

Campi vettoriali su varietà.

1

$$M \subseteq \mathbb{R}^k$$

Un campo vettoriale tangente a M è una applicazione liscia

$$v: M \rightarrow \mathbb{R}^k \quad \text{tale che}$$

$$v(x) \in T_x M \quad \forall x \in M$$

esempio $M = S^2$

$$v: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad / \quad v(x) \cdot x = 0$$

È utile descrivere i campi vettoriali anche come operatori di derivazione sulle funzioni.

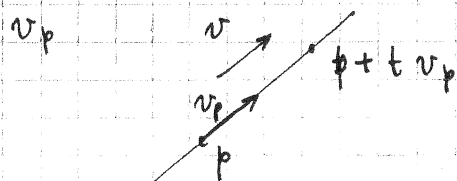
A tale scopo consideriamo prima i vettori tangenti sotto un altro punto di vista: derivate direzionali

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia v_p un vettore di $\mathbb{R}^n$ pensato come un vettore tangente in $p \in \mathbb{R}^n$.

Poniamo

$$v_p f := \frac{d}{dt} (f(p + t v_p)) \Big|_{t=0}$$

~~Interpretazione~~ $v_p f$ è detta la derivata di f nella direzione di



In effetti calcoliamo la derivata della restrizione di f alla retta

$$t \mapsto p + t v_p.$$

Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ con M varietà di dimensione n

e $p \in M$ $v_p \in T_p M$ definiamo $v_p f$ considerando

una rappresentazione di f in carte locali. Si può vedere

che la definizione non dipende dalla scelta della parametrizzazione.

$$\leadsto \text{base di } T_p M = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

nella carta locale con coord. (x^i)

Posso allora vedere un vettore tangente in p a M come un'applicazione

$$v_p : \mathcal{F}_p(M) = \left\{ \begin{array}{l} \text{funzioni diff. in un intorno} \\ \text{di } p \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\sim : \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ V & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array} \quad f \sim g \Leftrightarrow f|_W = g|_W \quad \text{per } W \ni p \right)$$

$$f \longmapsto v_p(f)$$

Si noti che nelle coordinate locali x^i si ha per la regola di derivazione delle funzioni composte (cf. Gray Lemma 11.1 p. 249)

$$v_p f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} v_p^i$$

v_p^i = componenti di v_p nelle coordinate x^i in una carta locale

v_p ha le proprietà

$$(i) \text{ localit\`a } \quad f|_U = f'|_U, \quad U \ni p \Rightarrow v_p(f)|_U = v_p(f')|_U$$

Questo spiega

$$(ii) \text{ linearit\`a } \quad v_p(\lambda f + \mu g) = \lambda v_p(f) + \mu v_p(g)$$

$$(iii) \text{ regola di Leibnitz } \quad v_p(fg) = f(p) v_p(g) + g(p) v_p(f)$$

Sia: Vettori tangenti in $p \leftrightarrow$ derivazioni

Un campo vettoriale posso pensarlo allora come un'applic.

$$v : p \longmapsto v_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto v_p(f)$$

oppure come

$$v : \begin{array}{ccc} f & \longmapsto & v(f) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(M) & & \mathcal{F}(M) \end{array} \quad p \longmapsto v_p(f)$$

Allora un campo vettoriale e' un operatore

$$\mathcal{F}(M) \xrightarrow{v} \mathcal{F}(M)$$

tale che

(i) v e' $\mathbb{R}$ -lin.

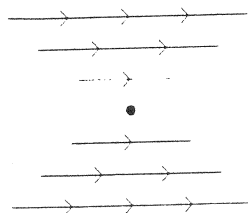
(ii) vale la reg. di Leibnitz $v(fg) = f v(g) + g v(f)$

Esempi di campi vettoriali

Campi vettoriali $V(x, y)$,

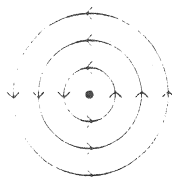
Indice in O

(1) $(x^2 + y^2, 0)$



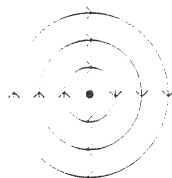
0

(2) $(-y, x)$



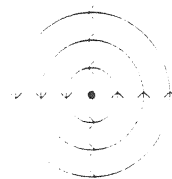
1

(3) $(y, -x)$



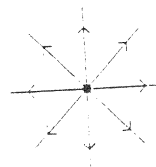
1

(4) $\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$



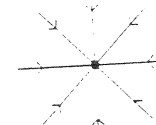
1

(5) (x, y)



1

(6) $(-x, -y)$



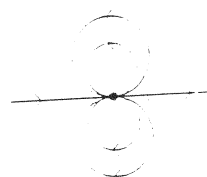
1

(7) (y, x)



-1

(8) $(x^2 - y^2, 2xy)$



2

Curve integrali di X campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ (su M)

= curve $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ /

$$\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$$

ma $\rightarrow$ ho un sistema di eq. differenziali del 1° ordine
scrivo:

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

$\rightarrow$ sistema $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$

Esempio $X = (-y, x)$ in $\mathbb{R}^2 \rightarrow$

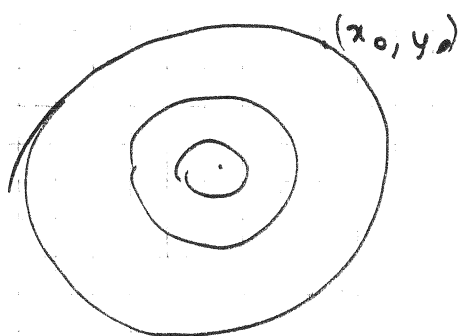
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -x$$

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$$y = C_1 \sin t - C_2 \cos t$$

Dati valori iniziali (x_0, y_0) trovo 1! sol (teor. di Cauchy)



in questo caso sono cerchi di centro 0

$$\text{raggio}^2 = x_0^2 + y_0^2$$

$$\text{es. } (0, 1) \rightsquigarrow$$

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

$\rightarrow$ Curva $\uparrow$ integrale di X per $(x'_0, \dots, x''_0)$

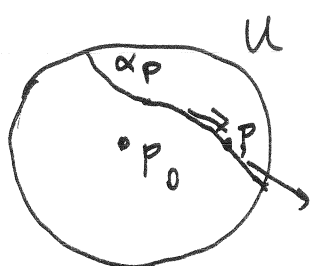
Esercizio con Maple

- disegnare campi vettoriali
- disegnare curve integrali

~~Punti singolari di campi v~~

Se ora variamo la condizione iniziale $P_0 = (x_0', \dots, x_0^n)$ della regolarità delle soluzioni delle equazioni differenziali rispetto alle condizioni iniziali troviamo

Proposizione Dato $P_0 = (x_0', \dots, x_0^n)$ esiste un intorno U di P_0 , un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ che contiene 0 tale che per ogni $P \in U$ è definita la curva α_P tale che $\dot{\alpha}_P(t) = X(\alpha_P(t)) \quad \forall t \in I$
(curva integrale per P di X)



Inoltre l'applicazione

$$I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, P) \longmapsto \alpha_P(t)$$

è C^∞ .

Definizione L'applicazione

$$(t, P) \longmapsto \alpha_P(t)$$

è detto FLUSSO DEL CAMPO X (locale)

Se cambiamo punto di vista e poniamo

$$\theta_t(P) := \alpha_P(t)$$

abbiamo (dall'unicità delle soluzioni)

Proposizione θ_t è un diffeomorfismo locale

Inoltre se entrambi i membri dell'uguaglianza sono definiti

$$(1) \quad \theta_{t'} \circ \theta_t = \theta_{t+t'}$$

$$(2) \quad \theta_0 = \text{id}$$

Una famiglia di diffeomorfismi che soddisfa (1) e (2) è detto GRUPPO (LOCALE) AD UN PARAMETRO

Se X, Y sono derivazioni XY non è una derivazione:

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X[(Yf)g + f(Yg)] = \\ &= ((XY)f)g + \underline{(Yf)(Xg)} + \underline{(Xf)(Yg)} + f((XY)g) \\ &\neq ((XY)f)g + f((XY)g) \end{aligned}$$

ci sono "di troppo le parti sottolineate.

MA: se sottraggo $(YX)(fg)$ queste spariscono, cioè

$(XY - YX)$ è una derivazione e quindi un campo vettoriale.

Definizione Il bracket di 2 campi vettoriali X e Y è il campo $[X, Y] := XY - YX$

(visto come derivazione)

In coordinate: se $X = \sum X^i \partial_i$ $(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i})$
 $Y = \sum Y^j \partial_j$

$$[X, Y] = [\sum X^i \partial_i, \sum Y^j \partial_j] = \sum_{i,j} (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j$$

come conseguenza del lemma di Schwarz sulle derivate seconde miste (esercizio)

Lemma vale l'identità

$$\begin{aligned} \sum_{X, Y, Z} [X, [Y, Z]] &= [X, [Y, Z]] + \\ &[Y, [Z, X]] + \\ &[Z, [X, Y]] = 0 \end{aligned}$$

↑
somma ciclica

IDENTITÀ DI JACOBI

Definizione Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale $\mathcal{L}$ con un prodotto $[\cdot, \cdot]: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ tale che (1) $[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathcal{L}$

(2). $\sum_{x,y,z} [[X,Y],Z] = 0$ (identità di Jacobi)

7

L'insieme dei campi vettoriali su $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$

(o più in generale su una varietà M) è un'algebra di Lie.