

Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane
eano,
pp. 157 - 160



Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes.

Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersaechische Staats- und Universitaetsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane.

Par

G. PEANO à Turin.

Dans cette Note on détermine deux fonctions x et y , uniformes et continues d'une variable (réelle) t , qui, lorsque t varie dans l'intervalle $(0, 1)$, prennent toutes les couples de valeurs telles que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Si l'on appelle, suivant l'usage, *courbe continue* le lieu des points dont les coordonnées sont des fonctions continues d'une variable, on a ainsi un arc de courbe qui passe par tous les points d'un carré. Donc, étant donné un arc de courbe continue, sans faire d'autres hypothèses, il n'est pas toujours possible de le renfermer dans une aire arbitrairement petite.

Adoptons pour base de numération le nombre 3; appelons *chiffre* chacun des nombres 0, 1, 2; et considérons une suite illimitée de chiffres a_1, a_2, a_3, \dots que nous écrirons

$$T = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

(Pour ce moment, T est seulement une suite de chiffres).

Si a est un chiffre, désignons par ka le chiffre $2 - a$, *complementaire* de a ; c'est-à-dire, posons

$$k0 = 2, \quad k1 = 1, \quad k2 = 0.$$

Si $b = ka$, on déduit $a = kb$; on a aussi $ka \equiv a \pmod{2}$.

Désignons par $k^n a$ le résultat de l'opération k répétée n fois sur a . Si n est pair, on a $k^n a = a$; si n est impair, $k^n a = ka$. Si $m \equiv n \pmod{2}$, on a $k^m a = k^n a$.

Faisons correspondre à la suite T les deux suites

$$X = 0, b_1 b_2 b_3 \dots, \quad Y = 0, c_1 c_2 c_3 \dots,$$

où les chiffres b et c sont donnés par les relations

$$b_1 = a_1, \quad c_1 = k^{a_1} a_2, \quad b_2 = k^{a_2} a_3, \quad c_2 = k^{a_1 + a_2} a_4, \quad b_3 = k^{a_2 + a_3} a_5, \dots$$

$$b_n = k^{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad c_n = k^{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1}} a_{2n}.$$

Donc b_n , $n^{\text{ième}}$ chiffre de X , est égal à a_{2n-1} , $n^{\text{ième}}$ chiffre de rang impair dans T , ou à son complémentaire, selon que la somme $a_2 + \dots + a_{2n-2}$ des chiffres de rang pair, qui le précèdent, est paire ou impaire. Analoguement pour Y . On peut aussi écrire ces relations sous la forme:

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = k^{b_1} c_1, \quad a_3 = k^{c_1} b_2, \quad a_4 = k^{b_1 + b_2} c_2, \dots,$$

$$a_{2n-1} = k^{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}} b_n, \quad a_{2n} = k^{b_1 + b_2 + \dots + b_n} c_n.$$

Si l'on donne la suite T , alors X et Y résultent déterminées, et si l'on donne X et Y , la T est déterminée.

Appelons *valeur* de la suite T la quantité (analogue à un nombre décimal ayant même notation)

$$t = \text{val. } T = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$$

A chaque suite T correspond un nombre t , et l'on a $0 \leq t \leq 1$. Réciproquement les nombres t , dans l'intervalle $(0, 1)$ se divisent en deux classes:

α) Les nombres, différents de 0 et de 1, qui multipliés par une puissance de 3 donnent un entier; ils sont représentés par deux suites, l'une

$$T = 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n 2 2 2 \dots$$

où a_n est égal à 0 ou à 1; l'autre

$$T' = 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a'_n 0 0 0 \dots$$

où $a'_n = a_n + 1$.

β) Les autres nombres; ils sont représentés par une seule suite T .

Or la correspondance établie entre T et (X, Y) est telle que si T et T' sont deux suites de forme différente, mais $\text{val. } T = \text{val. } T'$, et si X, Y sont les suites correspondantes à T , et X', Y' celles correspondantes à T' , on a

$$\text{val. } X = \text{val. } X', \quad \text{val. } Y = \text{val. } Y'.$$

En effet considérons la suite

$$T = 0, a_1 a_2 \dots a_{2n-3} a_{2n-2} a_{2n-1} a_{2n} 2 2 2 \dots$$

où a_{2n-1} et a_{2n} ne sont pas toutes deux égales à 2. Cette suite peut représenter tout nombre de la classe α . Soit

$$X = 0, b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n b_{n+1} \dots$$

on a:

$$b_n = k^{a_1 + \dots + a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = k^{a_1 + \dots + a_{2n-2} + a_{2n}} 2.$$

Soit T' l'autre suite dont la valeur coïncide avec $\text{val. } T$,

$$T' = 0, a_1 a_2 \dots a_{2n-3} a_{2n-2} a'_{2n-1} a'_{2n} 0 0 0 \dots$$

et

$$X' = 0, b_1 \dots b_{n-1} b'_n b'_{n+1} \dots$$

Les premiers $2n - 2$ chiffres de T' coïncident avec ceux de T ; donc les premiers $n - 1$ chiffres de X' coïncident aussi avec ceux de X ; les autres sont déterminés par les relations

$$b'_n = k^{a_1 + \dots + a_{2n-2}} a'_{2n-1}, \quad b'_{n+1} = b'_{n+2} = \dots = k^{a_1 + \dots + a_{2n-2} + a'_{2n}} 0.$$

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que $a_{2n} < 2$, ou $a_{2n} = 2$.

Si a_{2n} a la valeur 0 ou 1, on a $a'_{2n} = a_{2n} + 1$, $a'_{2n-1} = a_{2n-1}$, $b'_n = b_n$,

$a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2} + a'_{2n} = a_2 + \dots + a_{2n-2} + a_{2n} + 1$,
d'où

$$b'_{n+1} = b'_{n+2} = \dots = b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = k^{a_2 + \dots + a_{2n}} 2.$$

Dans ce cas les deux séries X et X' coïncident en forme et en valeur.

Si $a_{2n} = 2$, on a $a_{2n-1} = 0$ ou 1, $a'_{2n} = 0$, $a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, et en posant

$$s = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2}$$

on a

$$\begin{aligned} b_n &= k^s a_{2n-1}, & b_{n+1} &= \cancel{b_{n+2}} = \dots = k^s 2, & b_{n+2} \\ b'_n &= k^s a'_{2n-1}, & b'_{n+1} &= b'_{n+2} = \dots = k^s 0. \end{aligned}$$

Or, puisque $a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, les deux fractions $0, a_{2n-2} 2 2 2 \dots$ et $0, a'_{2n-1} 0 0 0 \dots$ ont la même valeur; en faisant sur les chiffres la même opération k^s on obtient les deux fractions $0, b_n b_{n+1} b_{n+2} \dots$ et $0, b'_n b'_{n+1} b'_{n+2} \dots$, qui ont aussi, comme l'on voit facilement, la même valeur; donc les fractions X et X' , bien que de forme différente, ont la même valeur.

Analoguement on prouve que $\text{val. } Y = \text{val. } Y'$.

Donc si l'on pose $x = \text{val. } X$, et $y = \text{val. } Y$, on déduit que x et y sont deux fonctions uniformes de la variable t dans l'intervalle $(0, 1)$. Elles sont continues; en effet si t tend à t_0 , les $2n$ premiers chiffres du développement de t finiront par coïncider avec ceux du développement de t_0 , si t_0 est un β , ou avec ceux de l'un des deux développements de t_0 , si t_0 est un α ; et alors les n premiers chiffres de x et y correspondantes à t coïncideront avec ceux des x, y correspondantes à t_0 .

Enfin à tout couple (x, y) tel que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ correspond au moins un couple de suites (X, Y) , qui en expriment la valeur; à (X, Y) correspond une T , et à celle-ci t ; donc on peut toujours déterminer t de manière que les deux fonctions x et y prennent des valeurs arbitrairement données dans l'intervalle $(0, 1)$.

On arrive aux mêmes conséquences si l'on prend pour base de numération un nombre impaire quelconque, au lieu de 3. On peut prendre aussi pour base un nombre pair, mais alors il faut établir entre T et (X, Y) une correspondance moins simple.

On peut former un arc de courbe continue qui remplit entièrement un cube. Faisons correspondre à la fraction (en base 3)

$$T = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

les fractions

$$X = 0, b_1 b_2 \dots, \quad Y = 0, c_1 c_2 \dots, \quad Z = 0, d_1 d_2 \dots$$

où

$$b_1 = a_1, \quad c_1 = k^{b_1} a_2, \quad d_1 = k^{b_1 + c_1} a_3, \quad b_2 = k^{c_1 + d_1} a_4, \dots$$

$$b_n = k^{c_1 + \dots + c_{n-1} + d_1 + \dots + d_{n-1}} a_{3n-2},$$

$$c_n = k^{d_1 + \dots + d_{n-1} + b_1 + \dots + b_n} a_{3n-1},$$

$$d_n = k^{b_1 + \dots + b_n + c_1 + \dots + c_n} a_{3n}.$$

On prouve que $x = \text{val. } X$, $y = \text{val. } Y$, $z = \text{val. } Z$ sont des fonctions uniformes et continues de la variable $t = \text{val. } T$; et si t varie entre 0 et 1, x, y, z prennent tous les ternes de valeurs qui satisfont aux conditions $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

M. Cantor, (Journal de Crelle, t. 84, p. 242) a démontré qu'on peut établir une correspondance univoque et réciproque (*unter gegenseitiger Eindeutigkeit*) entre les points d'une ligne et ceux d'une surface. Mais M. Netto (Journal de Crelle, t. 86, p. 263), et d'autres ont démontré qu'une telle correspondance est nécessairement discontinue. (Voir aussi G. Loria, *La definizione dello spazio ad n dimensioni...* secondo le ricerche di G. Cantor, Giornale di Matematiche, 1877). Dans ma Note on démontre qu'on peut établir d'un côté l'uniformité et la continuité, c'est-à-dire, aux points d'une ligne on peut faire correspondre les points d'une surface, de façon que l'image de la ligne soit l'entière surface, et que le point sur la surface soit fonction continue du point de la ligne. Mais cette correspondance n'est point univoquement réciproque, car aux points (x, y) du carré, si x et y sont des β , correspond bien une seule valeur de t , mais si x , ou y , ou toutes les deux sont des α , les valeurs correspondantes de t sont en nombre de 2 ou de 4.

On a démontré qu'on peut enfermer un arc de courbe plane continue dans une aire arbitrairement petite:

1) Si l'une des fonctions, p. ex. la x coïncide avec la variable indépendante t ; on a alors le théorème sur l'intégrabilité des fonctions continues.

2) Si les deux fonctions x et y sont à variation limitée (Jordan, Cours d'Analyse, III, p. 599). Mais, comme démontre l'exemple précédent, cela n'est pas vrai si l'on suppose seulement la continuité des fonctions x et y .

Ces x et y , fonctions continues de la variable t , manquent toujours de dérivée.

Turin, Janvier 1890.