Prova Scritta

Corso di Algebra 2

19 Gennaio 2009

1. Sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine 66.

1. Sia H il più piccolo sottogruppo di G contenente g^{18} e g^{45}. Determinare l'ordine di H e trovarne esplicitamente un generatore.
2. Trovare tutte le soluzioni in G dell'equazione $x^{30} = g^{12}$.
3. Determinare il numero degli omomorfismi $G \to \mathbb{Z}_{21}$.

2. Nel gruppo $\mathfrak{S}_6$ si considerino le permutazioni

$$\pi = (1\ 6\ 3\ 2\ 4)(1\ 6\ 4\ 5\ 2), \qquad \sigma = (1\ 6\ 5\ 4)(4\ 6)(2\ 5\ 3)$$

1. Dire se σ e π sono coniugate ed in caso affermativo scrivere un elemento esplicito $g \in \mathfrak{S}_7$ tale che $g\pi g^{-1} = \sigma$.
2. Calcolare il numero degli elementi di $\mathfrak{S}_6$ che sono coniugati con π e calcolare il numero degli elementi di $\mathfrak{S}_6$ che commutano con σ.
3. Calcolare il numero degli omomorfismi iniettivi $\mathbb{Z}_4 \to \mathfrak{S}_6$.

3. Sia p un numero primo. Nel gruppo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ delle matrici 2×2 invertibili a coefficienti in $\mathbb{Z}_p$ si consideri il sottoinsieme $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & x \\ 0 & b \end{smallmatrix} \right) \right\}$.

1. Verificare che G è un sottogruppo e determinare $|G|$.
2. Si spieghi perché $S = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right\}$ è un p-Sylow di G.
3. Si determini il numero dei p-Sylow in G.

4. Sia L un gruppo abeliano libero di rango 3 con generatori e_1, e_2 ed e_3. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ poniamo

$$f_1 = -5e_1 + e_2 - 2e_3, \quad f_2 = 2e_1 + ke_2 + 2e_3, \quad f_3 = ke_1 - e_2 + e_3$$

e denotiamo M il sottogruppo di L generato da f_1, f_2 e f_3.

1. Dimostrare che M ha rango 3 per ogni valore di k.
2. Determinare i valori di k per cui $L = M$.
3. Posto $k = -1$, mostrare che $|L/M| = 3$.

Prova Scritta

Corso di Algebra 2

9 Febbraio 2009

1. Sia G l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definiamo in G l'operazione

$$(a, b, c) \star (x, y, z) = (a + x, b + y, ay + c + z).$$

1. Verificare che $(G, \star)$ è un gruppo.
2. Si considerino i sottoinsiemi $H_1 = \{(0, b, c)\}$, $H_2 = \{(a, 0, c)\}$ e $H_3 = \{(a, b, 0)\}$ di G. Dire quali sono dei sottogruppi e quali no.
3. Calcolare il centro $Z(G)$ e trovare un sottogruppo normale non banale in G.

2. Sia $G =< g >$ un gruppo ciclico di ordine 30.

1. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si consideri l'omomorfismo $\phi_k : G \to G$ tale che $\phi_k(g) = g^k$. Quanti sono i ϕ_k distinti? Quanti di questi sono automorfismi?
2. Dire quanti sono gli omomorfismi $G \to \mathbb{Z}_{20}$. Ce ne sono di suriettivi?
3. Quanti sono i sottogruppi del gruppo prodotto $G \times G$?

3. Sia $\mathcal{Q}$ un quadrato di vertici $\{A, B, C, D\}$ e supponiamo di dover colorare ciascun lato di blu, giallo, rosso o verde.

1. Calcolare il numero totale delle colorazioni supponendo due colorazioni equivalenti se ottenute una dall'altra mediante una isometria.
2. Come nel punto precedente, ma supponendo due colorazioni equivalenti se ottenute l'una dall'altra mediante una rotazione.
3. Come nel punto precedente ma imponendo in più che due lati con un vertice comune non possano essere colorati con lo stesso colore.

4. Determinare il numero dei p-Sylow del gruppo alterno A_5 per ogni primo p che ne divide l'ordine.

Prova Scritta

Corso di Algebra 2

22 Giugno 2009

1. Sia G l'insieme $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$. Definiamo in G l'operazione

$$(a, b, c) \star (x, y, z) = (ax, by, az + c).$$

1. Verificare che $(G, \star)$ è un gruppo e dire se è abeliano oppure no.
2. Si considerino i sottoinsiemi $H_1 = \{(x, y, 0)\}$, $H_2 = \{(x, y, 1)\}$ e $H_3 = \{(1, y, z)\}$ di G. Dire quali sono dei sottogruppi e quali no.
3. Calcolare il centro $Z(G)$ e trovare un sottogruppo normale non banale in G.

2. Sia $G =< g >$ un gruppo ciclico di ordine 36.

1. Determinare il numero dei sottogruppi ed il numero dei generatori di G.
2. Trovare esplicitamente automorfismi ϕ e ψ di G di ordine rispettivamente 2 e 4. Esistono automorfismi di G di ordine 5?
3. Trovare tutte le soluzioni in G dell'equazione $x^{10} = g^8$.

3. Sei amici giocano a poker. Quanti modi hanno di sedersi al tavolo se:

1. pensiamo equivalenti due tavoli quando nella distribuzione delle carte ognuno è preceduto dallo stesso giocatore;
2. pensiamo equivalenti due tavoli quando ognuno è seduto fra gli stessi due giocatori.

4. Sia $L = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3$ un gruppo libero di rango 3.

1. Sia $2L$ il sottoinsieme degli elementi $ae_1 + be_2 + ce_3 \in L$ tali che a, b e c sono interi pari. Verificare che $2L$ è un sottogruppo e calcolare il numero degli elementi del gruppo quoziente $L/2L$.
2. Si consideri l'omomorfismo $\phi : L \to L$ definito da

   $$\phi(e_1) = (5 + k)e_1 + 5e_2, \quad \phi(e_2) = 5e_1 + (2 + 3k)e_2 + (k - 1)e_3, \quad \phi(e_3) = (1 - k)e_1 + e_3.$$

   Determinare (se esistono) i valori $k \in \mathbb{Z}$ per cui ϕ è un isomorfismo e quelli per cui ϕ non è suriettiva.

Prova Scritta

Corso di Algebra 2

8 Luglio 2009

1. Siano $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine 30 e $H = \langle h \rangle$ un gruppo ciclico di ordine 10.

1. Dire, giustificando la risposta, se $G \times H$ è ciclico.
2. Calcolare il numero degli omomorfismi suriettivi $G \to H$.

2. Nel gruppo $\mathfrak{S}_7$ si considerino le permutazioni

$$\pi = (1\ 2\ 5\ 6\ 4)(2\ 3\ 6\ 7\ 5), \qquad \sigma = (1\ 7)(3\ 4\ 5)(1\ 2\ 7)(5\ 6)$$

1. Dimostrare che σ e π sono coniugate.
2. Calcolare il numero degli elementi di $\mathfrak{S}_7$ che sono coniugati con π.
3. Calcolare il numero degli elementi di $\mathfrak{S}_7$ che commutano con σ.

3. Sia $L = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ un gruppo abeliano libero di rango 2 e sia $\phi : L \to \mathbb{Z}$ un omomorfismo.

1. Dimostrare che ϕ è suriettivo se e soltanto se $\mathrm{MCD}(\phi(e_1), \phi(e_2)) = 1$.
2. Supponendo ϕ suriettivo, sia $e \in L$ tale che $\phi(e) = 1$. Allora si dimostri che $L = \langle e \rangle \times \ker(\phi)$.

4. Un gruppo abeliano G si dice *divisibile* se vale la seguente proprietà: per ogni $g \in G$ e per ogni intero $n \neq 0$ esiste $h \in G$ tale che $g = nh$.

1. Dire, giustificando la risposta, quali dei seguenti gruppi sono divisibili: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\times$.
2. Dimostrare che se G è divisibile, allora per ogni gruppo abeliano H il gruppo $\hom(G, H)$ degli omomorfismi $G \to H$ è privo di torsione (si ricorda che l'operazione che rende $\hom(G, H)$ un gruppo è $(\phi + \psi)(g) = \phi(g) + \psi(g)$).

Prova Scritta

Corso di Algebra 2

7 Settembre 2009

1. Nell'insieme $G = \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid (a,b) \neq (0,0)\}$ si consideri l'operazione $(r,s) * (u,v) = (ru + 2sv, rv + su)$.

1. Verificare che $(G, *)$ è un gruppo.
2. Trovare un isomorfismo esplicito tra G ed il gruppo moltiplicativo del campo
$$K = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

2. Sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine 90.

1. Calcolare il numero degli omomorfismi iniettivi $\mathbb{Z}_9 \to G$.
2. Calcolare il numero degli omomorfismi $\mathbb{Z} \to G$ che non sono suriettivi.
3. Risolvere in G l'equazione $x^{14} = g^{22}$ (dare tutte le soluzioni).

3. Sia $T = \{a, b, c, d\}$ e consideriamo l'azione di $\mathfrak{S}_3$ su $X = T^3 = T \times T \times T$ ottenuta permutando le componenti di una terna:

$$\pi \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\pi^{-1}(1)}, x_{\pi^{-1}(2)}, x_{\pi^{-1}(3)})$$

1. Verificare che si ha veramente un'azione di $\mathfrak{S}_3$ su X e determinare esplicitamente l'orbita e lo stabilizzatore dell'elemento (b, b, d).
2. Calcolare il numero delle orbite.

4. Dato un gruppo G, poniamo

$$\widehat{G} = \hom(G, \mathbb{C}^\times) = \left\{ \chi : G \to \mathbb{C}^\times \mid \chi \text{ è un omomorfismo} \right\}.$$

1. Verificare che $\widehat{G}$ è un gruppo rispetto all'operazione $(\chi \cdot \xi)(g) = \chi(g)\xi(g)$ per ogni $g \in G$ dove χ e ξ sono elementi arbitrari di $\widehat{G}$. È vero che $\widehat{G}$ è sempre abeliano?
2. Dimostrare che se $G = H_1 \times H_2$ allora $\widehat{G} \simeq \widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2$.
3. Supponiamo G ciclico di ordine finito n. Osservato che allora per ogni $\chi \in \widehat{G}$ si deve avere $\chi(G) < \mu_n$, il gruppo delle radici n-esime di 1 (spiegare perché), se ne deduca che anche $\widehat{G}$ è ciclico finito di ordine n.