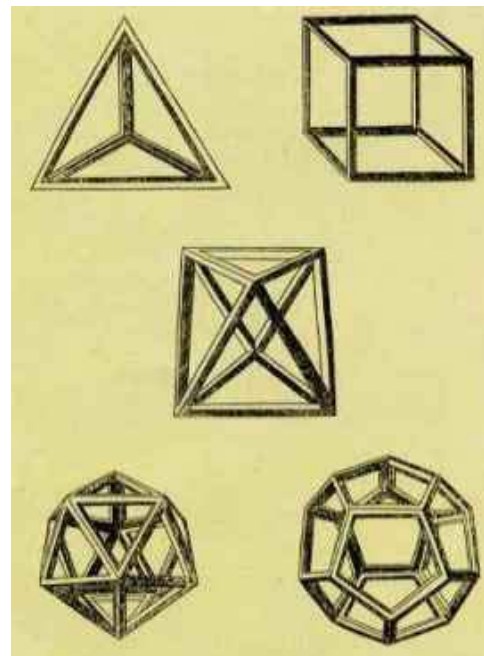


Approfondimento

CENNI DI STORIA SUI POLIEDRI REGOLARI

Il più antico scritto pervenutoci nel quale si citano i poliedri regolari è il *Timeo* di Platone. Ed è sia per questo ritrovamento sia per il ruolo fondamentale che giocano nella cosmologia elaborata da Platone che tradizionalmente i poliedri regolari sono chiamati **Solidi Platonici**.

Tuttavia ci sono buone ragioni per ritenere che la scoperta delle cinque figure poliedriche sia dovuta alla Scuola Pitagorica del VI secolo a.C. L'esistenza del cubo, dell'ottaedro e del tetraedro non sorprende molto, data la particolare semplicità di queste figure. Diverso è il caso del dodecaedro e dell'icosaedro; la loro scoperta può esser fatta risalire al fatto che nella Magna Grecia (in Sicilia, in particolare) si rinvenivano con facilità bellissimi cristalli di pirite dalla forma di dodecaedro. Infatti, sono stati rinvenuti, in vari siti archeologici italiani, oggetti scolpiti con questa forma regolare, databili intorno al VI sec. a.C.



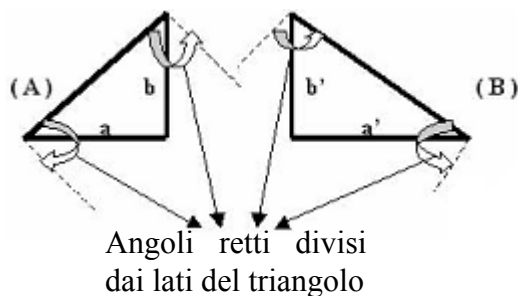
Gli studi di Platone:

Platone nel suo dialogo, *Timeo*, associa il tetraedro, l'ottaedro, il cubo e l'icosaedro rispettivamente a quelli che erano allora ritenuti i quattro elementi fondamentali: fuoco, aria, terra e acqua. Il dodecaedro veniva invece associato all'immagine del cosmo intero, realizzando la cosiddetta quintessenza. Certamente Platone non è il primo a meditare sugli elementi fondamentali della natura, ma la novità che porta è la seguente: le figure geometriche e il numero sono origine delle cose, del cielo e del tempo; il principio armonico alla base della teoria dei quattro corpi è dunque la proporzione e il principio geometrico viene detto essere il triangolo.

Riportiamo i passi del *Timeo* [XX] che spiegano la costruzione dei poliedri regolari:

“E prima di tutto che fuoco e terra e acqua e aria siano corpi è chiaro ad ognuno. Ma ogni specie di corpo ha anche profondità; e la profondità è assolutamente necessario che contenga in sé la natura del piano, e una base di superficie piana si compone di triangoli. Tutti i triangoli derivano poi da due triangoli, ciascuno dei quali ha un angolo retto e due acuti:

e l'uno (A) di questi triangoli ha da ogni parte una porzione uguale di angolo retto diviso da lati uguali, e l'altro (B) due parti diseguali di angolo retto diviso da lati diseguali.”



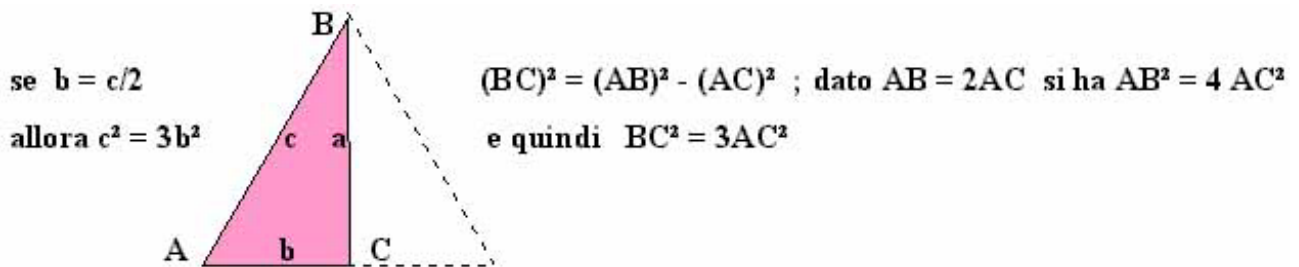
Le porzioni di angolo retto comprese nel triangolo (A) risultano uguali perché i lati a e b risultano uguali, dunque (A) è isoscele; quelle comprese nel triangolo (B) saranno disuguali perché $a' \neq b'$, dunque (B) è scaleno

E' chiaro che, mentre dei triangoli di tipo (A) c'è una sola forma, le forme di (B) sono infinite.

“Pertanto, di queste forme infinite, dobbiamo scegliere la più bellaNoi dunque, dei molti triangoli...ne poniamo uno come il più bello, quello che ripetuto forma un terzo triangolo ch'è equilatero” (è il triangolo rettangolo scaleno con il cateto minore uguale alla metà dell'ipotenusa).



“Dunque i due triangoli scelti, dei quali sono stati fatti i corpi del fuoco e degli altri elementi siano l'isoscele e quello che ha sempre il quadrato del lato maggiore triplo del quadrato del minore” (infatti il triangolo che <<ripetuto>>dà quello equilatero si comporta in questo modo):

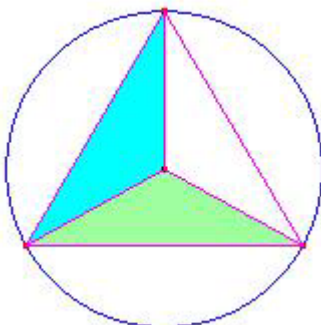


“Dai triangoli scelti nascono le quattro specie di figure, ma tre da quel solo che ha i lati diseguali e la quarta è formata, essa sola, dal triangolo isoscele...le quattro specie non possono dunque dissolversi le une nelle altre, ma quelle tre sì...e questo basti della reciproca trasformazione della specie.”

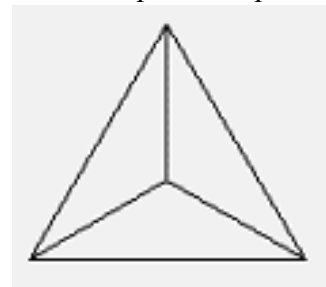
In altre parole l'origine geometrica delle specie impedisce alle quattro nature di dissolversi tutte le une nelle altre: solo per tre di esse è possibile; la quarta, quella originata dal triangolo isoscele, è esclusa.

Mostriamo ora come sono definiti i poliedri nelle loro specie:

“La prima, la più semplicemente costituita, ha come elemento di essa il triangolo con l'ipotenusa doppia del lato minore;...se quattro triangoli equilateri si compongono insieme, formano per ogni tre angoli piani un angolo solido che viene subito dopo il più ottuso degli angoli piani. E di quattro angoli siffatti si compone la prima specie solida che può dividere l'intera sfera in parti uguali e simili.”



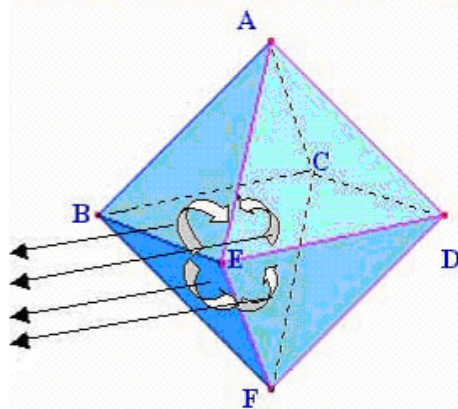
Questa prima specie solida è il **tetraedro**, piramide regolare che ha quattro triangoli equilateri come facce ed è assunto come forma del fuoco.



“... La seconda figura poi si forma degli stessi triangoli, riuniti insieme in otto triangoli equilateri, in modo da fare un angolo solido di quattro angoli piani: e ottenuti sei angoli siffatti, il secondo corpo ha così il compimento.”

Questa seconda figura, **l'ottaedro**, è dotata di sei angoli solidi e otto facce triangolari ed è la forma dell'aria.

Quattro angoli
piani formano
un angolo solido



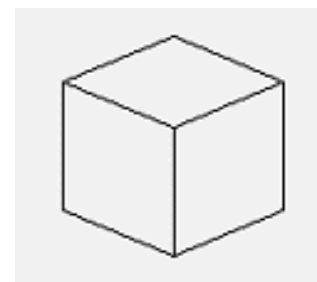
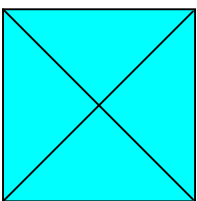
“...La terza specie è poi formata di centoventi triangoli congiunti insieme e di dodici angoli solidi, compresi ciascuno da cinque triangoli equilateri piani, ed ha venti triangoli equilateri per base.”

Questa terza figura, quella dell'acqua, è **l'icosaedro** regolare e poiché ciascuna faccia è un triangolo equilatero composto di sei triangoli rettangoli scaleni (attenzione, non ne bastano due, poiché una tale decomposizione non conserverebbe il gruppo delle simmetrie del solido), l'icosaedro risulta così composto di 120 elementi, e similmente l'ottaedro di 48 e il tetraedro di 24.



“E l'uno dei due elementi, dopo aver generato queste figure, aveva cessato l'opera sua” ossia il triangolo rettangolo scaleno che ha permesso di costruire le tre figure descritte spiega perché fuoco, aria e acqua possono generarsi l'una dall'altra, mentre non potrà essere così per il quarto elemento, la terra, al quale verrà attribuita come base il triangolo rettangolo isoscele.

“Ma il triangolo isoscele generò la natura della quarta specie (questa quarta figura, forma della terra, è il **cubo**) componendosi insieme quattro triangoli isosceli con gli angoli retti congiunti nel centro, in modo da formare un tetragono equilatero (un quadrato): sei di questi tetragoni equilateri connessi insieme compiono otto angoli solidi, ciascuno dei quali deriva dalla combinazione di tre angoli piani retti. E la figura del corpo risultante diviene cubica, con una base di sei tetragoni equilateri piani.”



E' importante il passo del Timeo [XXI-XXII] che descrive le ragioni che implicano le associazioni tra le forme, gli elementi naturali ed i loro possibili modi di vicendevole trasformazione, poiché rappresenta uno dei più significativi paradigmi delle immagini delle figure nella scienza:

“... alla terra diamo la figura cubica: perché delle quattro specie la terra è la più immobile, e dei corpi il più plasmabile. Ed è soprattutto necessario che tale sia quel corpo che ha le basi più salde. Ora dei triangoli posti da principio, è più salda naturalmente la base di quelli a lati uguali che di quelli a lati disuguali, e quanto alle figure piane che compone ciascuna specie di triangoli, il tetragono equilatero (quadrato), tanto nelle parti che nel tutto, è di necessità più solidamente assiso del triangolo equilatero... e poi all'acqua la forma meno mobile delle altre (icosaedro), al fuoco la più mobile (tetraedro), e all'aria

l'intermedia (ottaedro): e così il corpo più piccolo al fuoco (tetraedro), il più grande all'acqua (icosaedro), e l'intermedio all'aria (ottaedro), e inoltre il più acuto al fuoco (tetraedro), il secondo per acutezza all'aria (ottaedro), e il terzo all'acqua (icosaedro) ... Ora di tutte queste forme quella che ha il minor numero di basi è necessariamente la più mobile per natura, perché è la più tagliente e in ogni sua parte la più acuta di tutte, ed è anche la più leggera, essendo costituita dal minor numero delle medesime parti, così la seconda ha in secondo grado tutte queste qualità, e in terzo grado la terza. Sia dunque conforme e retta e verosimile ragione la figura della piramide elemento e germe del fuoco, e diciamo la seconda per generazione quella dell'aria e la terza quella dell'acqua.

E tutti questi elementi bisogna concepirli così piccoli che nessuna delle singole parti di ciascuna specie possa essere veduta da noi per la sua piccolezza, ma riunendosene molte insieme, si vedano le loro masse.

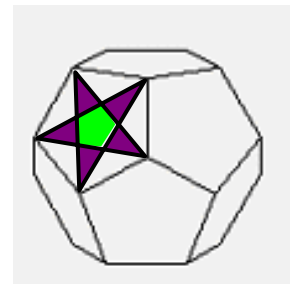
E quanto poi ai rapporti dei numeri, dei movimenti e delle altre proprietà, il Demiurgo, dopo aver compiuto queste cose con esattezza, fino a che lo permetteva la natura della necessità spontanea o persuasa, collocò dappertutto la proporzione e l'armonia.....

La terra, incontrandosi col fuoco e disciolta dall'acutezza di esso, errerebbe qua e là...fino a che le sue parti incontrandosi si riunissero di nuovo, perché esse non potrebbero mai passare in altra specie. Ma l'acqua, disgregata dal fuoco o anche dall'aria, può darsi che ricomponendosi divenga un corpo di fuoco o due di aria. E se l'aria è in dissoluzione, dai frammenti d'una sola delle sue parti possono nascere due corpi di fuoco... E viceversa due corpi di fuoco si ricompongono insieme in una sola specie d'aria. E se l'aria è soverchiata da due parti e mezzo d'aria, si comporrà una parte intera d'acqua."

Tutto ciò diventa comprensibile tenendo conto che con il numero di facce dell'icosaedro, forma dell'acqua, è possibile comporre due ottaedri, forma dell'aria, e un tetraedro, forma del fuoco, e, inoltre, che con le facce dell'ottaedro si possono comporre due tetraedri.

"Restava una quinta combinazione e il Demiurgo se ne giovò per decorare l'universo."

Di questa quinta figura, il **dodecaedro**, che ha per facce 12 pentagoni regolari, nulla di più si legge nel *Timeo*; il motivo di assenza di approfondimento va forse individuato nel fatto che questa figura non presenta una struttura di composizione assimilabile a quella delle altre figure, dal momento che, con i triangoli rettangoli del tipo precedentemente descritto, i cui lati sono proporzionali alle terne $[1, 2, \sqrt{2}]$, $[1, 2, \sqrt{3}]$, è possibile costruire triangoli equilateri e quadrati, ma non pentagoni. Potrebbe comunque essere interessante notare come da un pentagono regolare si può generare un altro pentagono regolare mediante opportuni triangoli isosceli, detti *aurei*, in cui i due angoli uguali misurano 72° ed il rimanente 36° e il rapporto tra il lato maggiore e quello minore è il numero aureo. Il dodecaedro viene associato nel *Timeo* all'immagine dell'intero universo, origine della quintessenza ed immagine di perfezione poiché più degli altri poliedri regolari, già secondo le teorie pitagoriche, approssima la sfera.



Euclide e Archimede:

La descrizione dei solidi data da Platone esercitò una grande influenza sul pensiero e sull'attività scientifica e filosofica delle generazioni successive, aprendo la strada ad un susseguirsi di studi finalizzati all'individuazione delle proprietà geometriche delle cinque figure poliedriche.

Euclide (fine IV, inizi III sec. a.C.), nel XIII libro degli *Elementi*, tratta dei poliedri: si propone di inscrivere ciascun poliedro in una sfera di dato diametro e quindi di determinare il rapporto tra lo spigolo del poliedro inscritto ed il diametro della sfera circoscritta. In tal modo le misure degli spigoli diventano tra loro confrontabili.

Nell'ultimo capitolo del suo libro, inoltre, Euclide dimostra che non ci possono essere altri poliedri regolari al di fuori dei 5.

Anche **Archimede** (287-212 a.C.) si occupa di poliedri, ma non solo di quelli strettamente regolari: egli richiede la regolarità delle facce, ma non pretende che siano tutte dello stesso tipo. Nascono così i primi poliedri semiregolari o archimedeei e anche per questi c'è un numero limitato di possibilità di costruzione: ce ne sono di 13 tipi.

Verso il III sec. d.C. c'è una rinascita della matematica con gli studi di **Pappo** e di **Diofanto**. Pappo affronta il problema dei poliedri inscritti in una sfera in modo nuovo, attraverso la ricerca delle sezioni circolari. Alcuni autori suoi contemporanei scrivono un XV libro degli Elementi in cui compare il calcolo del numero dei vertici, degli spigoli e delle facce dei cinque solidi regolari.

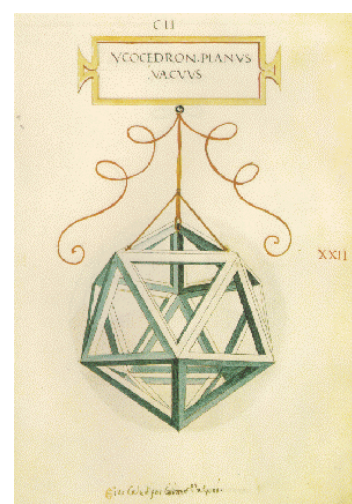
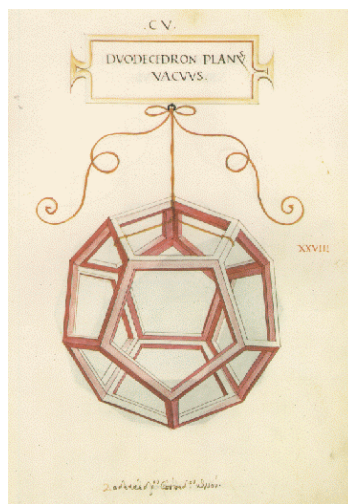
Rinascimento:

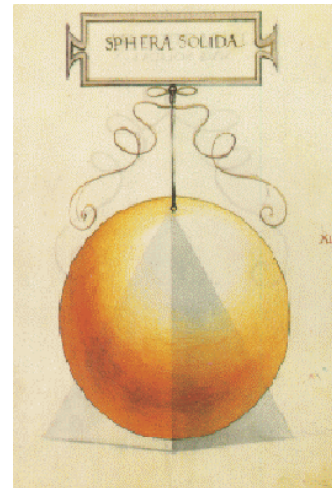
Nel Rinascimento la ripresa dell'interesse e degli studi della geometria è dovuta essenzialmente agli artisti, che fanno di questa disciplina lo strumento indispensabile per la costruzione dell'opera d'arte. L'arte, infatti, si avvicina al metodo scientifico e usa come strumenti di osservazione la geometria, l'ottica, la teoria della luce e dei colori, l'anatomia e la fisiologia: in questo periodo gli "artisti" sono oltre che grandi artisti, matematici e scienziati, basti ricordare a titolo di esempio, **Leonardo da Vinci** (1452-1519).

Leon Battista Alberti (1404-1472) ha concentrato la sua attenzione sul problema di rappresentare nel piano oggetti tridimensionali sotto diversi punti di vista. Nasce così la teoria della prospettiva e il problema di quali siano le proprietà geometriche della figura reale che si conservano, passando alla sua immagine mediante proiezione.

Piero della Francesca (1410-1492) nel trattato "*De quinque corporibus regularibus*" sostiene che il mondo è pieno di corpi complessi o senza una particolare forma, ma ognuno di essi può essere ricondotto ai cinque poliedri regolari che rappresentano l'eterna perfezione. Piero della Francesca intende rivolgere il suo trattato non ai matematici ma agli artisti e dà perciò un taglio applicativo più che dimostrativo, in ogni caso ciò non toglie che a distanza di secoli i cinque solidi platonici vengano ripresi come modello di perfezione.

Fra Luca Pacioli (1471-1514) nella "*Divina Proporzione*" traduce in volgare il testo di Piero della Francesca, inserendo le tavole raffiguranti i cinque poliedri dipinte da Leonardo.

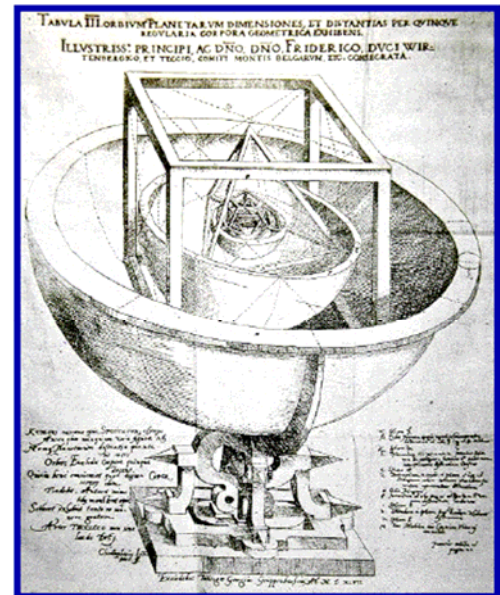




Keplero:

Keplero (1571-1630), noto soprattutto per il suo contributo all'astronomia, diede un non meno fondamentale contributo sia alla teoria della tassellazione del piano, sia allo sviluppo della teoria dei solidi Platonici. Questi due ruoli di Keplero si fondono nel suo tentativo di attribuire le regolarità del sistema planetario alle proprietà dei solidi platonici. Gli astronomi che lo avevano preceduto si accontentavano semplicemente di prendere nota delle posizioni dei pianeti, mentre Keplero aspira ad una teoria che spieghi i dati delle osservazioni. La sua risposta alla questione del perché i pianeti fossero 6 è semplice: 5 sono i poliedri regolari, perciò presi come limiti tridimensionali concentrici, danno origine a 6 spazi, contando anche l'estremo limite sferico che corrisponde al cielo delle stelle fisse. Il suo modello risolve così anche il problema delle dimensioni delle orbite. Nell'opera giovanile "*Mysterium cosmographicum*" Keplero afferma che Dio nel creare l'universo tenne presenti i cinque poliedri regolari. Egli fissa, in accordo con le dimensioni di tali poliedri, il numero dei cieli, le loro proporzioni e le relazioni tra i loro movimenti:

"...La sfera della Terra è la misura di tutte le altre orbite. Le si circoscrive un dodecaedro. La sfera che lo circonda sarà quella di Marte. Si circoscrive un tetraedro attorno a Marte. La sfera che lo circonda sarà quella di Giove. Si circoscrive un cubo a Giove. La sfera che lo circonda sarà quella di Saturno. Ora si inscriva un icosaedro nell'orbita della Terra. La sfera inscritta sarà quella di Venere. Si inscriva un ottaedro dentro Venere. La sfera inscritta sarà quella di Mercurio. Ecco la base del numero dei pianeti."



Nel libro Keplero illustra le presunte relazioni tra poliedri platonici e pianeti, attribuendole ad ipotetiche affinità astrologiche e metafisiche. Così la posizione della Terra sarebbe stata scelta per fungere da spartiacque tra solidi con un equilibrio stabile (cubo, tetraedro, dodecaedro) e quelli tendenzialmente fluttuanti (ottaedro e icosaedro). Le distanze dei pianeti ricavabili dal modello corrispondevano abbastanza bene ai dati disponibili per alcuni di essi, mentre per altri la

corrispondenza era meno soddisfacente (benché di solito l'errore non superasse il 10%). Keplero era però così convinto della validità del suo modello che attribuì queste discrepanze alla scarsa precisione delle misurazioni delle orbite. Si dovette attendere la scoperta di altri 2 pianeti, Urano nel 1781 e Nettuno (1846) per abbandonare totalmente l'idea di Keplero; il modello comunque conteneva gli ingredienti essenziali del 'metodo scientifico' che ha portato l'evoluzione della scienza: da una parte era basato sul patrimonio dei dati astronomici, dall'altra era falsificabile per mezzo di ulteriori osservazioni.

Cartesio e Eulero:

Verso la metà del secolo scorso è stata ritrovata una copia del trattato "*De solidorum elementis*" di **Cartesio** (1596-1650) in cui si formulano diverse considerazioni che permettono di esprimere una relazione tra vertici, spigoli e facce, ma egli non si accorse dell'importante risultato che avrebbe potuto raggiungere mettendo in relazione alcuni asserti che aveva dimostrato.

Solo un secolo dopo, **Eulero** (1707-1783), seguendo un'altra via, scopre e dimostra la relazione che porta il suo nome: $V + F = S + 2$. L'intenzione di Eulero è di trovare una classificazione soddisfacente per le figure dello spazio in analogia con quelle del piano, ma constatato che un poliedro non può essere classificato solo in base al numero di facce, ricorre anche a spigoli e vertici. Scopre così la relazione e ne fornisce un'originale dimostrazione.

Nella nostra epoca:

Il fascino dei poliedri, viene ripresa più volte nella storia dell'arte.

Si pensi, in ambito surrealista, a **Salvador Dalí** (1904-1989) e ad alcune sue opere come "*Corpus Ipercubus*" (in cui la croce è sostituita dallo sviluppo nello spazio tridimensionale di un ipercubo), e "*Ultima Cena*" (in cui la scena è ambientata all'interno di un dodecaedro).

Va citato ovviamente anche **Maurits Cornelis Escher** (1898-1972) di cui è noto il grande interesse per le strutture matematiche. Nell'opera "*Cascata*", ad esempio, troviamo raffigurati due poliedri che si ottengono intrecciando poliedri platonici ruotati attorno al centro.



Un artista recentemente scomparso, **Lucio Saffaro** ha studiato minuziosamente i solidi platonici; alcuni dei suoi studi vertono sui poliedri composti, elicoidali, poliedri costruiti con i poligoni stellati mutuamente intersecantesi, ..., e pone quasi ossessivamente i poliedri al centro delle sue opere artistiche e pittoriche (quello in figura è il suo "*Monumento a Keplero*")