

I ESONERO (Simulazione)

Corso di Matematica Discreta, a.a. 2006/2007

1. Si considerino in \mathbf{Z} le relazioni:

$$a\rho b \iff a + 5b \in 3\mathbf{Z}$$

$$a\sigma b \iff a + 4b \in 3\mathbf{Z}$$

$$a\tau b \iff a = b \text{ oppure } 4a \leq b$$

a. Dire se ρ è una relazione di equivalenza e, in caso affermativo, determinare la classe di 0 e la classe di -2 .

b. Verificare che σ non è né una relazione di equivalenza né una relazione d'ordine.

c. Dire se τ è un ordine in \mathbf{Z} e, in caso affermativo, se è un ordine totale.

2. Sia $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$ l'applicazione così definita $f(n) = n^2 - 4$ se $n \geq 0$ e $f(n) = \frac{3}{5}n$ se $n < 0$.

a. Provare o confutare le affermazioni: f è iniettiva. f è suriettiva.

b. Calcolare $Im f$, $f^{-1}(6)$ e $f^{-1}(1)$.

c. Provare per induzione che $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 - 23n}{6}$.

3. Indichiamo con $\mathcal{P}^*(X)$ l'insieme delle parti non vuote di X (ossia l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi non vuoti di X). Siano A e B insiemi disgiunti aventi rispettivamente 2 e 3 elementi.

a. Quanti elementi ha $\mathcal{P}^*(A \cup B)$?

b. Quanti elementi ha il prodotto cartesiano $\mathcal{P}^*(A) \times \mathcal{P}^*(B)$?

c. Dire se l'applicazione $f : \mathcal{P}^*(A) \times \mathcal{P}^*(B) \rightarrow \mathcal{P}^*(A \cup B)$ definita da $f((H, K)) = (H \cup K)$ è biunivoca e in caso affermativo determinare l'inversa.

4. Si consideri l'insieme X delle parole di 5 lettere che si possono scrivere usando le lettere dell'alfabeto italiano (non importa se di senso compiuto o meno).

a. Quante sono le parole di X ?

b. Quante sono le parole di X che contengono almeno una lettera ripetuta?

c. Quante sono le parole di X che contengono esattamente le stesse lettere della parola BARBA?

Domande teoriche:

1) Dare la definizione di funzione iniettiva e provare che la composizione di due funzioni iniettive è iniettiva.

2) Elencare alcune proprietà dei coefficienti binomiali e verificarne una a scelta.