UNIVERSITA' DI TORINO FACOLTA' DI SCIENZE M.F.N.

Corso di Laurea in MATEMATICA

Prova scritta di **ALGEBRA 1** del 14 gennaio 2008

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali positivi. Provare che la relazione seguente é una relazione di equivalenza e determinarne l'insieme quoziente:

$$x\sigma y \iff \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_4$ la corrispondenza cosí definita: $f([a]_{16}) = [a]_4$, $\forall\ [a]_{16} \in \mathbb{Z}_{16}$.

i) Provare che f é ben definita;
ii) Provare che f é un omomorfismo di anelli;
iii) Dire f é iniettivo e suriettivo;
iv) Studiare il quoziente $\mathbb{Z}_{16/\ker f}$.

Esercizio 3. Risolvere il sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3x \equiv 8 \mod 13 \\ x \equiv 2 \mod 15 \end{cases}$$

Esercizio 4. In $\mathbb{Z}_5[x]$, sia $p(x) = x^2 + 1$.

i) Stabilire se $p(x)$ é irriducibile;
ii) Costruire l'anello quoziente $A = \mathbb{Z}_5[x]_{/(p(x))}$, precisandone il numero di elementi;
iii) Dire se A possiede divisori dello zero e, in caso affermativo, trovarne due.