GEOMETRIA II

Prova scritta dell'11 luglio 2007 - Tema A

1 (punti 11)

Provare che se E ed F sono due spazi vettoriali di dimensione finita su uno stesso campo K ed $f \in \mathrm{Hom}(E, F)$ allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{im}\, f = \dim E$.

2 (punti 5)

Provare che se f è un endomorfismo autoaggiunto gli autospazi relativi a due autovalori distinti sono ortogonali.

3 (punti 6+4)

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard e siano $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $B' = \{\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\}$ una ulteriore base. Detto f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da: $f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = (x_1 + 2x_3)\mathbf{e}_1 + (x_2 + x_3)\mathbf{e}_2 + (2x_1 + x_2 + 5x_3)\mathbf{e}_3 \ \forall\ x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \in \mathbf{R}^3$

a) Determinare la matrice A che rappresenta l'endomorfismo f rispetto alla base canonica e la matrice A' che rappresenta l'endomorfismo f rispetto alla base B';

b) osservato che la matrice A è simmetrica, scrivere la forma quadratica Φ la cui matrice rispetto alla base canonica è A, ridurla a forma canonica con il metodo degli autovalori e determinare una base ortonormale di autovettori.

4 (punti 1+2+4)

Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ sono dati i vettori $\mathbf{u}(1, -1, 2)$, e $\mathbf{v}(0, 1, 2)$.

a) Provare che sono linearmente indipendenti;

b) ortogonalizzarli;

c) utilizzando i risultati precedenti trovare l'area del parallelogramma da essi individuato.

Soluzioni

3

a) La matrice A si costruisce utilizzando le equazioni dell'endomorfismo: $A = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{Vmatrix}$.

La matrice P di passaggio dalla base B alla base B' ha come colonne le componenti dei vettori di B' espressi nella base B: $P = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$.

La matrice A' di f rispetto alla base B' è $\mathbf{A' = P^{-1}\,A\,P}$.

Occorre calcolare P^{-1}. Risulta $\det P = -(2 - 1) = -1$.

$${}^tP = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{quindi} \quad P^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{Vmatrix}.$$

$$A' = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{Vmatrix}$$

oppure moltiplicando P^{-1} per il prodotto A P:

$$A' = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 12 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{Vmatrix}.$$

b) La forma quadratica associata alla matrice simmetrica A è:

$$\mathbf{\Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.}$$

Per determinare una forma canonica della forma quadratica Φ si determinano gli autovalori della matrice associata A mediante l'equazione caratteristica:

$$\det \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 5-\lambda \end{Vmatrix} = 0 \text{ da cui } (1-\lambda)^2(5-\lambda) - 4(1-\lambda) - (1-\lambda) = 0.$$

$(1-\lambda)(5-\lambda-5\lambda+\lambda^2-5) = 0$ ossia $\lambda(1-\lambda)(\lambda-6) = 0$ che ha radici $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 6$.
Dal segno degli autovalori segue che Φ è degenere e semidefinita positiva.
Una forma canonica di Φ è $\mathbf{\Phi(X) = X_2^2 + 6X_3^2}$.
Per determinare una base ortonormale rispetto alla quale Φ si scrive in forma canonica si parte da una base formata da autovettori relativi agli autovalori di A trovati.

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 0$ si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \text{ da cui } \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases} \text{ che ha le soluzioni } \begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = -k \end{cases} \text{ per ogni k reale.}$$

Quindi $E_{\lambda=0} = \{(2k, k, -k) / k \in \mathbf{R}\}$ ed una base di $E_{\lambda=0}$ è formata dal vettore $\mathbf{a}(2, 1, -1)$.

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$ si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \text{ da cui } \begin{cases} 2z = 0 \\ z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases} \text{ che ha soluzioni: } \begin{cases} x = h \\ y = -2h \\ z = 0 \end{cases} \text{ per ogni } h \in \mathbf{R}.$$

Quindi $E_{\lambda=1} = \{(h, -2h, 0) / h \in \mathbf{R}\}$ ed una base di $E_{\lambda=1}$ è formata dal vettore $\mathbf{b}(1, -2, 0)$.

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 6$ si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{Vmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \text{ da cui } \begin{cases} -5x + 2z = 0 \\ -5y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \text{ che ha soluzioni: } \begin{cases} x = 2h \\ y = h \\ z = 5h \end{cases} \text{ per ogni } h \in \mathbf{R}.$$

Quindi $E_{\lambda=6} = \{(2h, h, 5h) / h \in \mathbf{R}\}$ ed una base di $E_{\lambda=6}$ è formata dal vettore $\mathbf{c}(2, 1, 5)$.

I tre vettori **a**, **b**, **c** formano una base di autovettori e dalla teoria è noto che autovettori di autospazi diversi sono ortogonali, essendo la matrice A simmetrica.
Per ottenere la base ortonormale occorre normalizzare **a**, **b**, **c**.

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1), \quad \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \quad \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 1, 5).$$

a) Due vettori di $\mathbf{R}^3$ sono linearmente indipendenti se uno non è combinazione lineare dell'altro cioè se le loro componenti non sono in proporzione, come in questo caso.

b) Per ortogonalizzarli, con il metodo di Gram-Schmidt, a partire da **u** e **v** costruiamo un vettore **v**' che sia ortogonale ad **u**.

Il vettore $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$ è ortogonale ad **u** se $\lambda = -\dfrac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$, da cui

$$\mathbf{v}' = (0, 1, 2) - \frac{1}{2}(1, -1, 2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right).$$

c) E' noto dalla teoria che il vettore **v**' costruito al punto b) rappresenta l'altezza del parallelogramma di base **u** ed ulteriore lato **v**, quindi l'area cercata è $S = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}'\| = \sqrt{6}\,\dfrac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{21}$.