione di tali operatori è quello già usato per la derivata di una funzione: vogliamo che per una funzione classica f, dato un operatore λ , sia commutativo il diagramma:

$$f \xrightarrow{i} u_f \qquad (8.6)$$

$$\downarrow \lambda$$

$$\lambda f \xrightarrow{i} u_{\lambda f} = \lambda u_f$$

Esempio 8.3.1 (Operatore di traslazione τ_h). Applichiamo il procedimento illustrato nel diagramma al caso di un operatore τ_h . Consideriamo una funzione $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ a crescita lenta ovvero $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e τ_h agisce su f nel modo seguente

$$\tau_h: f(x) \mapsto f(x-h), \ h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Per rendere commutativo il diagramma (8.6), vogliamo che

$$\tau_h u_f(\varphi) = u_{\tau_h f}(\varphi), \quad \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dal secondo termine otteniamo

$$u_{\tau_h f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_h f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - h) \varphi(x) dx,$$

applicando la sostituzione x - h = y di jacobiano |J| = 1,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(y+h) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\tau_{-h}\varphi(y) \, dy = u_f(\tau_{-h}\varphi).$$

Pertanto diamo la sequente

Definizione 8.3.2. Sia u una distribuzione di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e sia $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Allora $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, poniamo

$$\tau_h u(\varphi) \stackrel{def}{=} u(\tau_{-h}\varphi). \tag{8.7}$$

Si verifica facilmente che si tratta di una buona definizione; infatti, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_{-h}\varphi$ appartiene ancora a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre presa una successione φ_j tendente a 0, la successione $\tau_{-h}\varphi_j$ delle traslate continua a tendere a 0.

Tendendo conto della relazione (8.2) diamo ora le definizione di derivata di una distribuzione.

Definizione 8.3.3. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si definisce $\partial_{x_j} u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$, la distribuzione

$$\partial_{x_i} u(\varphi) \stackrel{def}{=} -u(\partial_{x_i} \varphi), \quad \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$
 (8.8)

e, più in generale,

$$\partial^{\alpha} u(\varphi) \stackrel{def}{=} (-1)^{|\alpha|} u(\partial^{\alpha} \varphi), \quad \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{8.9}$$

La definizione è consistente in quanto $\partial_{x_j}\varphi$ appartiene ancora allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; la linearità è ovvia, controlliamo quindi la continuità sequenziale. Data una successione φ_k tendente a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, deve convergere a 0 la successione corrispondente $\partial_{x_j}u(\varphi_k)$: poiché $\partial_{x_j}u(\varphi_k) = -u(\partial_{x_j}\varphi_k)$ e poiché u è una distribuzione (quindi gode della continuità sequenziale), è sufficiente provare che la successione $\partial_{x_j}\varphi_k$ tende a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per ipotesi abbiamo che $\varphi_k \to 0$, cioè

$$\forall \alpha, \beta, \quad x^{\alpha} \partial^{\beta} \varphi_k \to 0 \text{ uniformemente per } k \to \infty,$$
 (8.10)

verifichiamo allora che valga anche per la derivata. Innanzitutto, osserviamo che:

$$x^{\gamma}\partial^{\delta}\partial_{x_{j}}\varphi_{k} = x^{\gamma}\partial^{\delta'}\varphi_{k}, \text{ con } \delta' = (\delta_{1},\ldots,\delta_{j-1},\delta_{j}+1,\delta_{j+1},\ldots,\delta_{n}),$$

quindi per la (8.10) $x^{\gamma} \partial^{\delta'} \varphi_k \to 0$ e quindi $\partial_{x_j} \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La dimostrazione per una derivata α -esima qualsiasi si ricava facilmente con un procedimento induttivo.

Esempio 8.3.4. Deriviamo la funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}.$$

il cui grafico è riportato in figura 8.3. Si ha $H \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, quindi possiamo calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H\right)(\varphi) = -H\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi\right) = -H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{M \to +\infty} [\varphi(x)]_{0}^{M}$$
$$= -\lim_{M \to +\infty} \varphi(M) + \varphi(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

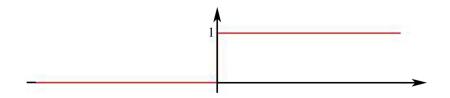


Figura 8.3: Grafico della funzione H.

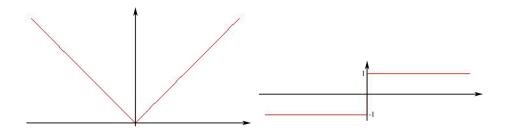


Figura 8.4: A sinistra il grafico di s=f(t), a destra quello di $v=f^{\prime}(t)$.

Quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H = \delta.$$

Esempio 8.3.5. Deriviamo ora $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla j-esima coordinata:

$$\partial_{x_j}\delta(\varphi) = -\delta(\partial_{x_j}\varphi) = -\partial_{x_j}\varphi(0), \quad \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Generallizzando a una derivata α -esima, $\partial^{\alpha} \delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial^{\alpha} \delta : \varphi \longmapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha} \varphi(0).$$

Esempio 8.3.6. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da f(t) = |t|. Dal punto di vista fisico questa è la funzione di un moto con un urto anelastico all'istante t = 0. La velocità è quindi, per $t \neq 0$,

$$v(t) = f'(t) = sign(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'accelerazione abbiamo che $a(t) = f''(t) = 0, \forall t \neq 0$. In questo caso non ha senso considerare l'accelerazione nulla anche in 0, perché non si spiegherebbe il cambio di verso di spostamento. Dal momento che la velocità non è derivabile in senso classico, ricorriamo alle distribuzioni, lecito in quanto

 $sign(t) \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}): \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$

$$\begin{split} a(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}sign\right)(\varphi) = -sign(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty}sign(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{0}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{+\infty}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{M\to-\infty}\left[\varphi(t)\right]_{M}^{0} - \lim_{M\to+\infty}\left[\varphi(t)\right]_{0}^{M} = \\ &= \varphi(0) - \lim_{M\to-\infty}\varphi(M) - \lim_{M\to+\infty}\varphi(M) + \varphi(0) = 2\,\varphi(0) = 2\,\delta(\varphi). \end{split}$$

Le due δ si possono interpretare come due impulsi, il primo per l'arresto del corpo, il secondo per la messa in moto nel verso opposto, che danno luogo al "rimbalzo" anelastico.

Introduciamo infine il prodotto aritmetico di un polinomio e di una distribuzione. Supponiamo di avere su \mathbb{R}^n un polinomio P e una distribuzione u discendente da una funzione a crescita algebrica; allora, per una generica φ funzione test in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$(P(x)u)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} [P(x)u(x)]\varphi(x) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)[P(x)\varphi(x)] dx = u(P(x)\varphi),$$

ricordando che per ogni P polinomio, e per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha $P(x)\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quanto fatto ci suggerisce la seguente definizione.

Definizione 8.3.7. Siano P polinomio su \mathbb{R}^n e $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora P(x)u appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e

$$(P(x)u)(\varphi) \stackrel{def}{=} u(P(x)\varphi), \quad \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$
 (8.11)

Come accennato prima la definizione è consistente perché per qualsiasi polinomio $P(x)\varphi$ è ancora una funzione test. Tutte le altre proprietà di una distribuzione discendono immediatamente dalle proprietà di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

8.4 La trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

L'obiettivo di questa sezione è definire, per ogni $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(u)$, ovvero estendere la trasformata di Fourier allo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Vedremo che le proprietà possedute da \mathcal{F} su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si estendono anche ad $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Cominciamo con richiamare la seguente proposizione: date $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale l'uguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi) \,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x) \,dx. \tag{8.12}$$

Tendendo conto che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, data $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, \widehat{u} appartiene ancora ad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quindi può essere vista come una distribuzione e dalla (8.12) otteniamo, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{u}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) \varphi(\xi) \,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \widehat{\varphi}(x) \,dx = u(\widehat{\varphi}).$$

Quanto fatto suggerisce la seguente

Definizione 8.4.1. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La trasformata di Fourier $\mathcal{F}(u) = \widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è definita da

$$\widehat{u}(\varphi) \stackrel{def}{=} u(\widehat{\varphi}), \qquad \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$
 (8.13)

 $\widehat{u}(\varphi)$ è ben definito per una qualsiasi funzione test φ poiché $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La linearità è immediata, per quanto riguarda la continuità sequenziale, per la continuità di \mathcal{F} su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Teorema 7.4.4):

$$\varphi_j \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{\varphi_j} \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Quindi essendo u una distribuzione:

$$\varphi_j \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{u}(\varphi_j) = u(\widehat{\varphi_j}) \to 0.$$

Osservazione 8.4.2. Per la definizione data, si ha che, per un elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di Fourier in senso classico e nel senso delle distribuzioni coincidono. Questo vale anche per gli elementi di $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (si può vedere sfruttando la densità di \mathcal{S} in \mathcal{L}^1 e \mathcal{L}^2).

Esempio 8.4.3. Calcoliamo la trasformata di Fourier della δ di Dirac. Per definizione, si ha, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{\delta}(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0).$$

Allora esplicitando $\widehat{\varphi}(0)$,

$$\widehat{\varphi}(0) = \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(x) \, dx \right]_{\xi=0} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot \varphi(x) \, dx = 1(\varphi).$$

La funzione costante uguale a 1 è una distribuzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, dal momento che $1 \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, quindi $\widehat{\delta} = 1$.

Definizione 8.4.4. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La trasformata di Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si definisce

$$\mathcal{F}^{-1}u(\varphi) \stackrel{def}{=} u(\mathcal{F}^{-1}\varphi), \qquad \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{8.14}$$

Le considerazioni di buona definizione sono analoghe a quelle fatte per la trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, perché anche la mappa $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è sequenzialmente continua.

Definite la trasformata di Fourier e la sua inversa, possiamo dimostrare il seguente importante teorema.

Teorema 8.4.5. Sia \mathcal{F} la mappa definita da (8.13) e \mathcal{F}^{-1} la mappa definita da (8.14). Allora:

(i)
$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)},$$
 (8.15)

$$(ii) \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}. \tag{8.16}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la relazione (8.15), per la relazione (8.16) si procede analogamente. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per le definizioni date, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u(\varphi) = \mathcal{F}u(\mathcal{F}^{-1}\varphi) = u(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi) = u(\varphi),$$

poiché vale l'identità: $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$.

Teorema 8.4.6. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definito $D_{x_j} = -i\partial_{x_j}$, allora

$$\widehat{D_{x_i}u} = \xi_i \widehat{u},\tag{8.17}$$

$$\widehat{x_j u} = -D_{\xi_j} \widehat{u}, \tag{8.18}$$

e, qeneralizzando,

$$\widehat{D^{\alpha}u} = \xi^{\alpha}\widehat{u},\tag{8.19}$$

$$\widehat{x^{\alpha}u} = (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \widehat{u}. \tag{8.20}$$

Dimostrazione. Data $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e presa una generica funzione test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\widehat{D_{x_j}u}(\varphi) = D_{x_j}u(\widehat{\varphi}) = -u(D_{x_j}\widehat{\varphi}) = u(-D_{x_j}\widehat{\varphi})$$
$$= u(\widehat{\xi_j\varphi}) = \widehat{u}(\xi_j\varphi) = \xi_j\widehat{u}(\varphi),$$

dove abbiamo applicato la relazione (7.1). Questo dimostra la (8.17); per quanto riguarda la (8.18),

$$\widehat{x_j u}(\varphi) = x_j u(\widehat{\varphi}) = u(x_j \widehat{\varphi}) = u(\widehat{D_{\xi_j} \varphi}) = \widehat{u}(D_{\xi_j} \varphi) = -D_{\xi_j} \widehat{u}(\varphi),$$

grazie alla relazione (7.1). La dimostrazione di (8.19) e (8.20) si ottiene facilmente procedendo induttivamente.

Esempio 8.4.7. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione costante $1 \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sappiamo che $\hat{\delta} = 1$, con passaggi formali, in quanto $1 \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e quindi l'integrale va inteso in senso debole, si ha

$$\mathcal{F}^{-1}(1) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \, 1 \, dx = \delta.$$

Applicando la sostituzione y = -x, con jacobiano |J| = 1,

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \, 1 \, dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} \, 1 \, dy = (2\pi)^{-n} \widehat{1} = \delta,$$

cioè

$$\widehat{1} = (2\pi)^n \delta.$$

Esempio 8.4.8. Consideriamo un polinomio $P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (P è una funzione continua a crescita algebrica)

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_{\alpha} x^{\alpha}$$

e calcoliamo la sua trasformata di Fourier \widehat{P} . Usando $\widehat{1} = (2\pi)^n \delta$, si ha

$$\widehat{P} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_{\alpha} \widehat{x^{\alpha}} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_{\alpha} \widehat{x^{\alpha} 1} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_{\alpha} \left((-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \widehat{1} \right)$$
$$= (2\pi)^{n} \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} c_{\alpha} D^{\alpha} \delta.$$

8.5 Convoluzione e trasformata di Fourier

Definizione 8.5.1. Siano $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ funzioni misurabili. Si dice **convoluzione** di f e g la funzione

$$(f * g) (x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ per cui la funzione integranda è convergente.

Teorema 8.5.2. Siano f, g funzioni in $S(\mathbb{R}^n)$. Allora

- 1) $fg \in S(\mathbb{R}^n)$.
- 2) $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. 1) Dobbiamo dimostrare che $||x^{\alpha}\partial^{\beta}(fg)||_{\infty} < \infty$ per ogni α, β cioè che $x^{\alpha}\partial^{\beta}(fg) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$ per ogni α, β . Applicando la formula di Leibniz si ottiene

$$x^{\alpha}\partial^{\beta}(fg) = x^{\alpha} \sum_{\gamma \leq \beta} {\beta \choose \gamma} \partial^{\gamma} f \ \partial^{\beta-\gamma} g$$
$$= \sum_{\gamma \leq \beta} {\beta \choose \gamma} (x^{\alpha}\partial^{\gamma} f) (\partial^{\beta-\gamma} g)$$

In questo caso poichè per ipotesi $f \in S(\mathbb{R}^n)$ e $g \in S(\mathbb{R}^n)$ allora $(x^{\alpha} \partial^{\gamma} f) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $(\partial^{\beta-\gamma} q) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Osserviamo che $L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \cdot L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, infatti risulta che

$$\sup |f(x)g(x)| \le (\sup |f(x)|)(\sup |g(x)|) \quad per \ ogni \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Segue che $x^{\alpha} \partial^{\beta}(fg) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

2) Dobbiamo dimostrare che $\|x^{\alpha}\partial_{x}^{\beta}(f*g)\|_{\infty} < \infty$ per ogni α, β , quindi che $x^{a}\partial_{x}^{\beta} \int f(x-y)g(y)dy \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{n}).$

Possiamo scrivere:

$$x^{\alpha}\partial_{x}^{\beta}\int f(x-y)g(y)dy = x^{\alpha}\int (\partial_{x}^{\beta}f)(x-y)g(y)dy$$

poichè sono soddisfatte le ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Infatti f e g sono funzioni in $S(\mathbb{R}^n)$ e c'è una dominazione uniforme dell'integrando rispetto al parametro x. La dominazione uniforme si vede stimando la funzione f con la costante $c = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$: $|f(x-y)g(y)| \le H(y)$ con H(y) = cg(y) e $\int H(y)dy < \infty$.

Chiamiamo $\partial^{\beta}f=\widetilde{f}.$ Allora $\widetilde{f}\in S(\mathbb{R}^n)$ e la (8.21) diventa:

$$x^{\alpha} \int (\partial_x^{\beta} f)(x - y)g(y)dy = x^{\alpha} \int \widetilde{f}(x - y)g(y)dy$$

$$= \int x^{\alpha} \widetilde{f}(x - y)g(y)dy$$
(8.21)

Scrivendo x come (x - y) + y si ha

$$x^{\alpha} = ((x - y) + y)^{\alpha}$$
$$= \sum_{\gamma \le \alpha} {\alpha \choose \gamma} (x - y)^{\gamma} y^{\alpha - \gamma},$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo applicato la formula del binomio di Newton. Di conseguenza, la (8.22) diventa:

$$\sum_{\gamma < \alpha} {\alpha \choose \gamma} \int \left((x - y)^{\gamma} \widetilde{f}(x - y) \right) \left(y^{\alpha - \gamma} g(y) \right) dy. \tag{8.22}$$

Dobbiamo quindi dimostrare che la funzione (8.22) appartiene a L^{∞} . Poniamo $\widetilde{\widetilde{f}}_{\gamma}(t) = t^{\gamma}\widetilde{f}(t)$ e $\widetilde{g}_{\alpha-\gamma}(t) = t^{\alpha-\gamma}g(t)$. Poichè per ipotesi f e $g \in S(\mathbb{R}^n)$ allora anche $\widetilde{\widetilde{f}}_{\gamma}(t)$ e $\widetilde{g}_{\alpha-\gamma}(t) \in S(\mathbb{R}^n)$.

Notiamo che la funzione (8.22) si può riscrivere come

$$\sum_{\gamma \le \alpha} {\alpha \choose \gamma} \widetilde{\widetilde{f}}_{\gamma} * \widetilde{g}_{\alpha - \gamma}, \tag{8.23}$$

quindi siamo ricondotti a dimostrare che se $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ allora $f * g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Poichè $S \subset L^1$ e $S \subset L^{\infty}$ allora usiamo la disuguaglianza di Young nel caso particolare $p = \infty$: $L^1 * L^{\infty} \subset L^{\infty}$ e otteniamo $f * g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Mediante l'utilizzo della trasformata di Fourier si può passare dalla convoluzione al prodotto aritmetico.

Teorema 8.5.3. Siano $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Allora:

1)
$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$$

2)
$$\widehat{fg} = (2\pi)^{-n} \widehat{f} * \widehat{g}$$

Dimostrazione. 1) Si ha

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int e^{-ix\xi} \left(\int f(x - y)g(y)dy \right) dx$$

$$= \int \left(\int e^{-ix\xi} f(x - y)g(y)dy \right) dx$$

$$= \int \int e^{-ix\xi} f(x - y)g(y)dydx$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che $e^{-ix\xi}$ è una costante rispetto all'integrazione in dy, mentre nell'ultima abbiamo usato il Teorema di Fubini. Se poniamo x=(x-y)+y allora $e^{-ix\xi}=e^{-i(x-y)\xi}e^{-iy\xi}$ e la (8.24) diventa:

$$\int \int e^{-ix\xi} f(x-y)g(y)dydx = \int \int (e^{-i(x-y)\xi} f(x-y))(e^{-iy\xi}g(y))dxdy$$

Facciamo un cambio di variabili in \mathbb{R}^{2n} ponendo x' = x - y, y' = y. Allora il determinante Jacobiano della trasformazione è uguale a 1. Di conseguenza:

$$(8.24)y = \int \int (e^{-ix'\xi}f(x'))(e^{-iy'\xi}g(y'))dx'dy'$$
$$= \left(\int e^{-ix'\xi}f(x')dx'\right)\left(\int e^{-iy'\xi}g(y')dy'\right)$$
$$= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Avevamo ipotizzato che valesse il Teorema di Fubini, verifichiamolo ora. Dobbiamo dimostrare che la funzione integranda $e^{-ix\xi}f(x-y)g(y)$ è in $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Tralasciamo il termine $e^{-ix\xi}$ perché $|e^{-ix\xi}|=1$, quindi proviamo che

$$|f(x-y)g(y)| \le \frac{C}{(1+|x|^2+|y|^2)^N}, \quad \text{con } 2N > 2n.$$

Se la disequazione è soddisfatta allora vale Fubini.

Per ipotesi $f,g\in S(\mathbb{R}^n)$, cioè sono funzioni di $o\left(\frac{1}{|x|^k}\right)$, quindi

$$|g(y)| \le \frac{C_P}{(1+|y|^2)^P}, \qquad |f(x-y)| \le \frac{K_Q}{(1+|x-y|^2)^Q}$$

con P e Q costanti arbitrarie. Segue che

$$|f(x-y)g(y)| \le \frac{C_P K_Q}{(1+|y|^2)^P (1+|x-y|^2)^Q}.$$
 (8.24)

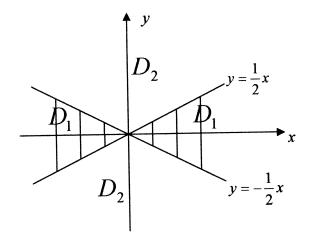
Per continuare nella dimostrazione abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 8.5.4 (Peetre). Si ha:

$$1+|x-y|^2 \ge C \frac{1+|x|^2}{1+|y|^2}, \quad C > 0.$$
 (8.25)

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo lo spazio di dimensione n=1 e dimostriamo che $C(1+x^2) \leq (1+y^2)(1+(x-y)^2)$.

Dividiamo lo spazio in due regioni e chiamiamo D_1 la regione in cui $|y| \le \frac{1}{2}x$ e D_2 la regione in cui $|y| > \frac{1}{2}x$. Mostriamo che in entrambe le regioni la disuguaglianza di Peetre è vera.



- In
$$D_2$$
: $y^2 > \frac{1}{4}x^2$ e poichè $1 + (x - y)^2 \ge 1$ segue che

$$(1+y^2)(1+(x-y)^2) \ge (1+\frac{1}{4}x^2) > \frac{1}{4}(1+x^2).$$

- In
$$D_1$$
: $(1+y^2) \ge 1$.

Inoltre

$$|x| = |x - y + y| \le |x - y| + |y| \le |x - y| + \frac{1}{2} |x|$$
.

Segue che

$$|x| - \frac{1}{2} |x| \le |x - y|,$$

cioè

$$\frac{1}{2} \mid x \mid \leq \mid x - y \mid.$$

Vediamo quindi che

$$(1+y^2)(1+(x-y)^2) \ge 1 + \frac{1}{4}x^2 > \frac{1}{4}(1+x^2).$$

Si osserva che la disuguaglianza vale in entrambe le regioni con costante $c=\frac{1}{4}.$

La disuguaglianza di Peetre può essere riscritta come

$$\frac{1}{(1+\mid x-y\mid^2)^Q} \le (C^{-1})^Q \frac{(1+\mid y\mid^2)^Q}{(1+\mid x\mid^2)^Q}.$$

Allora la (8.24) diventa

$$|f(x-y)g(y)| \leq \frac{C_P K_Q}{(1+|y|^2)^P (1+|x-y|^2)^Q}$$

$$\leq \frac{C_P K_Q (C^{-1})^Q (1+|y|^2)^Q}{(1+|y|^2)^P (1+|x|^2)^Q}$$

$$= \frac{C_P K_Q (C^{-1})^Q}{(1+|y|^2)^{P-Q} (1+|x|^2)^Q}$$

$$\leq \frac{C_Q}{(1+|y|^2)^Q (1+|x|^2)^Q}$$

$$\leq \frac{C_Q}{(1+|x|^2+|y|^2)^Q}$$

siamo giunti alla tesi ponendo P=2Q e scegliendo 2Q>2n.

2) Dobbiamo verificare che

$$f(x)g(x) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} * \widehat{g}).$$

Sappiamo che la trasformata di Fourier inversa di una funzione f è

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} f(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \widehat{f}(-x),$$

quindi

$$(2\pi)^{-n}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}*\widehat{g}) = (2\pi)^{-n}(2\pi)^{-n}\widehat{\widehat{f}*\widehat{g}}(-x)$$
$$= (2\pi)^{-2n}\widehat{\widehat{f}}(-x)\widehat{\widehat{g}}(-x)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la proprietà 1) appena dimostrata.

Proseguendo si ottiene

$$(2\pi)^{-2n}\widehat{\widehat{f}}(-x)\widehat{\widehat{g}}(-x) = \left((2\pi)^{-n}(\widehat{\widehat{f}})(-x)\right)\left((2\pi)^{-n}(\widehat{\widehat{g}})(-x)\right)$$
$$= (\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(\mathcal{F}^{-1}(x)\widehat{g})(x)$$
$$= fg(x).$$

L'operazione di convoluzione u * v non si riesce a definire per $u, v \in S'(\mathbb{R}^n)$ generici. Vediamo un esempio.

П

Esempio 8.5.5. 1 * 1 non è definita in analogia al fatto che anche il prodotto aritmetico di distribuzioni non è sempre definito.

Infatti $\widehat{1*1} = \widehat{1} \ \widehat{1} = (2\pi)^n \delta(2\pi)^n \delta.$

 $Ma~il~prodotto~di~distribuzioni~\delta\delta~non~\grave{e}~definito.$

Esistono diversi casi notevoli di spazi funzionali A, B contenuti in $S'(\mathbb{R}^n)$ tali che per $f \in A, g \in B, f * g$ risulta ben definita.

Considerati gli spazi delle trasformate, $\widehat{f} \in \widehat{A}, \widehat{g} \in \widehat{B}$ risulta allora $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Possiamo fare un esempio, ma prima è necessario introdurre la disuguaglianza di Hausdorff-Young, che dimostreremo successivamente. Essa afferma che, per $1 \le p \le 2$ ed $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si ha $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Esempio 8.5.6. Siano $A = L^1(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ $e B = L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$.

Consideriamo $f \in B = L^p$ con $1 \le p \le 2$ allora per la disuguaglianza di Hausdorff-Young $\widehat{f} \in L^{p'}$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Sia invece $g \in A = L^1$ con $1 \le p \le 2$ allora $\widehat{g} \in L^{\infty}$. Poichè la disuguaglianza di Young afferma che per $1 \le p \le \infty$, $L^1 *^p \subset L^p$ allora $f * g \in L^p$ ed è ben definita. Invece, per $2 , <math>\widehat{f}$ riesce a definirsi ma è una distribuzione in $S'(\mathbb{R}^n)$ e non appartiene a $L^{p'}$. Per esempio la trasformata di Fourier di $1 \in L^{\infty}$ è $\widehat{1} = (2\pi)^n \delta \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 8.5.7. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \le p \le 2$. Allora

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \in L^{p'},$$

 $con \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

Un ulteriore caso notevole in cui la convoluzione è ben definita si ha quando $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, dove $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme delle distribuzioni a supporto compatto. In questo caso, $u * v \in S'$ e

$$\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v} \quad \in S'(\mathbb{R}^n).$$

Esempio 8.5.8. 1) Sia $v = \delta$. Allora

$$(u * \delta)(x) = \int u(x - y)\delta(y)dy$$
$$= u(x)$$

Quindi per ogni $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, $u * \delta = u$.

Inoltre
$$\widehat{u * \delta} = \widehat{u}\widehat{\delta} = \widehat{u}$$
.

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che $\hat{\delta} = 1$.

2) Sia $v = D^{\alpha} \delta$.

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Poich\`{e}} \ D^{\alpha}\delta(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\delta(D^{\alpha}\varphi) = (-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\varphi(0), \\ \\ (u*D^{\alpha}\delta)(x) & = & (-1)^{|\alpha|}\int u(x-y)D^{\alpha}\delta(y)dy \\ \\ & = & (-1)^{2|\alpha|}D^{\alpha}u(x) \\ \\ & = & D^{\alpha}u. \end{array}$$

Allora

$$\widehat{u*D^{\alpha}\delta} = \widehat{u} \ \widehat{D^{\alpha}\delta},$$

$$\inf tii \quad \widehat{u*D^{\alpha}\delta} = \widehat{D^{\alpha}u} = \xi^{\alpha}\widehat{u} \ e \ \widehat{u} \ \widehat{D^{\alpha}\delta} = \xi^{\alpha}\widehat{\delta} \ \widehat{u} = \xi^{\alpha}\widehat{u}.$$

8.6 La trasfomata di Fourier in L^2

Analizziamo ora il comportamento della trasformata di Fourier in L^2 ; a tal fine enuenciamo e dimostriamo alcuni risultati:

Teorema 8.6.1. Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, allora \widehat{f} risulta ben definita in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e l'applicazione $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ è un'isometria, cioè:

$$||\widehat{f}||_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}||f||_{L^2}.$$

Proprietà 8.6.2. Proprietà di Parseval

Siano f e g due funzioni definite in $S(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\int \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int f(x)\widehat{g}(x)dx \tag{8.26}$$

Dimostrazione.

$$\int \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int (e^{-ix\xi}f(x)dx)g(\xi)d\xi \tag{8.27}$$

Per continuare è necessario verificare se è possibile applicare il teorema di Fubini, quindi studiamo il modulo:

$$|e^{-ix\xi}f(x)g(\xi)| = |f(x)||g(\xi)| \le \frac{C_N}{(1+|x|^2)^N} \frac{C_N'}{(1+|\xi|^2)^N} < \infty;$$

dunque si ha che $e^{-ix\xi}f(x)g(\xi)\in L^1(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$ e la (8.27) può essere scritta come

$$\int \int e^{-ix\xi} f(x)g(\xi)dx d\xi = \int f(x) \Big(\int e^{-ix\xi} g(\xi)d\xi \Big) dx$$

e, osservando che

$$\int e^{-ix\xi}g(\xi)d\xi = \widehat{g}(x),$$

si ottiene la tesi.

Teorema 8.6.3. Teorema di Plancherel

Sia f una funzione definita in $S(\mathbb{R}^n)$, allora

$$||\widehat{f}||_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} ||f||_{L^2}. \tag{8.28}$$

Dimostrazione.

$$||\widehat{f}||_{L^2}^2 = \int \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi$$

Si applica ora la proprietà di Parseval con $g(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$ e si ottengono le seguenti uguaglianze:

$$g(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)} = \overline{\int e^{-ix\xi} f(x) dx} = \int \overline{e^{-ix\xi} f(x)} dx = \int e^{ix\xi} \overline{f(x)} dx =$$
$$= (2\pi)^n (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \overline{f(x)} dx,$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo moltiplicato e diviso per la quantità $(2\pi)^{-n}$. Osserviamo ora che

$$(2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}\overline{f(x)}dx = \mathcal{F}^{-1}(\overline{f}).$$

Ciò significa che $g(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)} = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\overline{f})$ e quindi

$$||\widehat{f}||_{L^{2}}^{2} = \int \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi = \int f(x) \widehat{g}(\xi) dx.$$

E' necessario ricordare inoltre che

$$\widehat{g} = \mathcal{F}g = \mathcal{F}[(2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\overline{f})] = (2\pi)^n \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(\overline{f}) = (2\pi)^n \overline{f}$$
$$\Rightarrow ||\widehat{f}||_{L^2}^2 = (2\pi)^n \int f(x)\overline{f(x)} dx = (2\pi)^n ||\widehat{f}||_{L^2}^2$$

e, estrando la radice, otteniamo la tesi.

Esistono due costruzioni della trasformata di Fourier in L^2 , una più recente, l'altra rimasta in vigore dal 1920 al 1960. La costruzione più antica prevedeva di considerare una funzione f definita in L^2 e di fissare un numero reale R. Il primo passo era quello di troncare la funzione f nei punti di ascissa R e -R andando così a definire la funzione f_R come segue:

$$f_R = \begin{cases} f & per \ |x| \le R \\ 0 & altrove. \end{cases}$$

Per come è definita è ovvio che la funzione f_R appartenga allo spazio L^1 ; si calcolava, in seguito, la trasformata di Fourier f_R che appartiene allo spazio L^{∞} e che è una successione di Cauchy in L^2 .

La trasformata di Fourier della funzione di partenza f veniva quindi definita come

$$\widehat{f} = \lim_{R \to \infty} \widehat{f_R}.$$

La costruzione moderna, invece, prevede di considerare una successione di funzioni f_j definita in $S(\mathbb{R}^n)$ con $j=1,2,\ldots$, tale che la successione converga a un limite f nello spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$. Come già dimostrato, \hat{f}_j appartiene alla classe $S(\mathbb{R}^n), \forall j=1,2,\ldots$

Essendo la successione f_j convergente in L^2 , è di Cauchy in L^2 ; cioè:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists j_0 \text{ tale che } \forall j, h > j_0$$

risulta $||f_j - f_h||_{L^2} < \epsilon$.

Poichè L^2 è uno spazio completo, allora ogni successione di Cauchy in tale spazio è convergente.

La successione \widehat{f}_j è una successione di Cauchy, infatti:

$$||\widehat{f}_{j} - \widehat{f}_{h}||_{L^{2}} = ||\widehat{f_{j} - f_{h}}||_{L^{2}}$$

e per il teorema di Plancherel

$$||\widehat{f_j - f_h}||_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} ||f_j - f_h||_{L^2} < (2\pi)^{\frac{n}{2}} \epsilon.$$

Quindi, per i risultati trovati,

$$\exists H \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } H = \lim_{j \to \infty} \widehat{f}_j.$$

Definizione 8.6.4. Si definisce allora trasformata di Fourier per una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{f} = H = \lim_{j \to \infty} \widehat{f}_j. \tag{8.29}$$

8.7 La trasformata di Fourier in L^p

La definizione della trasformata di Fourier per le funzioni definite nello spazio L^p , si ricava dal seguente

Teorema 8.7.1. Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p \le 2$ e p' tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Allora si può definire \widehat{f} e risulta:

$$||\widehat{f}||_{L^{p'}} \le (2\pi)^{\frac{n}{p'}} ||f||_{L^p}.$$

Andiamo ad analizzare i casi notevoli:

• $p=1, \ p^{'}=\infty \Rightarrow \frac{n}{p^{'}}=0$ In tal caso abbiamo che

$$||\widehat{f}||_{L^{\infty}} \le (2\pi)^0 ||f||_{L^1}$$
, ovvero $||\widehat{f}||_{L^{\infty}} \le ||f||_{L^1}$

• p = 2, $p' = 2 \Rightarrow \frac{n}{p'} = \frac{n}{2}$. Dunque si ha che

$$||\widehat{f}||_{L^2} \le (2\pi)^{\frac{n}{2}} ||f||_{L^2}$$

Possiamo fare alcune osservazioni:

- 1. se p > 1, la trasformata di Fourier \hat{f} viene definita attraverso la densità;
- 2. se $2 la trasformata di Fourier <math>\widehat{f}$ si riesce a definire, ma non appartiene più allo spazio $L^{p'}$; infatti se consideriamo p' = 1, quindi $p = \infty$, e una funzione $f \in L^{\infty}$, si ha che $f(x) = 1 \in L^{\infty}$, ma $\widehat{f} = \widehat{1} = \delta \notin L^1$.

8.8 Esempi ed applicazioni

In dimensione n=1, consideriamo la 'funzione porta', definita come segue:

$$P_T(\xi) = \begin{cases} 1 & |x| \le T/2; \\ 0 & |x| > T/2. \end{cases}$$

E' evidente che $P_T(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$, infatti $\int |P_T(\xi)| dx = \text{costante} < \infty$ per come è costruita.

Calcolo la trasformata di Fourier:

$$\widehat{P}_T(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} P_T(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-ix\xi} 1 dx =$$

per $\xi \neq 0$ tale integrale è uguale a

$$= \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{-i\xi} \left[e^{-i\frac{T}{2}\xi} - e^{i\frac{T}{2}\xi}\right] = \frac{e^{i\frac{T}{2}\xi} - e^{-i\frac{T}{2}\xi}}{i\xi} = \frac{2i\sin(\frac{T}{2}\xi)}{i\xi} = \frac{2\sin(\frac{T}{2}\xi)}{\xi}.$$

Calcolo la trasformata anche per $\xi = 0$:

$$\widehat{P}_T(0) = \int_{-T/2}^{T/2} dx = T.$$

Ricapitolando, la trasformata di Fourier della 'funzione porta' è:

$$\widehat{P}_T(\xi) = \begin{cases} \frac{2\sin(\frac{T}{2}\xi)}{\xi} & \xi \neq 0; \\ T & \xi = 0. \end{cases}$$

A questo punto consideriamo il caso T=1/2 e riscriviamo la nostra 'funzione porta' e la sua trasformata di Fourier:

$$P(\xi) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1; \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

$$\widehat{P}(\xi) = \begin{cases} \frac{2\sin\xi}{\xi} & \xi \neq 0; \\ 1/2 & \xi = 0. \end{cases}$$

Ma $\widehat{P}(\xi) \notin L^1(\mathbb{R})$:

$$||\widehat{P}(\xi)||_{L^{1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{P}(\xi)| d\xi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin \xi|}{|\xi|} d\xi = \infty;$$

infatti tale integrale si comporta come una serie $\Sigma^{\frac{1}{k}}$, che è una serie divergente. A questo punto poniamoci in $L^2(\mathbb{R})$.

La 'funzione porta' $P(\xi) \in L^2$, infatti $||P(\xi)||_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi)|^2 dx < \infty$.

Inoltre, contrariamente a quanto avviene in L^1 , anche la sua trasformata di Fourier appartiene a L^2 , poichè abbiamo:

$$||\widehat{P}(\xi)||_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{P}(\xi)|^2 d\xi = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi < \infty.$$

Capitolo 9

Gli spazi di Sobolev

In questo capitolo, si utilizzeranno le seguenti notazioni:

• Una distribuzione $\phi \in S'(\mathbb{R}^n)$ si dice di tipo funzione se esiste una funzione f tale che

$$\forall \psi \in S(\mathbb{R}^n), \ \langle \phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x) \ \mathrm{dx};$$

tale f, se esiste, è unica;

• data una distribuzione ϕ , e uno spazio funzionale V chiedere che " $\phi \in V$ " vuol dire chiedere che ϕ sia una distribuzione di tipo funzione, la cui funzione associata stia in V.

Definizione 9.0.1. Si definiscono Spazi di Sobolev gli spazi del tipo

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \quad \partial^{\alpha} f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall |\alpha| \leq m \}.$$

Si utilizzano anche le notazioni $H^m(\mathbb{R}^n) = W^{m,2}(\mathbb{R}^n), \ H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n).$

D'ora in avanti si studieranno solo questi ultimi spazi.

Gli $H^m(\mathbb{R}^n)$ sono degli spazi vettorali su \mathbb{R} , e si può dare loro una struttura di spazio normato, ponendo

$$||u||_{H^m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \le m} ||\partial^{\alpha} u||_2^2}$$
 (9.1)

In realtà gli spazi $H^m(\mathbb{R}^n)$ sono dotati di un prodotto interno, compatibile con la norma, che li rende spazi di Hilbert. Tale prodotto è definito nel modo seguente:

$$(f,g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \le m} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\alpha} f \, \overline{\partial^{\alpha} g(x)} \, dx$$
$$= \sum_{|\alpha| \le m} (\partial^{\alpha} f, \partial^{\alpha} g)_2.$$

Il fatto che $\|.\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ sia una norma deriva direttamente dal fatto che $\|.\|_2$ è una norma.

Infatti:

- 1. Per ogni $u \in H^m(\mathbb{R}^n), ||u||_{H^m} \ge 0;$
- 2. $||u||_{H^m} = 0$ implica $||\partial^{\alpha} u||_2 = 0 \ \forall |\alpha| \leq m$; in particolare $||u||_2 = 0$, ed essendo $L^2(\mathbb{R}^n)$ uno spazio normato, u = 0;
- 3. Se $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda u\|_{H^{m}} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \le m} \|\lambda \partial^{\alpha} u\|_{2}^{2}} = \sqrt{|\lambda|^{2} \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^{\alpha} u\|_{2}^{2}}$$
$$= |\lambda| \sqrt{\sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^{\alpha} u\|_{2}^{2}} = |\lambda| \|u\|_{H^{m}};$$

4. Se $u, v \in H^m(\mathbb{R}^n)$,

$$||u+v||_{H^{m}}^{2} = \left| \left(u+v, u+v \right)_{H^{m}} \right| \leq \left| \left(u, u+v \right)_{H^{m}} \right| + \left| \left(v, u+v \right)_{H^{m}} \right|$$

$$\stackrel{C.-S.}{\leq} ||u||_{H^{m}} ||u+v||_{H^{m}} + ||v||_{H^{m}} ||u+v||_{H^{m}};$$

dividendo per $||u+v||_{Hm}$, si ha la tesi.

Teorema 9.0.2. Gli spazi $H^m(\mathbb{R}^n)$, con le norme definite in (9.1), sono spazi di Banach.

Dimostrazione. Sia $\{v_k\}_{k>0}$ una successione di Cauchy in $H^m(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_{\varepsilon} : \forall h, k > N_{\varepsilon}, \|v_k - v_h\|_{H^m} < \varepsilon.$$

In particulare, per ogni multi-indice α , con $|\alpha| < m$,

$$\forall h, k > N_{\varepsilon}, \|\partial^{\alpha} v_k - \partial^{\alpha} v_h\|_2 < \|v_k - v_h\|_{H^m} < \varepsilon.$$

Pertanto le successioni $\{\partial^{\alpha}v_k\}_{k>0}$ sono successioni di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^n)$, ed essendo questo uno spazio di Banach, convergono; esistono quindi funzioni $u, u_{\alpha} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tali che $v_k \to u$, $\partial^{\alpha}v_k \to u_{\alpha}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Quello che si vuole mostrare ora è che $\partial^{\alpha}u$ e u_{α} definiscono la stessa distribuzione. Presa infatti una funzione $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \partial^{\alpha} v_{k}, \psi \rangle \begin{cases} \rightarrow \langle u_{\alpha}, \psi \rangle \\ = (-1)^{|\alpha|} \langle v_{k}, \partial^{\alpha} \psi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^{\alpha} \psi \rangle = \langle \partial^{\alpha} u, \psi \rangle \end{cases}$$

Per l'unicità del limite, $\langle u_{\alpha}, \psi \rangle = \langle \partial^{\alpha} u, \psi \rangle$. Pertanto $\partial^{\alpha} v_k \to \partial^{\alpha} u$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, e

$$\lim_{k \to \infty} \|v_k - u\|_{H^m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \le m} \lim_{k \to \infty} \|\partial^{\alpha} v_k - \partial^{\alpha} u\|_2} = 0,$$

da cui $v_k \to u$ in $H^m(\mathbb{R}^n)$, e ciò prova la completezza di questo spazio.

Esercizio 9.0.3. Siano date le funzioni

(1)
$$f = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1 - e^{-x}}{x} & x > 0 \end{cases}$$
, (2) $g = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1 - e^{-x}}{x + 1} & x > 0 \end{cases}$

Stabilire per quali m si ha $f \in H^m(\mathbb{R}), g \in H^m(\mathbb{R})$

Risoluzione. 1) Anzitutto $f \in L^2(\mathbb{R})$: infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_0^{+\infty} \left| \frac{1 - e^{-x}}{x} \right|^2 dx \le c + \int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{x} \right|^2 dx < \infty.$$

Calcoliamo ora f' nel senso delle distribuzioni: presa $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle f', \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x) dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \phi'(x) dx;$$

integrando per parti, si ottiene

$$\langle f', \phi \rangle = \left| \frac{1 - e^{-x}}{x} \phi(x) \right|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x^2} \phi(x) \, dx =$$

$$= \phi(0) - \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x^2} \phi(x) \, dx =$$

$$= \langle \delta_0 - F, \phi \rangle,$$
(9.2)

dove F è la distribuzione, di tipo funzione, data da $\langle F, \phi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x^2} \phi(x) dx$. Da (9.2), $f' = \delta_0 - F$ nel senso delle distribuzioni; da ciò segue che f' non è una distribuzione di tipo funzione, perché altrimenti lo sarebbe anche $\delta_0 = f' + F$. In particolare, $f \notin H^1(\mathbb{R})$.

2) Anche in questo caso $g \in L^2(\mathbb{R})$, poiché |g(x)| < |f(x)| q.o. (dove f è la funzione che compare nell'esercizio precedente), e per la monotonia dell'integrale $||g||_2 \le ||f||_2 < \infty$. Per g', si procede come prima:

$$\langle g', \phi \rangle = -\langle g, \phi' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi(x) \, dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + 1} \phi(x)' \, dx$$
$$= \left| \frac{1 - e^{-x}}{x + 1} \phi(x) \right|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \frac{(x + 2)e^{-x} - 1}{(x + 1)^{2}} \phi(x) \, dx$$
$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1 - (x + 2)e^{-x}}{(x + 1)^{2}} \phi(x) \, dx.$$

Pertanto g' è di tipo funzione, ed è definita come

$$g' = \begin{cases} 0 & x \le 0\\ \frac{1 - (x+2)e^{-x}}{(x+1)^2} & x > 0 \end{cases}$$

Inoltre, per ogni $x \in [0, +\infty)$,

$$|g'(x)|^2 = \left| \frac{1 - (x+2)e^{-x}}{(x+1)^2} \right|^2 \le \frac{1}{|x+1|^4} + \left| \frac{x+2}{x+1} \right|^2 \left| \frac{e^{-x}}{x+1} \right|^2 \le \frac{1}{|x+1|^4} + \frac{4}{|x+1|^2},$$

che è integrabile su $[0, +\infty)$; pertanto $g' \in L^2(\mathbb{R})$, e $g \in H^1(\mathbb{R})$. Ripetendo gli stessi ragionamenti, si ottiene

$$g'' = G - \delta_0,$$

dove G è una distribuzione di tipo funzione. In particolare $g'' \notin L^2(\mathbb{R})$, e $g \notin H^2(\mathbb{R})$.

9.0.1 Trasformate di Fourier delle funzioni in $H^m(\mathbb{R}^n)$

Definizione 9.0.4. Si definisce $\tilde{H}^m(\mathbb{R}^n)$ lo spazio normato

$$\tilde{H}^m(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \},$$

dotato della norma

$$||f||_{\tilde{H}^m(\mathbb{R}^n)} = ||(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi)||_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|1+|\xi|^2\right|^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 9.0.5. $H^m(\mathbb{R}^n) = \tilde{H}^m(\mathbb{R}^n)$, e le norme corrispondenti sono equivalenti.

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema, basta dimostrare che esistono delle costanti $c_1, c_2 \neq 0$ tali che

1)
$$\forall f \in H^m(\mathbb{R}^n), \|f\|_{\tilde{H}^m(\mathbb{R}^n)} \le c_1 \|f\|_{H^m};$$

2)
$$\forall f \in \tilde{H}^m(\mathbb{R}^n), \|f\|_{H^m} \le c_2 \|f\|_{\tilde{H}^m(\mathbb{R}^n)}.$$

1) Si ha

$$||f||_{\tilde{H}^{m}(\mathbb{R}^{n})}^{2} = \int_{\mathbb{R}^{n}} \left| 1 + |\xi|^{2} \right|^{m} |\hat{f}(\xi)|^{2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^{n}} \sum_{|\alpha| \leq m} c_{\alpha} |\xi^{\alpha}|^{2} |\hat{f}(\xi)|^{2}$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} c_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^{n}} |\xi^{\alpha} \hat{f}(\xi)|^{2} d\xi = \sum_{|\alpha| \leq m} c_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^{n}} |\widehat{D^{\alpha} f}(\xi)|^{2} d\xi$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} c_{\alpha} ||\widehat{D^{\alpha} f}||_{2}^{2} \stackrel{Plancherel}{=} (2\pi)^{n} \sum_{|\alpha| \leq m} c_{\alpha} ||D^{\alpha} f||_{2}^{2}$$

$$\leq (2\pi)^{n} \max_{\alpha} (c_{\alpha}) \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^{\alpha} f||_{2}^{2} = c_{1} ||f||_{H^{m}}^{2};$$

posto $c_1 := (2\pi)^n \max_{\alpha}$, si ha perciò la tesi.

2) Viceversa,

$$||f||_{H^m}^2 = \sum_{|\alpha| \le m} ||D^{\alpha} f||_2^2 = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \le m} ||\widehat{D^{\alpha} f}||_2^2$$

$$= (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \le m} ||\xi^{\alpha} \widehat{f}||_2^2.$$
(9.3)

Se si riuscisse a provare che

$$\forall |\alpha| \le m, \ \exists c_{\alpha} : \ |\xi^{\alpha}|^2 \le c_{\alpha} (1 + |\xi|^2)^m, \tag{9.4}$$

allora per la monotonia dell'integrale si avrebbe

$$\|\xi^{\alpha}\hat{f}\|_{2}^{2} = \int_{\mathbb{R}^{n}} |\xi^{\alpha}|^{2} |\hat{f}(\xi)|^{2} d\xi \le c_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^{n}} (1 + |\xi|^{2})^{m} |\hat{f}(\xi)|^{2} d\xi = c_{\alpha} \|f\|_{\tilde{H}^{m}(\mathbb{R}^{n})}^{2},$$

da cui, ricordando (9.3),

$$||f||_{H^m}^2 = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \le m} ||\xi^{\alpha} \hat{f}||_2^2 \le (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \le m} (c_{\alpha} ||f||_{\tilde{H}^m(\mathbb{R}^n)}^2)$$
$$= (2\pi)^{-n} \left(\sum_{|\alpha| \le m} c_{\alpha} \right) ||f||_{\tilde{H}^m(\mathbb{R}^n)}^2 = c_2 ||f||_{\tilde{H}^m(\mathbb{R}^n)}^2,$$

posto
$$c_2 = (2\pi)^{-n} \left(\sum_{|\alpha| \le m} c_{\alpha} \right).$$

Per dimostrare (9.4), basta osservare che

$$|\xi|^{2|\alpha|} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_{i}|^{2}\right)^{|\alpha|} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_{i}|^{2}\right)^{\sum_{j} \alpha_{j}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_{i}|^{2}\right)^{\alpha_{j}} \ge \prod_{j=1}^{n} \left(|\xi_{j}|^{2}\right)^{\alpha_{j}} = \left(\prod_{j=1}^{n} |\xi_{j}|^{\alpha_{j}}\right)^{2} = |\xi^{\alpha}|^{2},$$

e che se $|\alpha| < m$,

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \frac{|\xi^{\alpha}|^2}{(1+|\xi|^2)^m} \le \lim_{|\xi| \to +\infty} \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^m} = \begin{cases} 0 & |\alpha| < m \\ 1 & |\alpha| = s \end{cases};$$

essendo $\frac{|\xi^{\alpha}|^2}{(1+|\xi|^2)^m}$ continua su tutto \mathbb{R}^n , e tendendo ad un valore limitato all'infinito, allora è limitata, e pertanto esiste una costante c tale che $\frac{|\xi^{\alpha}|^2}{(1+|\xi|^2)^m} \leq c$, ovvero

$$|\xi^{\alpha}|^2 \le c(1+|\xi|^2)^m$$

Per il teorema, si possono identificare i due spazi, e d'ora in avanti si utilizzerà solo la notazione $H^m(\mathbb{R}^n)$ anziché $\tilde{H}^m(\mathbb{R}^n)$. La nuova definizione, tuttavia, consente di definire gli spazi $H^m(\mathbb{R}^n)$ anche per m numero reale qualunque.

Osservazioni

- Per ogni $m, 1 \notin H^m(\mathbb{R}^n)$; infatti $\hat{1} = (2\pi)^n \delta_0 \notin L^2(\mathbb{R}^n)$;
- Per s < 0, $L^2(\mathbb{R}^n) \subset H^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; per s > 0, $H^m(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$;

Esercizio 9.0.6. Trovare per quali $m \in \mathbb{R}$ tale che $\delta_0 \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

Risoluzione. La trasformata di Fourier di δ_0 è 1. L'esercizio si riduce pertanto a trovare i valori m tali che $(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{\delta_0}=(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, ovvero tali che

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m \, d\xi < +\infty$$

Per x >> 0, $(1+|\xi|^2)^m \sim |\xi|^{2m}$; affinché l'integrale converga, per la condizione di integrabilità impropria deve essere

$$2m < -n \Rightarrow m < -\frac{n}{2}.$$

Perciò $\delta_0 \in H^m(\mathbb{R}^n)$ per $m < -\frac{n}{2}$.

Esercizio 9.0.7. Sia $f = \chi_{[-1,1]}$ la funzione porta centrata nell'origine. Trovare i valori $m \in \mathbb{R}$ tale che $f \in H^m(\mathbb{R})$.

Risoluzione. Anzitutto $f \in L^2(\mathbb{R})$, mentre $f' = \delta_{-1} - \delta_1 \notin L^2(\mathbb{R})$, pertanto se $f \in H^m(\mathbb{R})$ allora m < 1. La trasformata di f è

$$\hat{f}(\xi) = 2\operatorname{sinc}(\xi) = 2\frac{\sin(\xi)}{\xi}.$$

Se $f \in H^m(\mathbb{R})$ allora

$$||f||_{H^m(\mathbb{R})}^2 = 4 \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^m \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2} d\xi < +\infty.$$

All'infinito $(1+\xi^2)^m \sin^2(\xi)/\xi^2 \sim \xi^{2m-2}$, e per il criterio di integrabilità impropria dev'essere $2m-2<-1 \Rightarrow m<\frac{1}{2}$. Pertanto $f\in H^m$ per $m<\frac{1}{2}$.

9.1 Il teorema di inclusione di Sobolev

Teorema 9.1.1 (Teorema di inclusione di Sobolev).

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subseteq C^0(\mathbb{R}^n) \quad \text{per } m > \frac{n}{2}$$

Dimostrazione. Sia $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$, con $m > \frac{n}{2}$. Se si dimostrasse che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $f = F^{-1}(\hat{f}) \in C_0^0(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n)$ per il teorema di Riemann-Lebesgue. Ma in effetti

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} d\xi$$

$$\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2} d\xi \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^m} d\xi}.$$

Il primo integrale converge perché $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ per ipotesi, e il secondo converge perché si è posto 2m > n. Pertanto anche l'integrale di partenza converge, e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Corollario 9.1.2.

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subseteq C^r(\mathbb{R}^n) \text{per } m > r + \frac{n}{2}.$$

Corollario 9.1.3.

$$\cap_{m>0} H^m(\mathbb{R}^n) \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Capitolo 10

Operatori Pseudo-differenziali

Consideriamo un generico operatore alle derivate parziali a coefficienti costanti, dato da:

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} C_{\alpha} D^{\alpha} \tag{10.1}$$

 $m \in \mathbb{N}$ $C_{\alpha} \in \mathbb{C}$

Tale operatore P può essere definito su $S(\mathbb{R}^n)$ o su $S'(\mathbb{R}^n)$:

$$P: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

oppure

$$P: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$$

Applichiamo l'operatore P alla funzione $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ed usiamo la relazione $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f =$ f:

$$Pf(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(Pf)) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \hat{Pf}(\xi) d\xi$$
 (10.2)

Ma

$$\widehat{Pf}(\xi) = \sum_{|\alpha \le m} C_{\alpha} \widehat{fD^{\alpha}} = \sum_{|\alpha \le m} C_{\alpha} \xi_{\alpha} \widehat{f} = p(\xi) \widehat{f}(\xi)$$
(10.3)

dove il polinomio $p(\xi)=\sum_{|\alpha|\leq m}C_{\alpha}\xi^{\alpha}$ si dice simbolo di P. C'è una corrispondenza biunivoca tra P e p:

$$Pf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$
 (10.4)

Se $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ tutti i passaggi precedenti si possono intendere in senso debole.

Teorema 10.0.4. Gli operatori P sono continui fra i seguenti spazi di Sobolev:

$$P: H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$$

 $\forall s \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$. Inoltre sussiste la disuguaglianza

$$||Pf||_{H^{s-m}} \le C ||f||_{H^s}. \tag{10.5}$$

Dimostrazione.

$$||Pf||_{H^{s-m}}^2 = \int (1+|\xi|^2)^{s-m} |\widehat{Pf}(\xi)|^2 d\xi = \int (1+|\xi|^2)^{s-m} |p(\xi)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Ma $|p(\xi)|^2 = |\sum_{|\alpha| \le m} |C_{\alpha} \xi^{\alpha}|^2 \le C(1 + |\xi|^2)^m = C||f||_{H^s}^2$.

Utilizziamo l'uguaglianza $\widehat{Pf}(\xi) = p(\xi)\widehat{f}(\xi)$ otteniamo la disuguaglianza della tesi:

$$||Pf||_{H^{s-m}} \le C ||f||_{H^s}$$
.

Per P polinomio abbiamo provato che $Pf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$ con $\widehat{Pf}(\xi) = p(\xi)\hat{f}(\xi)$. Possiamo provare ad estendere tale procedura a funzioni diverse dai polinomi.

Definizione 10.0.5. Sia $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Si dice operatore pseudo-differenziale P = p(D), l'operatore tale che

$$\widehat{p(D)f}(\xi) = p(\xi)\widehat{f},$$

dove la funzione $p(\xi)$, definita su \mathbb{R}^n , è detta simbolo di p(D). Usando l'antitrasformata di Fourier, si ha

$$p(D)f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi, \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$
 (10.6)

Gli operatori pseudo-differenziali servono per studiare equazioni differenziali perché ci permettono di trasformare problemi analitici in problemi algebrici.

Consideriamo P = p(D) operatore pseudo-differenziale a coefficienti costanti in \mathbb{R}^n , definito da $P = \sum_{|\alpha| \le m} C_{\alpha} D^{\alpha}$. Per il Teorema 10.0.4:

$$P: H^m(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n).$$

Il problema che normalmente si vuole risolvere è

$$Pu = f, (10.7)$$

dove f è una funzione nello spazio H^{s-m} .

Ricordiamo che un operatore pseudo-differenziale P è iniettivo se e solo se $ker(P) = \{0\}$, ovvero $Pu = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$.

In questo caso esiste un operatore pseudo-differenziale P^{-1} , l'operatore inverso di P, e si può trovare la soluzione u del problema (10.7) moltiplicando ambo i membri dell'equazione per P^{-1} .

Indichiamo con S^m l'insieme di tutti i simboli $p(\xi)$ con $\xi \in \mathbb{R}^n$, che soddisfano la disuguaglianza

$$|p(\xi)| \le C(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}. (10.8)$$

In particolare $p \in L^{\infty}_{loc}$ (ricordiamo che $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $f \in L^{\infty}(K)$ per qualunque compatto K di \mathbb{R}^n).

Osservazioni:

• Le funzioni a crescita algebrica sono funzioni in S^m : infatti $|p(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}$ La costante C ottimale (ovvero mi fornisce la migliore maggiorazione possibile) è data da:

$$C = \left\| \frac{p(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} = essup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|p(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}}$$

• Se $p \in S^m$ ed $f \in S(\mathbb{R}^n)$ si ha che $p(\xi)\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$p(D)f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(\xi)f(\xi)d\xi \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

- L'operatore p(D) non si estende in generale a qualunque distribuzione $(f \in S'(\mathbb{R}^n))$, perchè per alcune distribuzioni (come ad esempio δ), l'operatore pseudo-differenziale non è ben definito.
- Per ogni m > 0 $S^0 \subset S^m$.
- Se $m_1 < m_2$ allora $S^{m_1} \subset S^{m_2}$.

Teorema 10.0.6. Sia $p(\xi) \in S^m$, $m \in \mathbb{R}$. Per ogni $s \in \mathbb{R}$, si ha

$$p(D): H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$$
 (10.9)

e vale la seguente disuguaglianza:

$$||p(D)f||_{H^{s-m}} \le C||f||_{H^s}. \tag{10.10}$$

La costante C che fornisce la maggiorazione ottimale è data da

$$C = \left\| \frac{p(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$
 (10.11)

Dimostrazione. Per definizione,

$$||p(D)f||_{H^{s-m}} = ||(1+|\xi|^2)^{\frac{s-m}{2}}\widehat{p(D)f}(\xi)||_{L^2}.$$

Per la definizione di operatore pseudo-differenziale, si ha $\widehat{p(D)f} = p(\xi)\widehat{f}(\xi)$, quindi, moltiplicando e dividendo per $(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}$,

$$||p(D)f||_{H^{s-m}} = ||(1+|\xi|^2)^{\frac{s-m}{2}} (1+|\xi|^{\frac{m}{2}}) \frac{p(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \hat{f}(\xi)||_{L^2}$$

sommando gli esponenti $\frac{s-m}{2}$ ed $\frac{m}{2}$ questa espressione diventa

$$||p(D)f||_{H^{s-m}} = ||(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\xi)\frac{p(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}}||_{L^2}.$$

A questo punto ricordiamo il seguente lemma (di ovvia dimostrazione):

Lemma 10.0.7. Se $F \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $G \in L^2(\mathbb{R}^n)$; allora $FG \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre $||FG||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||F||_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} ||G||_{L^2}(\mathbb{R}^n)$.

Applicando il lemma con $F = \frac{p(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e con $G = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$||FG||_{L^{2}} = ||\frac{p(\xi)}{(1+|\xi|^{2})^{\frac{m}{2}}}(1+|\xi|^{2})^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\xi)||_{L^{2}}$$

$$\leq ||\frac{p(\xi)}{(1+|\xi|^{2})^{\frac{m}{2}}}||_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{n})}||(1+|\xi|^{2})^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\xi)||_{L^{2}(\mathbb{R}^{n})};$$

ponendo $\|\frac{p(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} = C$, si ottiene la tesi: $\|p(D)f\|_{H^{s-m}} \leq C\|f\|_{H^s}$.

Esempio. Consideriamo la funzione in \mathbb{R}^n :

$$p_{+}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \ge a \\ 0 & \text{se } \xi < a \end{cases}$$

 $con a \in \mathbb{R}.$

Questo simbolo viene usato in analisi dei segnali: supponiamo che il segnale sia rappresentato dalla funzione f(x) (e quindi che le frequenze del segnale siano date da $\hat{f}(\xi)$):

$$p_{+}(D)f(x) = (2\pi)^{-1} \int e^{ix\xi} p_{+}(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$
.

L'operatore p_+ seleziona solo le frequenze da un certo valore $a \in \mathbb{R}$ in poi. Dopo l'applicazione di tale operatore, chiamato passa-alto, si otterrà un segnale epurato

di alcune frequenze, cosa che può risultare molto utile in caso di rumore di fondo. Il filtro passa-alto è un operatore continuo definito tra spazi di Sobolev:

$$p_+: H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\mathbb{R}).$$

Infatti, $p_+ \in \mathcal{S}^0$ e quindi questa relazione è conseguenza del teorema appena dimostrato.

Si definisce in modo analogo il filtro passa-basso:

$$p_{-}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \le a \\ 0 & \text{se } \xi > a \end{cases}$$

per $a \in \mathbb{R}$.

Anch'esso opera con continuità nello stesso spazio H^s , ma l'azione di questo filtro consiste nell'epurare il segnale delle frequenze troppo alte.

Unendo le azioni di questi due operatori si ottiene il filtro passa-banda:

$$p(\xi) = \chi_{[a,b]}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \le \xi \le b \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

L'operatore con simbolo dato da questo filtro, ovvero $\chi_{[a,b]}(D)$, permette di togliere al segnale le frequenze troppo alte e quelle troppo basse. $\chi_{[a,b]}(D)$ ha quindi un'azione regolarizzante.

10.1 Operatori pseudo-differenziali come operatori di convoluzione

Per $p \in S^m$ ricordiamo che

$$p(\mathcal{D})f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Definiamo **nucleo** dell'operatore $p(\mathcal{D})$ la distribuzione $k = \mathcal{F}^{-1}(p(\xi))$, dove \mathcal{F}^{-1} è da intendersi nel senso delle distribuzioni.

Ricordando che $k * f(x) = \int k(x-y)f(y)dy$, otteniamo:

$$\widehat{p(\mathcal{D})f} = p(\xi)\widehat{f} = \widehat{k}\widehat{f} = \widehat{k*f}. \tag{10.12}$$

Da questa uguaglianza segue che ogni operatore di convoluzione P = k* può essere pensato come operatore pesudo-differenziale di simbolo $p(\xi) = \hat{k}(\xi)$.

Come esempio, sia $p(\xi)$ funzione passa-banda con a=-1,b=1, ovvero

$$p(\xi) = \chi_{[-1,1]}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \le \xi \le 1\\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determiniamo il nucleo k. Per definizione, $p(\xi) = \hat{k}(\xi)$, quindi

$$k(x) = \mathcal{F}^{-1}(p)(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-1}^{1} e^{ix\xi} d\xi$$
$$= (2\pi)^{-1} \int e^{-ix\xi} d\xi = (2\pi)^{-1} 2 \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin x}{x}.$$

Quindi, l'operatore passa-banda $\chi_{[-1,1]}(D)$ é dato da

$$\chi_{[-1,1]}(D)f(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{sen(x-y)}{x-y} f(y) dy.$$

Per $p \in S^m$, con un valore di m molto negativo, p decrescerà in modo molto rapido, quindi $k = \mathcal{F}^{-1}(p)$ può essere definito in termini classici, in altre parole l'operatore pseudo-differenziale coincide con l'operatore integrale canonico.

Consideriamo ora l'esempio dell'operatore identico, il cui simbolo è $p(\xi) = 1$. Infatti,

$$p(\mathcal{D})f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} 1\hat{f}(\xi)d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(x))) = f(x)$$

L'operatore identico è ben definito per funzioni f in $S(\mathbb{R}^n)$, $S'(\mathbb{R}^n)$, oppure in tutti gli spazi di Sobolev.

Il suo nucleo sarà dato da

$$k = \mathcal{F}^{-1}(1) = \delta.$$

Concludiamo con il calcolo del nucleo di simboli polinomiali, ovvero $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} \xi^{\alpha}$ (il cui operatore pseudo-differenziale è $p(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} D^{\alpha}$). Si ha

$$k = \mathcal{F}^{-1}(\sum_{|\alpha| \le m} C_{\alpha} \xi^{\alpha}) = \sum_{|\alpha| \le m} C_{\alpha} \mathcal{F}^{-1}(\xi^{\alpha}) = \sum_{|\alpha| \le m} C_{\alpha} D^{\alpha} \delta.$$

10.2 Problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger

Si definisce operatore di Schrödinger P, l'operatore

$$P = \partial_t + i\Delta_r$$

dove Δ_x è il Laplaciano. Ricordiamo che per f_1, f_2 a valori reali,

$$\Delta(f_1 + if_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta f_1 = 0 \\ \Delta f_2 = 0. \end{cases}$$

Il problema in campo complesso si può dunque facilmente ricondurre a due problemi a valori reali.

Posto $f(x,t) = f_1(x,t) + i f_2(x,t)$, con f_1 ed f_2 parte reale e parte immaginaria di f rispettivamente, si ha

$$Pf(x,t) = (\partial_t + i\Delta_x)(f_1(x,t) + if_2(x,t)) = (\partial_t f_1 - \Delta_x f_2) + i(\Delta_x f_1 + \partial_t f_2).$$

Quindi Pf(x,t) = 0 se e solo se

$$\begin{cases} (\partial_t f_1 - \Delta_x f_2) = 0 \\ \Delta_x f_1 + \partial_t f_2 = 0 \end{cases}$$

Si è così ottenuto un sistema di due equazioni alle derivate parziali. Noi useremo tuttavia la trasformata di Fourier per determinare la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger, dato da

$$\begin{cases} \partial_t f + i\Delta_x f = 0\\ f(x,0) = f_0(x) \end{cases}$$
 (10.13)

Cerchiamo una soluzione usando la trasformata di Fourier nella variabile x:

$$\hat{f}(t,\xi) = \int e^{-ix\xi} f(t,x) dx$$

Si ha quindi

$$\hat{P}f(x,t) = \partial_t \hat{f} + i\widehat{\Delta f} = \partial_t \hat{f} - i|\xi|^2 \hat{f} = 0$$

Trasformiamo anche le condizioni iniziali:

$$\hat{f}(0,\xi) = \hat{f}_0(\xi).$$

Quindi il problema diventa:

$$\begin{cases} (\partial_t \hat{f} - i|\xi|^2 \hat{f}) = 0\\ \hat{f}(0,\xi) = \hat{f}_0(\xi). \end{cases}$$

Risolvendo rispetto al tempo si ha la soluzione

$$\hat{f}(t,\xi) = \hat{f}_0(\xi)e^{it|\xi|^2}.$$

Ragioniamo ora su t fissato; applicando l'antitrasformata nella variabile ξ a $\hat{f}(t,\xi)$ si arriva alla soluzione del problema originale:

$$f(x,t) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} e^{it|\xi|^2} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Abbiamo ottenuto un operatore pseudo-differenziale con simbolo $p(\xi) = e^{it|\xi|^2}$. Osserviamo che

- per t=0, $p(\xi) = 1$
- per t=1, $p(\xi) = e^{i|\xi|}$
- per t fissato $p(\xi) \in S^0$. Infatti, $|e^{it|\xi|^2}| = 1 \quad \forall t, \xi$. In particolare,

$$p(D) = e^{it|D|^2} : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

e

$$||e^{it|D|^2}f_0||_{H^s} \le \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |e^{it|\xi|^2}| = ||f_0||_{H^s}.$$

Vale dunque il seguente teorema:

Teorema 10.2.1. Si fissi $s \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $f_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f + i\Delta_x f = 0\\ f(x,0) = f_0(x), \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione $f(t,\cdot)$ tale che

$$||f(t,x)||_{H^s} \le ||f_0||_{H^s}.$$

Esistenza e unicità della soluzione di equazioni 10.3pseudo-differenziali

Introducendo la notazione $\langle \xi \rangle = \sqrt{(1+|\xi|^2)}$ abbiamo che una funzione $p: \mathbb{R}^n \to$ \mathbb{C} appartiene alla classe S^m se e solo se

$$|p(\xi)| \le C\langle \xi \rangle^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$
 (10.14)

Questo implica, in particolare, $\frac{p(\xi)}{\langle \xi \rangle^m} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Il nostro obbiettivo è quello di trovare la soluzione dell'equazione

$$p(D)u = f, (10.15)$$

dove $f \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ è una funzione assegnata, mentre $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ è l'incognita.

Teorema 10.3.1 (Teorema del calcolo simbolico). Siano $p_1 \in S^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ e $p_2 \in$ $S^{m_2}(\mathbb{R}^n)$ due simboli. Si considerino, per s fissato,

$$p_1(D): H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-m_1}(\mathbb{R}^n)$$

 $p_2(D): H^{s-m_1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-(m_1+m_2)}(\mathbb{R}^n)$

Allora, la composizione

$$p_2(D)p_1(D): H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-(m_1+m_2)}(\mathbb{R}^n)$$

è un operatore pseudo-differenziale $p(D) := p_1(D)p_2(D)$, il cui simbolo è il prodotto aritmetico dei simboli di $p_1(D)$ e $p_2(D)$, ovvero $p(\xi) = p_1(\xi)p_2(\xi)$, con $p \in$ $S^{m_1+m_2}$.

Dimostrazione. Consideriamo $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Si ha

$$p_{2}(D)p_{1}(D) u = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p_{2}(\xi) p_{1}(\widehat{D}) u(\xi) d\xi$$
$$= (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p_{2}(\xi) p_{1}(\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$
$$= (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$
$$= p(D) u.$$

Mostriamo ora che $p \in S^{m_1+m_2}$.

Per ipotesi

$$\frac{p_1(\xi)}{\langle \xi \rangle^{m_1}} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \frac{p_2(\xi)}{\langle \xi \rangle^{m_2}} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Allora,

$$\frac{p(\xi)}{\langle \xi \rangle^{m_1 + m_2}} = \frac{p_2(\xi)p_1(\xi)}{\langle \xi \rangle^{m_1 + m_2}} = \frac{p_1(\xi)}{\langle \xi \rangle^{m_1}} \frac{p_2(\xi)}{\langle \xi \rangle^{m_2}} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Risulta allora giustificata la scrittura $p_2p_1(D)$ in luogo di $p_2(D)p_1(D)$. Si consideri l'algebra dei simboli

$$\bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m$$

e l'insieme degli operatori pseudo-differenziali

$$OPS^m = \{ p(D) : p(\xi) \in S^m \}.$$

Teorema 10.3.2. L'applicazione

$$p(D) \longmapsto p(\xi)$$

è un isomorfismo tra le algebre:

$$\bigcup_{m\in\mathbb{R}} \mathsf{OPS}^m \longrightarrow \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m$$

Osservazione 10.3.1. Risulta $p_2(D)p_1(D) = p_1(D)p_2(D)$ in quanto il prodotto aritmetico è commutativo e il Teorema 10.3.2 garantisce la commutatività del prodotto degli operatori.

Definizione 10.3.3. Un simbolo $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ è detto ellittico (globalmente) se esiste un $\varepsilon > 0$ per cui

$$\varepsilon \langle \xi \rangle^m \leqslant |p(\xi)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$
 (10.16)

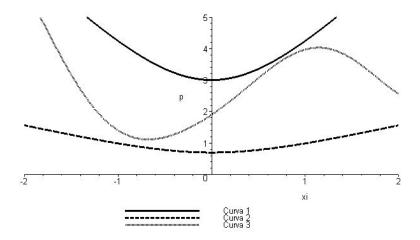


Figura 10.1: la Curva 3 mostra il grafico del simbolo $|p(\xi)|$: esso è maggiorato dalla funzione $C\langle\xi\rangle^m$ (Curva 1), quindi appartiene ad S^m , ed è minorato dalla funzione $\varepsilon\langle\xi\rangle^m$ (Curva 2), quindi è ellittico.

In Figura 10.1 troviamo un esempio di simbolo ellittico.

Osservazione 10.3.2. Se il simbolo $p \in S^m$ è ellittico allora il suo inverso aritmetico è un simbolo di ordine -m, ossia $\frac{1}{p(\xi)} \in \mathcal{S}^{-m}$, ed è anch'esso ellittico. Infatti, ricordiamo che $p \in S^m$ ellittico verifica la (10.16), da cui $p(\xi) \neq 0$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$. Di conseguenza, $\frac{1}{p(\xi)}$ è ben definito.

Invertendo la diseguaglianza (10.16) si ottiene

$$\frac{1}{|p(\xi)|} \leqslant \varepsilon^{-1} \langle \xi \rangle^{-m}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

ovvero $\frac{1}{p(\xi)}$ è un simbolo di ordine -m. Invertendo invece la diseguaglianza (10.14) otteniamo

$$C^{-1}\langle \xi \rangle^{-m} \leqslant \left| \frac{1}{p(\xi)} \right|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

ovvero anche il simbolo $\frac{1}{p(\xi)}$ è ellittico.

Teorema 10.3.4. Sia $p \in S^m$ un simbolo ellittico. Si consideri, per s fissato, l'equazione

$$p(D) u = f (10.17)$$

con $f \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ fissata e $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ incognita. Allora esiste ed è unica la soluzione $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Considerato poi l'operatore pseudo-differenziale $\frac{1}{p(D)}$ con simbolo $\frac{1}{p(\xi)} \in S^{-m}$ risulta, per ogni $s \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{p(D)} p(D) = I \quad in \ H^s(\mathbb{R}^n)$$
 (10.18)

e

$$p(D)\frac{1}{p(D)} = I \quad in \ H^t(\mathbb{R}^n). \tag{10.19}$$

Inoltre, la soluzione $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione (10.17) è fornita da

$$u = \frac{1}{p(D)} f.$$

Dimostrazione. Innanzitutto, per il Teorema 10.3.1, poichè $\frac{1}{p(\xi)} \in S^{-m}$, l'operatore $\frac{1}{p(D)}$ agisce tra gli spazi

$$\frac{1}{p(D)}: H^t(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t-(-m)}(\mathbb{R}^n)$$

e posto t = s - m e quindi t + m = s, si ha

$$\frac{1}{p(D)}: H^{s-m}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n).$$

Le (10.18) e (10.19) seguono dal calcolo simbolico in quanto

$$\frac{1}{p(\xi)}p(\xi) = p(\xi)\frac{1}{p(\xi)} = 1. \tag{10.20}$$

Verifichiamo che $u = \frac{1}{p(D)} f$ è soluzione della (10.17):

$$\begin{split} p(D) \left(\frac{1}{p(D)} \, f\right)(x) = & (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(\xi) \widehat{\frac{1}{p(D)} f(\xi)} \, d\xi \\ = & (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(\xi) \frac{1}{p(\xi)} \widehat{f}(\xi) \, d\xi \\ = & (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi = f(x). \end{split}$$

Mostriamo infine che la soluzione u è unica. Si consideri la mappa

$$p(D): H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n).$$

Essa è iniettiva in quanto $\frac{1}{p(D)}$ è inverso sinistro di p(D): infatti, in virtù del Teorema 10.3.2, dalla (10.20) si ottiene

$$\frac{1}{p(D)}p(D) = I_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Grazie all'iniettività possiamo affermare che la soluzione $u = \frac{1}{p(D)} f$ è unica, infatti, se esistesse una funzione $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tale che p(D)v = f allora si avrebbe u(x) = v(x).

Ricordando che p(D) può essere interpretato come operatore di convoluzione

$$p(D) u(x) = \int K(x - y)u(y) dy,$$

ovvero
$$p(D) = K*$$
, con $K = \mathcal{F}^{-1}(p)$, risulta $\frac{1}{p(D)} = H*$, con $H = \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{p})$.

Prima di analizzare alcuni esempi di operatori, introduciamo una nozione strettamente legata alla nozione di ellitticità.

Definiamo innanzitutto il **simbolo principale** p_m del simbolo $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} \xi^{\alpha}$, dato da

$$p_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha \, \xi^\alpha.$$

Diciamo che $p(\xi)$ è **localmente ellittico** se $p_m(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \neq 0$. La seguente proprietà esprime il legame tra l'ellitticità e l'ellitticità locale.

Proprietà 10.3.5. Se il simbolo p è localmente ellittico e $p(\xi) \neq 0$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ allora p è ellittico. Viceversa, se p è ellittico allora p è localmente ellittico e $p(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

10.4 Esempi ed esercizi

Operatore differenziale a coefficienti costanti: p(D).

$$p(D) = \sum_{|\alpha| \le m} C_{\alpha} D^{\alpha},$$

con simbolo $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} C_{\alpha} \xi^{\alpha}, C_{\alpha} \in \mathbb{C}.$

Come caso particolare consideriamo l'operatore che descrive l'equazione della particella libera in \mathbb{R}^n

$$p(\mathcal{D}) = -\Delta + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vogliamo risolvere l'equazione

$$-\Delta u + \lambda u = f$$

con $f \in H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ assegnata e $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ incognita.

Tipicamente l'equazione della particella libera si studia per s=2 e quindi $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $u\in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Per provare che la soluzione esiste ed è unica, mostriamo che p è ellittico. Per poter rispondere a questa domanda dobbiamo analizzare il simbolo dell'operatore p(D): sapendo che $-\Delta = \sum_{j=1}^n (-i)^2 \partial_{x_j}^2 = \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2$ otteniamo $p(\xi) = |\xi|^2 + \lambda$. Notiamo che il simbolo è sempre localmente ellittico perchè il simbolo principale $|\xi|^2$ è non nullo per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, ma non è sempre ellittico, in quanto l'equazione $|\xi|^2 + \lambda \neq 0$ vale solo per $\xi \in \mathbb{R}^n / |\xi| \neq \sqrt{-\lambda}$, e la soluzione dipende da λ . In particolare, vale la seguente

Proprietà 10.4.1. Il simbolo $|\xi|^2 + \lambda$ è ellittico $\iff \lambda > 0$.

 $Dimostrazione. `\Rightarrow$ '

Per dimostrare questa implicazione dimostriamo che se $\lambda \leq 0$ allora $p(\xi)$ non è ellittico. Se $\lambda \leq 0$, allora $|\xi|^2 + \lambda = 0$ per $\xi = \sqrt{-\lambda}$. Ricordiamo che il simbolo in questione è localmente ellittico per cui applicando la Proprietà 10.3.5 si ottiene che il simbolo non è ellittico.

'⇐'

Vogliamo dimostrare che, se $\lambda > 0$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon \langle \xi \rangle^2 \leq |p(\xi)|$. La diseguaglianza risulta verificata per $\varepsilon = \min\{1, \lambda\}$, infatti

• se $\lambda \geqslant 1$, scegliamo $\varepsilon = 1 > 0$

$$|\xi|^2 + \lambda \geqslant |\xi|^2 + 1 = \langle \xi \rangle^2 = \varepsilon \langle \xi \rangle^2$$

• se $\lambda < 1$, scegliamo $\varepsilon = \lambda > 0$

$$|\xi|^2 + \lambda \geqslant \lambda |\xi|^2 + \lambda = \lambda (|\xi|^2 + 1) = \varepsilon \langle \xi \rangle^2.$$

Diretta conseguenza della Proprietà appena dimostrata e del Teorema 10.3.4 è il seguente

Teorema 10.4.2. Se $\lambda > 0$ l'equazione

$$-\Delta u + \lambda u = f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

ha una e un sola soluzione $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

La soluzione è data esplicitamente da

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \frac{1}{|\xi|^2 + \lambda} \widehat{f}(\xi) d\xi = \int K(x - y) f(y) dy,$$

dove $K = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^2 + \lambda}\right)$. Derivata frazionaria.

Consideriamo il simbolo $p(\xi) = \langle \xi \rangle^m$ con $m \in \mathbb{R}$ e indichiamo l'operatore corrispondente con $\langle D \rangle^m$. Poichè la catena di diseguaglianze

$$\varepsilon \langle \xi \rangle^m \leqslant \langle \xi \rangle^m \leqslant C \langle \xi \rangle^m$$

è banalmente verificata per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, se si sceglie $\varepsilon \leqslant 1 \leqslant C$, allora possiamo affermare che $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre che esso è ellittico.

Vediamo ora da dove deriva il nome 'derivata frazionaria', e quindi analizziamo il comportamento dell'operatore al variare di m in \mathbb{R} .

• Se $m \in 2\mathbb{N}$, allora l'operatore $\langle D \rangle^m$ risulta essere un operatore a coefficienti costanti con simbolo

$$p(\xi) = \langle \xi \rangle^m = (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}},$$

ovvero

$$\langle D \rangle^m = (1 - \Delta^2)^{\frac{m}{2}}.$$

• Se $m \notin 2\mathbb{N}$, allora otteniamo una derivazione frazionaria e formalmente l'operatore può essere scritto come integale:

$$\langle D \rangle^m u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \langle \xi \rangle^m \widehat{u}(\xi) d\xi$$

In ogni caso il simbolo è ellittico per cui il Teorema 10.3.4 ci assicura che, data l'equazione

$$\langle D \rangle^s u = f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

esiste ed è unica la soluzione $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ data da

$$u(x) = \langle D \rangle^{-s} f = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \frac{1}{\langle \xi \rangle^{s}} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Infatti, l'inverso dell'operatore $\langle D \rangle^s$ è dato da $\langle D \rangle^{-s}$, in virtù del Teorema 10.3.4. Possiamo anche esprimere la norma degli spazi di Sobolev attraverso tali operatori ellittici, come dimostrano i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \|\langle D \rangle^{s} u \|_{L^{2}} &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\widehat{\langle D \rangle^{s} u}\|_{L^{2}} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\langle \xi \rangle^{s} \widehat{u}\|_{L^{2}} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\int (1 + |\xi|^{2})^{s} |\widehat{u}(\xi)|^{2} d\xi} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|u\|_{H^{s}}. \end{aligned}$$

Analisi tempo-frequenza.

Consideriamo un simbolo $p(\xi) \in S^0(\mathbb{R}^n) = L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Ovvero, esiste C > 0, tale che $|p(\xi)| \leq C$, e il simbolo gode della proprietà di ellitticità se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon \leq |p(\xi)|$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Un esempio grafico è riportato in Figura 10.2.

Se il simbolo è ellittico, allora $\frac{1}{p(\xi)}$ verifica $C^{-1} \leqslant \left| \frac{1}{p(\xi)} \right| \leqslant \varepsilon^{-1}$, ed esiste la formula di inversione per $p(D): H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$.

Vogliamo ora analizzare un caso di questo tipo in cui però il simbolo non sia ellittico.

Consideriamo il simbolo

$$p(\xi) = \chi_{[-1,1]}(\xi) \in S^0(\mathbb{R})$$

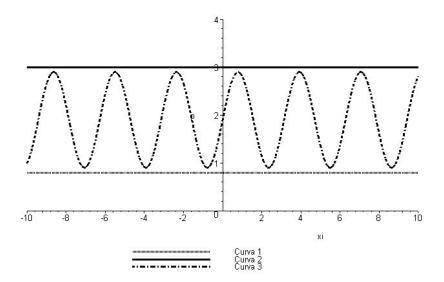


Figura 10.2: la Curva 3 mostra il grafico di un simbolo $p(\xi) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ellittico: infatti esistono C (Curva 2) ed ε (Curva 1) tali che $0 < \varepsilon \le |p(\xi)| \le C$.

e il rispettivo operatore $\chi_{[-1,1]}(D)$. Possiamo affermare che $p(\xi)$ è un simbolo in $S^0(\mathbb{R}^n)$, in quanto $|\chi_{[-1,1]}(\xi)| \leq 1$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, e inoltre possiamo affermare che il simbolo non è ellittico in quanto non esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon \leq \chi_{[-1,1]}(\xi)$. Allora il Teorema 10.3.4 non è valido e la soluzione dell'equazione

$$\chi_{[-1,1]}(D) u(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin(x-y)}{x-y} u(y) \, dy = f(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

non è unica. Ad esempio, ponendo f(x) = 0, l'equazione diventa

$$\chi_{[-1,1]}(D) u = 0$$

con $u \in L^2(\mathbb{R})$. La funzione $u \equiv 0$ è soluzione, ma non è unica, infatti tutte le funzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ tali che supp $\widehat{u}(\xi) \cap [-1,1] = \emptyset$ sono soluzioni di $\chi_{[-1,1]}(D)$ u = 0.

Esercizio 10.4.3. Studiare l'equazione integrale in \mathbb{R} (dipendente dal parametro $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\lambda u(x) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin(x-y)}{x-y} u(y) \, dy = f(x)$$
 (10.21)

con f assegnata in $L^2(\mathbb{R})$. Si cerchino soluzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione Per risolvere questa equazione leggiamola innanzitutto come p(D)u = f(x) con p(D) operatore pseudo-differenziale tale che

$$p(D)u = \lambda u(x) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin(x-y)}{x-y} u(y) \, dy.$$

Il simbolo di p(D) risulta essere $p(\xi) = \lambda + \chi_{[-1,1]}(\xi)$ ed è ellittico per tutti i valori di λ esclusi $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$. Il grafico di $p(\xi)$ per un valore di $\lambda \neq -1, 0$ è riportato in Figura 10.3.

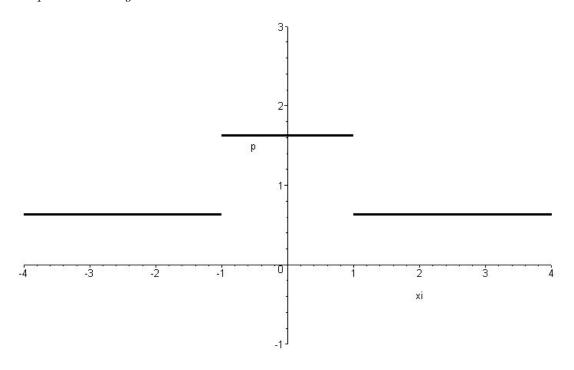


Figura 10.3: grafico della funzione $p(\xi)$ con $\lambda \neq 0, -1$. In questo caso il simbolo è ellittico.

Nel caso in cui il simbolo sia ellittico allora la soluzione esiste ed è unica e possiamo trovarla attraverso l'inverso dell'operatore p(D): la soluzione infatti è data da $u = \frac{1}{p(D)}f$. Calcoliamoci a questo proposito $1/p(\xi)$:

$$\frac{1}{p(\xi)} = \frac{1}{\lambda + \chi_{[-1,1]}(\xi)} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & per |\xi| > 1\\ \frac{1}{\lambda + 1} & per |\xi| \leqslant 1 \end{cases}$$
$$= \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda + 1} - \frac{1}{\lambda}\right) \chi_{[-1,1]}(\xi).$$

Allora la soluzione dell'Equazione (10.21), per $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq -1$, è data da

$$u(x) = \frac{1}{\lambda}f(x) + \left(\frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y) \, dy.$$

10.5 Cenni sugli operatori pseudo-differenziali a coefficienti non costanti

Consideriamo un operatore differenziale lineare a coefficienti non costanti

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} C_{\alpha}(x) D^{\alpha}$$

con $C_{\alpha} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Il corrispondente operatore pseudo-differenziale p(x, D) applicato ad una funzione u(x) sarà

$$p(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi) d\xi,$$

con simbolo $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha}(x) \xi^{\alpha} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{n}_{x} \times \mathbb{R}^{n}_{\xi})$. Infatti,

$$p(x,D)u(x) = \sum_{|\alpha| \le m} C_{\alpha}(x) (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \xi^{\alpha} \widehat{u}(\xi) d\xi = \sum_{|\alpha| \le m} C_{\alpha}(x) D^{\alpha}.$$

Anche in questo caso, si può passare a operatori pseudo-differenziali più generali ampliando la classe dei simboli corrispondenti $p(x,\xi)$. I simboli studiati devono soddisfare opportune condizioni. Tra le più usate ricordiamo:

Caso 1.
$$|p(x,\xi)| \leq C\langle \xi \rangle^{m_1} \langle x \rangle^{m_2}$$
, per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, con $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$.

Caso 2.
$$|p(x,\xi)| \leq C\langle x,\xi\rangle^m$$
, per ogni $x,\xi \in \mathbb{R}^n$, con $\langle x,\xi\rangle = \sqrt{1+|x|^2+|\xi|^2}$ e con $m \in \mathbb{R}$.

Per ognuna delle due definizioni di simbolo si ha la rispettiva condizione di ellitticità: $\exists \varepsilon > 0$ tale che

1.
$$\varepsilon \langle \xi \rangle^{m_1} \langle x \rangle^{m_2} \leqslant |p(x,\xi)|, \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

2.
$$\varepsilon \langle x, \xi \rangle^m \leq |p(x, \xi)|, \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n$$
.

Il problema che ci poniamo è nuovamente riuscire a risolvere un'equazione del tipo

$$p(t, D) u = f$$

nel caso in cui p sia ellittico.

Prima di enunciare il teorema del calcolo simbolico precisiamo per entrambi i casi un'ulteriore condizione di regolarità che è necessario imporre e che definisce le classi dei simboli globali, dette classi SG:

1. Per quanto riguarda il Caso 1 la condizione è

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - |\beta|} \langle x \rangle^{m_2 - |\alpha|}, \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Un esempio tipico è l'operatore che descrive il moto di una particella libera

$$p(x, D) = -\Delta + 1$$

il cui simbolo è $p(x,\xi) = |\xi|^2 + 1$.

2. Ponendo $z=(x,\xi)$, abbiamo che $p(x,\xi)=p(z)$ e la condizione di simbolo nel Caso 2 è data da

$$|\partial^{\gamma} p(z)| \leqslant C_{\gamma} \langle z \rangle^{m-|\gamma|}.$$

In questo caso come esempio tipico si considera l'oscillatore armonico quantistico

$$p(x, D) = -\Delta + |x|^2$$

il cui simbolo è $p(x,\xi) = |\xi|^2 + |x|^2$.

Il Teorema 10.3.4 si estende agli operatori a coefficienti non costanti nel modo seguente:

Teorema 10.5.1 (Teorema del calcolo simbolico). Dati due operatori a coefficienti non costanti $p_1(x, D), p_2(x, D)$, allora la composizione è data da

$$p_1(x, D) p_2(x, D) = p(x, D) + K$$

dove il simbolo dell'operatore p(x, D) è il prodotto aritmetico dei simboli, ovvero

$$p(x,\xi) = p_1(x,\xi)p_2(x,\xi)$$

e K è il cosiddetto operatore 'resto', lineare e compatto da $H^s(\mathbb{R}^n)$ in $H^s(\mathbb{R}^n)$, per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che, nel caso di operatori a coefficienti costanti, il Teorema del calcolo simbolico permette di calcolare l'inverso dell'operatore come l'inverso aritmetico $((p(D))^{-1} = \frac{1}{p(D)})$, grazie all'isomorfismo tra l'algebra dei simboli e l'algebra degli operatori.

Nel caso degli operatori a coefficienti non costanti abbiamo un risultato leggermente più debole, infatti risulta

$$p(x,D)\frac{1}{p(x,D)} = I + K$$

$$\frac{1}{p(x,D)}p(x,D) = I + H$$

dove I è l'operatore che ha per simbolo 1 e K e H sono operatori compatti.

Definizione 10.5.2. Dato $P: H_1 \to H_2$ con H_1 e H_2 spazi di Hilbert, diciamo che P è un operatore ad indice se dim $kerP < \infty$ e dim $KokerP < \infty$.

In base a questa definizione possiamo dire che se un operatore è ad indice allora è 'quasi' iniettivo e 'quasi' suriettivo.

I seguenti due teoremi assieme alla definizione appena data chiariscono ulteriormente le consegenze del Teorema del calcolo simbolico.

Teorema 10.5.3. Se esiste P^{-1} parametrix di P, ovvero se esiste P^{-1} tale che

$$PP^{-1} = I + K$$
$$P^{-1}P = I + H$$

 $con\ K\ e\ H\ compatti,\ allora\ l'operatore\ P\ è\ un\ operatore\ ad\ indice.$

Teorema 10.5.4. Un operatore pseudo-differenziale ellittico è un operatore ad indice.

Bibliografia

- [1] G. B. Folland, Real analysis, John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.
- [2] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, *Real analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ,2005.