

Corso di Laurea in MATEMATICAProva scritta di **ALGEBRA 1** del 4 febbraio 2008**TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE**

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita: $f((x, y)) = x - y$.

- i) Dire se f é iniettiva e suriettiva;
- ii) Fare la decomposizione canonica di f , dando anche una rappresentazione grafica delle classi della relazione di equivalenza ad essa associata.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{Z}_5[x] \rightarrow \mathbb{Z}_5$ la corrispondenza così definita: $f(a(x)) = [a_0], \forall a(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.

- i) Provare che f é un omomorfismo di anelli;
- ii) Determinare $\ker f$, precisando se é un ideale principale, primo, massimale;
- iii) Studiare il quoziente $\mathbb{Z}_5[x]_{/\ker f}$.

Esercizio 3. Calcolare 2^{2341} modulo 37 e trovare l'inverso della classe 8 in \mathbb{Z}_{37} .

Esercizio 4. Si considerino $a(x) = 2x^3 + 1$ e $b(x) = 1 + x + 2x^2$.

- i) Studiare la riducibilità in $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}_3[x]$ di $a(x)$ e $b(x)$;
- ii) Trovare due divisori dello zero in $\mathbb{Z}_3[x]_{/(2x^3+1)}$.