8. Algebra omologica

Gli assiomi suggeriscono che se X, Y hanno gruppi di omologia isomorfi, lo sono anche quelli di coomologia. In effetti questo porta a sospettare che i gruppi di coomologia siano in qualche modo determinati da quelli di omologia.
In questo capitolo si conferma questo sospetto, mostrando come i gruppi di coomologia (con coefficienti arbitrari) sono determinati da quelli omologia (con coefficienti interi). Questo e' chiamato il teorema dei coefficienti universali per la coomologia
L'enunciato coinvolge non solo il funtor Hom ma un nuovo funtore detto "Ext" o "gruppo delle estensioni"
Analogamente, se due spazi hanno gruppi di omologia interi isomorfi, vale lo stesso per coefficienti arbitrari e in effetti i gruppi di omologia con coefficienti arbitrari sono determinati da quelli con coefficienti interi. Viene coinvolto il funtore prodotto tensoriale e un nuovo funtor detto prodotto di torsione e denotato con "Tor",
Il teorema e' detto dei coefficienti universali per l'omologia
Questi funtori e queste costruzioni ~~hanno~~ sono puramente algebriche e fanno parte di una materia detta algebra omologica
Questi funtori intervengono anche quando ~~una~~ si studia l'omologia e la coomologia di un prodotto $X \times Y$ ed e' espresso in una successione esatta ~~detta~~ successione di Künneth che coinvolge prodotto tensoriale e Tor.

§8.1 Il funtore Ext

Una successione corta esatta di gruppi abeliani

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

è detta <u>risoluzione libera di C</u> se A e B sono liberi.
Se si sceglie B come il gruppo libero abeliano generato dagli elementi di C e A come il nucleo della proiezione canonica $B \to C$ si trova la cosidetta <u>risoluzione canonica libera di C</u>.

Le risoluzioni libere hanno la seguente utile proprietà:
dato il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\psi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con le successioni orizzontali esatte e A e B liberi.
Allora esistono omomorfismi $\alpha : A \to A'$ e $\beta : B \to B'$ che rendono il diagramma commutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La dimostrazione è facile: scelta una base per B, allora β manda un elemento b della base in un elemento dell'insieme $\psi'^{-1}\gamma\psi(b)$ (che non è vuoto in quanto ψ' è suriettiva)
Con "diagram chasing" si vede che β manda $\mathrm{im}\,\varphi$ in $\mathrm{im}\,\varphi'$ e quindi (essendo φ' un monomorfismo), β induce un'omomorfismo $\alpha : A \to A'$

Arriviamo ora alla definizione di $\mathrm{Ext}(A,B)$ funtore derivato associato al funtore $\mathrm{Hom}(A,B)$.

Come Hom, Ext e' un funtore controvariante nella prima variabile e covariante nella seconda:

se $\alpha : A \to A'$, $\beta : B' \to B$ c'e' un omomorfismo

$$\mathrm{Ext}(\alpha,\beta) : \mathrm{Ext}(A',B') \to \mathrm{Ext}(A,B)$$

Teorema

Esiste una funzione che assegna ad ogni risoluzione libera $0 \to R \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} A \to 0$ di un gruppo abeliano A e ad ogni gruppo abeliano B una successione esatta

$$0 \leftarrow \mathrm{Ext}(A,B) \xleftarrow{\pi} \mathrm{Hom}(R,B) \xleftarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{Hom}(F,B) \xleftarrow{\tilde{\psi}} \mathrm{Hom}(A,B) \leftarrow 0$$

Questa funzione e' naturale, nel senso che un omomorfismo di risoluzioni libere

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & R & \to & F & \to & A & \to & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \\ 0 & \to & R' & \to & F' & \to & A' & \to & 0 \end{array}$$

e un omomorfismo $\delta : B' \to B$ di gruppi abeliani inducono un omomorfismo di successioni esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \leftarrow & \mathrm{Ext}(A,B) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(R,B) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(F,B) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(A,B) & \leftarrow 0 \\ & \uparrow \mathrm{Ext}(\gamma,\delta) & & \uparrow \mathrm{Hom}(\alpha,\delta) & & \uparrow \mathrm{Hom}(\beta,\delta) & & \uparrow \mathrm{Hom}(\gamma,\delta) & \\ 0 \leftarrow & \mathrm{Ext}(A',B') & \leftarrow & \mathrm{Hom}(R',B') & \leftarrow & \mathrm{Hom}(F',B') & \leftarrow & \mathrm{Hom}(A',B') & \leftarrow 0 \end{array}$$

Dimostriamo presto questo teorema.

Si usera' per definire il funtore Ext e calcolarlo.

Iniziamo con un lemma

Lemma

Dato un omomorfismo di risoluzioni libere

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "\varphi'"'] & F' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e un omomorfismo $\delta : B' \to B$ esiste un unico omomorfismo ε che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 & \operatorname{coker}\tilde{\varphi} \arrow[l] & \operatorname{Hom}(R,B) \arrow[l, "(*)", "\tilde{\varphi}"'] & \operatorname{Hom}(F,B) \arrow[l] & \operatorname{Hom}(A,B) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
0 & \operatorname{coker}\tilde{\varphi}' \arrow[l] \arrow[u, "\varepsilon"] & \operatorname{Hom}(R',B') \arrow[l, "\tilde{\varphi}'"'] \arrow[u, "\operatorname{Hom}(\alpha,\delta)"'] & \operatorname{Hom}(F',B') \arrow[l] \arrow[u, "\operatorname{Hom}(\beta,\delta)"'] & \operatorname{Hom}(A',B') \arrow[l] \arrow[u, "\operatorname{Hom}(\gamma,\delta)"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

inoltre ε e' indipendente dalla scelta di α e β.

dimostrazione del lemma

La funtorialità di Hom implica che i due quadrati a destra del diagramma commutano.

Pertanto $\operatorname{Hom}(\alpha,\delta)$ induce un omomorfismo ε tra i conuclei. Dobbiamo far vedere che ε non dipende da α e β.

Supponiamo che α' e β' siano altri omomorfismi che determinano un omomorfismo di risoluzioni.

Consideriamo la risoluzione libera di A come un complesso di catene $\mathcal{A}$ cui diamo indici in modo che A sia in dimensione 0 e facciamo lo stesso con A' ottenendo un complesso $\mathcal{A}'$. Per l'esattezza i gruppi di omologia di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ si annullano. Tuttavia i gruppi di coomologia non si annullano ma $\operatorname{coker}\tilde{\varphi} = H^2(\mathcal{A}, B)$ e $\operatorname{coker}\tilde{\varphi} = H^2(\mathcal{A}', B)$

(*) ricordiamo che dato $f : G \to H$, $\operatorname{coker} f = H/_{f(G)}$

La mappa ε altro non è che l'omomorfismo indotto in coomologia dalla mappa di catene $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

Ora usiamo un ulteriore lemma

<u>Sottolemma</u>

Siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ due complessi di catene, con E_p libero per $p>0$, e $H_p(\mathcal{E}) = 0$ $p>0$ e $H_p(\mathcal{F}) = 0$ $p>0$.
Allora due mappe di catene $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ che coincidono a livello 0 sono "chain homotopic".

<u>dimostrazione del sottolemma</u>

$$\begin{tikzcd}
E_p \arrow[r, dashed] \arrow[d] & F_p \arrow[d] \\
\vdots & \\
E_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & F_1 \arrow[d] \\
E_0 \arrow[ur] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & F_0
\end{tikzcd}$$

Definiamo $D : E_0 \to F_1$ come la mappa 0
$\rightarrow$ la relazione
$\partial D + D\partial = g - f$ vale a livello zero perché è $g - f = 0$ e $f = g$ a livello 0.

Supponiamo per induzione di aver definito D a livello $p-1$ $(p>0)$
Scegliamo una base di E_p e sia e un elemento della base. Allora $g(e) - f(e) - D(\partial e)$ è ben definito ed è un ciclo (esercizio), ma quindi un bordo per ipotesi
Definiamo allora $D(e)$ = elemento di F_{p+1} il cui bordo è uguale a $g(e) - f(e) - D(\partial e)$. ☒

Ora, i complessi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ soddisfano le ipotesi del sottolemma, esiste quindi una "chain homotopy" D tra le mappe di catene $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ e $\{\alpha', \beta', \gamma\}$.
Ma quindi $\mathrm{Hom}(D, \delta)$ è una "chain homotopy" tra le corrispondenti mappe di cocatene. Ne segue

che gli omomorfismi indotti in coomologia sono gli stessi; in particolare a livello 2 tra $H^2(A', B) = \operatorname{coker} \tilde{\varphi}'$ e $H^2(A, B) = \operatorname{coker} \tilde{\varphi}$. $\boxtimes$

<u>Definizione</u> L'omomorfismo ε definito nel lemma precedente e' detto <u>indotto</u> da γ e δ in quanto dipende solo da γ e δ e dalle risoluzioni.

Mostriamo ora che vale una forma di funtorialità.
Per prima cosa, mostriamo che le composizioni si comportano bene: dati $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ come nel lemma e supposto che

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & R' & \to & F' & \to & A' & \to 0 \\
& \downarrow \alpha' & & \downarrow \beta' & & \downarrow \gamma' & \\
0 \to & R'' & \to & F'' & \to & A'' & \to 0
\end{array}$$

sia un altro omomorfismo di risoluzioni libere con $\delta' : B'' \to B'$ un altro omomorfismo di gruppi abeliani. Sia ε' indotto da γ' e δ'. Il fatto che

$$\operatorname{Hom}(\gamma, \delta) \circ \operatorname{Hom}(\gamma', \delta') = \operatorname{Hom}(\gamma' \circ \gamma, \delta \circ \delta')$$

e le equazioni simili per α, α', β, β' implicano che $\varepsilon \circ \varepsilon'$ è l'omomorfismo indotto da $\gamma' \circ \gamma$ e $\delta \circ \delta'$

In secondo luogo, facciamo vedere che se i_A e i_B sono le identità l'omomorfismo indotto ε e' un isomorfismo.
Questo e' certamente vero se scelgo le stesse risoluzioni di modo che α e β possono essere scelte come identità per cui anche ε e' l'identità.
Ma questo e' vero anche nella situazione

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & R & \xrightarrow{\varphi} & F & \to & A & \to 0 \\
& \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow i_A & \\
0 \to & R' & \xrightarrow{\varphi'} & F' & \to & A & \to 0
\end{array}$$

Sia $\varepsilon : \operatorname{coker} \tilde{\varphi}' \to \operatorname{coker} \tilde{\varphi}$ la mappa indotta da (i_A, i_B) relativa a queste risoluzioni.

Scegliamo α', β' in modo che commuti

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\alpha'"] & F' \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & A \arrow[r] \arrow[d, "i_A"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\varphi"'] & F \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(ora usiamo il fatto che F' e' libero)

Sia ε' la mappa indotta tra i conuclei.

Per quanto osservato prima $\varepsilon \circ \varepsilon'$ e $\varepsilon' \circ \varepsilon$ sono l'identità cioe' ε e ε' sono isomorfismi ☒

Da questi risultati segue allora che dati A e B se si sceglie una risoluzione libera qualunque di A, il gruppo $\operatorname{coker} \tilde{\varphi}$ e' indipendente dalla scelta (a meno di isomorfismo)

Questo porta alla seguente

<u>Definizione</u>

Sia A un gruppo abeliano, $F(A)$ il gruppo libero generato dagli elementi di A e $R(A)$ il nucleo della proiezione canonica $F(A) \to A$. $0 \to R(A) \xrightarrow{\varphi} F(A) \to A \to 0$ e' allora la risoluzione canonica libera di A.

Il gruppo $\operatorname{coker} \tilde{\varphi} = \operatorname{Hom}(R(A), B) \big/ \tilde{\varphi}(\operatorname{Hom}(F(A), B))$

e' denotato con <u>$\operatorname{Ext}(A, B)$</u> e detto <u>gruppo delle estensioni di A da B</u>.

Se $\gamma : A \to A'$ e $\delta : B' \to B$ sono omomorfismi denotiamo con <u>$\operatorname{Ext}(\gamma, \delta) : \operatorname{Ext}(A', B') \to \operatorname{Ext}(A, B)$</u> l'omomorfismo indotto da γ e δ.

Le osservazioni precedenti mostrano che Ext e' un funtore delle due variabili controvariante nella prima e covariante nella seconda.

Veniamo ora al teorema di base

<u>Dimostrazione del teorema</u>

La successione esatta

$$0 \to R \xrightarrow{\varphi} F \to A$$

dà luogo alla successione esatta

$$0 \leftarrow \operatorname{coker} \tilde{\varphi} \leftarrow \operatorname{Hom}(R,B) \leftarrow \operatorname{Hom}(F,B) \leftarrow \operatorname{Hom}(A,B) \leftarrow 0$$

In virtù delle osservazioni precedenti c'è un isomorfismo tra $\operatorname{Coker} \tilde{\varphi}$ e $\operatorname{Ext}(A,B)$ indotto da i_A e i_B; usiamo questo per rimpiazzare con $\operatorname{Ext}(A,B)$ $\operatorname{coker} \tilde{\varphi}$.

Rimane da controllare la naturalezza.

Siano α, β, γ l'omomorfismo delle risoluzioni A e A' come nell'enunciato del teorema e sia $\delta : B' \to B$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R(A) \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d] & F(A) \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "i_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\alpha"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "\varphi_3"'] \arrow[d] & F' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d, "i_{A'}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R(A') \arrow[r, "\varphi_A"'] & F(A') \arrow[r] & F(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Esistono dunque omomorfismi

$$\operatorname{coker} \tilde{\varphi}_4 \xrightarrow{\varepsilon_3} \operatorname{coker} \tilde{\varphi}_3 \xrightarrow{\varepsilon_2} \operatorname{coker} \tilde{\varphi}_2 \xrightarrow{\varepsilon_1} \operatorname{coker} \tilde{\varphi}_1,$$

indotti da $(i_{A'}, i_{B'})$, (γ, δ), (i_A, i_B) rispettivamente.

Sia ε_3 sia ε_1 sono isomorfismi.

L'omomorfismo composto $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ è per funtorialità l'unico omomorfismo indotto da $(i_{A'} \circ \gamma \circ i_A, (i_B\, \delta\, i_{B'}) = (\gamma, \delta)$

e deve pertanto essere uguale a $Ext(\gamma,\delta)$

Quindi il diagramma

$$\begin{tikzcd} Ext(A,B) & \mathrm{coker}\,\tilde{\varphi}_2 \arrow[l, "\varepsilon_1"', "\cong"] & Hom(R,B) \arrow[l] \\ Ext(A',B') \arrow[u, "Ext(\gamma,\delta)"] & \mathrm{coker}\,\tilde{\varphi}_3 \arrow[l, "\cong", "\varepsilon_3"'] \arrow[u, "\varepsilon_2"] & Hom(R',B') \arrow[l] \arrow[u, "Hom(\alpha,\delta)"'] \end{tikzcd}$$

commuta il che completa la dimostrazione $\boxtimes$

Proviamo ora ulteriori proprietà di Ext

<u>Teorema</u>

(a) Ci sono isomorfismi naturali

$$Ext(\bigoplus_\alpha A_\alpha, B) \cong \prod_\alpha Ext(A_\alpha, B)$$

$$Ext(A, \prod B_\alpha) \cong \prod_\alpha Ext(A, B_\alpha)$$

(b) $Ext(A,B) = 0$ se A è libero

(c) Dato B c'è una successione esatta

$$0 \leftarrow Ext(\mathbb{Z}_m, B) \leftarrow B \xleftarrow{m} B \leftarrow Hom(\mathbb{Z}_m, B) \leftarrow 0$$

<u>dimostrazione</u>

Ricordiamo innanzitutto la differenza tra

$\prod A_\alpha$ (prodotto diretto) e $\bigoplus A_\alpha$ (somma diretta)

~~Il~~ il prodotto diretto è semplicemente il prodotto cartesiano (nel caso infinito ho infinite componenti)

La somma diretta è invece costituita dal sottogruppo di $\prod A_\alpha$ in cui solo un numero finito di componenti non sono nulle

Per la dimostrazione si usa che sia il prodotto diretto sia la somma diretta di successioni esatte sono esatte.

e il fatto che una somma diretta (ma non un prodotto diretto) di gruppi liberi abeliani è libero.

(a) Sia $0 \to R_\alpha \to F_\alpha \to A_\alpha \to 0$ una risoluzione libera di A_α

Allora $0 \to \oplus R_\alpha \to \oplus F_\alpha \to \oplus A_\alpha \to 0$ è una risoluzione libera di $\oplus A_\alpha$

Entrambe le successioni

$$0 \leftarrow \mathrm{Ext}(A_\alpha, B) \leftarrow \mathrm{Hom}(R_\alpha, B) \leftarrow \mathrm{Hom}(F_\alpha, B) \longleftarrow \mathrm{Hom}(A_\alpha, B) \leftarrow 0$$

$$0 \leftarrow \mathrm{Ext}(\oplus A_\alpha, B) \leftarrow \mathrm{Hom}(\oplus R_\alpha, B) \leftarrow \mathrm{Hom}(\oplus F_\alpha, B) \leftarrow \mathrm{Hom}(\oplus A_\alpha, B) \leftarrow 0$$

sono esatte

Basta ora fare il prodotto diretto delle successioni sopra e questo è naturalmente isomorfo alla seconda nei 3 termini a destra. Quindi c'è un isomorfismo anche tra il termine a sinistra. Questo isomorfismo $\prod \mathrm{Ext}(A_\alpha, B) \cong \mathrm{Ext}(\oplus A_\alpha, B)$ è naturale per un'argomentazione standard.

La seconda parte è simile (esercizio).

(b) Ricordiamo che se A è libero la risoluzione

$$0 \to R \to F \to A \to 0$$

si spezza e quindi la successione duale è esatta

Ma questo significa esattamente che $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$

(c) Consideriamo la risoluzione libera

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0$$

otteniamo quindi la successione esatta

$$0 \leftarrow \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, B) \leftarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) \leftarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) \leftarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, B) \leftarrow 0$$

$\square$

Questo teorema permette di calcolare $\mathrm{Ext}(A, B)$ quando A è un gruppo abeliano finitamente generato. I mattoni sono:

$$\boxed{\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, G) = 0} \qquad \boxed{\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, G) \cong G/mG}$$

Un gruppo abeliano G si dice DIVISIBILE se

per ogni $x \in G$ e ogni n intero positivo esiste un $y \in G$ tale che $x = ny$

Ad esempio $\mathbb{Q}$ e' divisibile, $\mathbb{Z}$ non lo e'.

Esercizio: se $0 \to A \to B \to C \to 0$ e' una successione esatta corta di gruppi abeliani e G e' divisibile allora

$$0 \to \mathrm{Hom}(C,G) \to \mathrm{Hom}(B,G) \to \mathrm{Hom}(A,G) \to 0$$

e' esatta.

In particolare $\mathrm{Ext}(C,G) = 0$ se G e' divisibile

Schema riassuntivo

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{Ext}(\mathbb{Z},G) = 0 & \\ \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m,G) = G/mG & \to \bullet\ \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d \\ & \qquad d = \mathrm{MCD}(m,n) \\ & \quad \bullet\ \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_m \end{array}}$$

§8.2 Il teorema dei coefficienti universali per la coomologia

Vogliamo ora mettere in relazione $H^*(X)$ e $H_*(X)$: vedremo che un altro ingrediente per tutto e' Ext.

Cominciamo da un lemma algebrico

Lemma

Sia $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{C} \to 0$

una successione corta di complessi (catene o cocatene non importa!)

e sia $\partial : H_n C \longrightarrow H_{n-1} A$ l'omomorfismo di bordo

Allora esistono delle successioni corte esatte

$$0 \to \operatorname{coker} \partial_{n+1} \to H_n B \to \ker \partial_n \to 0 \qquad (*)$$

Inoltre se la successione di complessi si spezza e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ sono complessi banali ($\partial = 0$) allora anche $(*)$ si spezza, per ogni n.

dimostrazione

Ricordiamo che per il lemma zig-zag c'e' una successione esatta lunga

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n A \xrightarrow{g_*} H_n B \xrightarrow{f_*} H_n C \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1} A \to \dots$$

ovviamente si puo' decomporre la successione lunga nelle successioni corte

$$0 \to \ker f_* \to H_n B \longrightarrow \operatorname{im} f_* \to 0$$

ma abbiamo

$$\ker f_* = \operatorname{im} g_* \cong H_n A / \ker g_* \cong H_n A / \operatorname{im} \partial_{n+1} = \operatorname{coker} \partial_{n+1}$$

$$\operatorname{im} f_* = \ker \partial_n$$

Nelle ipotesi aggiuntive abbiamo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "0"'] & B_n \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\partial_n"] \arrow[l, bend right, "k"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[l, bend right, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "g"] & B_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[l, bend left, "k"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[l, bend left, "h"] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l} fh = id_C \\ kg = id_A \end{array}$$

Dal diagram chasing abbiamo che $\partial_n c_n = k\,\partial_B\, h\, c_n$;
supponiamo $\partial_n c_n = 0$, poiché $f\partial_B = 0$ si ha
$f\,\partial_B h(c_n) = 0$ per cui $\partial_B h(c_n) \in \ker f = \operatorname{im} g$ cioè
$\partial_B h(c_n) = g(a)$ per qualche $a \in A_{n-1}$
Ma $a = k\,g(a) = k\,\partial_B h(c) = \partial_n c = 0$ e dunque
$\partial_B h(c_n) = 0$ cioè $h(c_n)$ è un ciclo di B_n
Pertanto
$$\begin{aligned} \ker \partial_n &\longrightarrow H_n B \\ c_n &\longmapsto h(c_n) \end{aligned}$$
dà uno spezzamento della successione. $\boxtimes$

Sia ora $\mathcal{A}_*$ un complesso libero e $\mathcal{Z}_* = \{Z_n\}$ e $\mathcal{B}^+_* = \{B_{n-1}\}$
i complessi banali dati rispettivamente dai cicli e dai bordi di $\mathcal{A}_*$
Abbiamo allora la successione di complessi
$$0 \to \mathcal{Z}_* \longrightarrow \mathcal{A}_* \longrightarrow \mathcal{B}^+_* \to 0$$
che si spezza (perché i gruppi sono tutti liberi).
Ne segue che
$$0 \to \operatorname{Hom}(B_{n-1}, G) \to \operatorname{Hom}(A_n, G) \to \operatorname{Hom}(Z_n, G) \to 0$$
è esatta e si spezza per ogni n.
Ma questa è allora una successione esatta corta di complessi di cocatene
$$0 \to (\mathcal{B}^+)^*_G \longrightarrow \mathcal{A}^*_G \longrightarrow \mathcal{Z}^*_G \to 0$$
che si spezza in ogni dimensione con $(\mathcal{B}^+)^*_G$ e $\mathcal{Z}^*_G$ complessi banali.
Applichiamo allora il lemma e osserviamo che $\partial_n = i_n^*$
dove $i_n : \mathcal{B}_n \hookrightarrow \mathcal{Z}_n$ (esercizio) : otteniamo le successioni esatte
$$0 \to \operatorname{coker} i_{n-1}^* \to H^n(A, G) \longrightarrow \ker i_n^* \to 0$$
che si spezzano

Usando l'esattezza di

$$0 \to B_n \overset{i_n}{\hookrightarrow} Z_n \longrightarrow H_n A \to 0$$

e il fatto che Z_n e' libero si trova la successione esatta

$$0 \to \mathrm{Hom}(H_n A, G) \to \mathrm{Hom}(Z_n, G) \xrightarrow{i_n^*} \mathrm{Hom}(B_n, G) \to \mathrm{Ext}(H_n A, G) \to 0$$

e quindi

$$\ker i_n^* = \mathrm{Hom}(H_n A, G)$$

$$\mathrm{coker}\, i_n^* = \mathrm{Ext}(H_n A, G)$$

sostituendo troviamo il

<u>Teorema dei coefficienti universali per la coomologia</u>

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1} A, G) \to H^n(A, G) \to \mathrm{Hom}(H_n A, G) \to 0$$

e' esatta e si spezza.

<u>Corollario</u>

Se G e' divisibile $\Rightarrow$ $H^n(A, G) \cong \mathrm{Hom}(H_n A, G)$

in particolare se G e' un campo di caratteristica zero $(G = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Si può provare che la successione esatta del teorema e' naturale rispetto agli omomorfismi indotti. Allora

<u>Corollario</u>

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due complessi liberi e $\varphi: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una mappa di catene. Se $\varphi_*: H_i(\mathcal{C}) \to H_i(\mathcal{D})$ e' un isomorfismo per $i = p$ e $i = p-1$ allora

$$\varphi^*: H^p(\mathcal{D}, G) \to H^p(\mathcal{C}, G)$$

e' un isomorfismo.

<u>Esercizi</u> calcolare $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z})$, $H^*(\mathrm{Klein}, \mathbb{Z})$.

§ 8.3 Prodotto tensoriale e prodotto di torsione

Sia A un anello e indichiamo con m la sua moltiplicazione

$m: A \times A \to A$

soddisfa alle proprieta' $\quad m(a+b, c) = m(a,c) + m(b,c)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m(a, b+c) = m(a,b) + m(a,c)$

Pensando a A solo come gruppo abeliano, $A \times A$ e' un gruppo abeliano ma m non e' un omomorfismo.
m e' invece un'applicazione bilineare.

Il <u>prodotto tensoriale</u> e' un gruppo che rende un'applicazione bilineare $A \times B \to C$ un' omomorfismo, cioe'

$$Bil(A \times B, C) \cong Hom(A \otimes B, C)$$

vale cioe' la seguente

<u>Proprieta' universale</u>

Dati due gruppi abeliani A e B, esiste un gruppo abeliano $A \otimes B$ e un'applicazione bilineare $\varphi: A \times B \to A \otimes B$ tale che per ogni gruppo abeliano C e ogni applicazione bilineare
$f: A \times B \to C$ esiste un unico omomorfismo
$\tilde{f}: A \otimes B \to C$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & A \otimes B \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
C &
\end{tikzcd}$$

commuta.

$A \otimes B$ e' unico a meno di isomorfismi (questa e' una conseguenza standard dell'unicita' di $\tilde{f}$; esercizio).

$A \otimes B$ puo' essere costruito nel modo seguente:
sia $F(A,B)$ il gruppo libero abeliano generato da $A \times B$ e sia $R(A,B)$ il sottogruppo generato dagli elementi della forma

$$(a+a', b) - (a,b) - (a',b)$$
$$(a, b+b') - (a,b) - (a,b')$$

$a, a' \in A$
$b, b' \in B$

Allora $A \otimes B : F(A,B)/R(A,B)$

la classe di (a,b) viene indicata con $a \otimes b$

Ogni funzione $f: A \times B \to C$ determina un unico omomorfismo $F(A,B) \to C$ e la bilinearità significa esattamente che $R(A,B)$ va a zero. Viene dunque indotto $\tilde{f}: F(A,B)/R(A,B) = A \otimes B \to C$.

<u>Osservazione</u>: attenzione che $a \otimes b$ non e' un elemento tipo di $A \otimes B$ ma un generatore tipo

Valgono le relazioni in $A \otimes B$

$$(a+a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$$
$$a \otimes (b+b') = a \otimes b + a \otimes b'$$

e' immediato vedere che $0 \otimes b = 0$

$[\ a \otimes b = (0+a) \otimes b = 0 \otimes b + a \otimes b\ ]$

Inoltre $(na) \otimes b = n(a \otimes b)$

<u>Definizione</u> Dati $f: A \to A'$ e $g: B \to B'$ omomorfismi si puo' definire

$$f \otimes g : A \otimes B \to A' \otimes B'$$

come l'unico omomorfismo per cui

$$f \otimes g (a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$$

$f \otimes g$ e' chiamato il <u>prodotto tensoriale</u> di f e g

Questo è una conseguenza immediata del fatto che la funzione $A \times B \to A' \otimes B'$ $(a,b) \longmapsto f(a) \otimes g(b)$ è bilineare (e della proprietà universale di $A \otimes B$).

Si può inoltre vedere che

$$(A, B) \longmapsto A \otimes B$$
$$(f, g) \longmapsto f \otimes g$$

definisce un funtore covariante tra le categorie delle coppie di gruppi abeliani e coppie di omomorfismi e i gruppi abeliani.

Tra poco mostriamo come calcolare i prodotti tensoriali, specie nel caso dei gruppi abeliani finitamente generati.

Per prima cosa abbiamo il seguente

<u>Teorema</u> C'è un isomorfismo $\boxed{\mathbb{Z} \otimes G \cong G}$ che manda $n \otimes g$ in ng. Tale isomorfismo è naturale rispetto a omomorfismi di G.

<u>dimostrazione</u> La mappa

$$\mathbb{Z} \times G \longrightarrow G$$
$$(n, g) \longmapsto ng$$

è bilineare e induce quindi un omomorfismo

$$\varphi : \mathbb{Z} \otimes G \longrightarrow G$$
$$n \otimes g \longmapsto ng$$

D' altra parte data una applicazione bilineare $\mathbb{Z} \times G \to C$ $\forall C$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \times G \arrow[r] \arrow[dr, "\psi"'] & G \arrow[d, dashed, "\tilde{\psi}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

esiste un unico omomorfismo $\tilde{\psi} : G \to C$ definito da $\tilde{\psi}(g) := \psi(1, g)$ che fa commutare il diagramma

Dunque per $C = \mathbb{Z} \otimes G$ troviamo un unico omomorfismo

$$\eta : G \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes G$$

che è facile verificare essere φ^{-1} (per unicità $\eta \circ \varphi = id$ e $\varphi \circ \eta = id$). $\boxtimes$

Osservazione : $Bil(\mathbb{Z} \times G, C) \longleftrightarrow Hom(G, C) \quad \forall C.$

$$f \longmapsto f(1,-)$$

$$\bar{g} \, / \, \bar{g}(n,a) = n g(a) \longleftarrow g$$

Esempi

1) $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^{mn}$

infatti: $Bil(\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^n, C) \cong Hom(\mathbb{Z}^{mn}, C)$

2) $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$:

Sia $f : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \longrightarrow C$ bilineare

$\rightarrow f([a]_6, [b]_8) = f(a[1]_6, b[1]_8) = ab\, f([1]_6, [1]_8)$

cioè f è univocamente determinata da $f([1]_6, [1]_8) =: c$

Inoltre $6c = 6f([1]_6, [1]_8) = f(6[1]_6, [1]_8) = f(0, [1]_8) = 0$

e analog. $8c = 0$

quindi $8c - 6c = 2c = 0$

Viceversa supponiamo che $c \in C$ soddisfi $2c = 0$

allora $f : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \longrightarrow C$

$$([a]_6, [b]_8) \longmapsto abc$$

è ben definita e bilineare, quindi

$$Bil(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8, C) \cong Hom(\mathbb{Z}_2, C)$$

cioè $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_2$

3) $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_7 = 0$ (esercizio)

Gli esempi 2) e 3) fanno sospettare che $\boxed{\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{MCD(m,n)}}$

Vedremo tra un attimo che questo è vero

Come nel caso del tensore Hom vediamo che effetto ha $\otimes$ sulle successioni esatte

Teorema

Se $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$

e' esatta allora per ogni G

$$A \otimes G \xrightarrow{\varphi \otimes id} B \otimes G \xrightarrow{\psi \otimes id} C \otimes G \to 0 \qquad (*)$$

e' esatta.

Se φ e' iniettiva e la prima successione si spezza allora anche $\varphi \otimes id$ e' iniettiva e la successione $(*)$ si spezza

Nota : Data la successione esatta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

moltiplicando per $\mathbb{Z}_2$ tensorialmente si ha

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

ma $\cdot 2$ e' $= 0$ su $\mathbb{Z}$ quindi $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_2$ non e' un monomorfismo

dimostrazione

Proviamo che $C \otimes G \cong \operatorname{coker}(\varphi \otimes id) \left(= B \otimes G / \operatorname{im}(\varphi \otimes id)\right)$

Sia $E := \operatorname{coker}(\varphi \otimes id)$ e definiamo un'applicazione bilineare di $C \times G \xrightarrow{\eta} E$: sia $(c, g) \in C \times G$ e si scelga $b \in B$ tale che $\psi(b) = c$. Poniamo allora

$$\eta(c, g) = [b \otimes g] \in B \otimes G / \operatorname{im}(\varphi \otimes id)$$

L'applicazione η e' ben definita : se b' e' tale che $\psi(b') = c \Rightarrow b - b' \in \ker \psi = \operatorname{im} \varphi$ e quindi

$$b \otimes g - b' \otimes g = (b - b') \otimes g \in \operatorname{Im}(\varphi \otimes id)$$

Applicando la proprieta' universale del prodotto tensoriale otteniamo che esiste $\tilde{\eta} : C \otimes G \to E$ omomorfismo per cui commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd} C \times G \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & E \\ C \otimes G \arrow[ur, "\tilde{\eta}"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{\eta}$ ammette un inverso cioe' l'omomorfismo indotto da $\psi \otimes id$:

$$\begin{tikzcd} B \otimes G \arrow[r, "g \otimes id"] \arrow[d] & C \otimes G \\ E \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$\boxtimes$

__Corollario__

C'e' un isomorfismo naturale

$$\boxed{\mathbb{Z}_m \otimes G \cong G/mG}$$

__dimostrazione__

Consideriamo la successione esatta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0$$

Tensorizzando con G si trova la successione esatta

$$\mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{m \otimes id} \mathbb{Z} \otimes G \to \mathbb{Z}_m \otimes G \to 0$$

cioe'

$$G \xrightarrow{m} G \to \mathbb{Z}_m \otimes G \to 0$$

$\boxtimes$

Abbiamo le seguenti proprieta' di $\otimes$

__Teorema__ Ci sono isomorfismi naturali

(a) $A \otimes B \cong B \otimes A$

(b) $(\oplus A_\alpha) \otimes B \cong \oplus (A_\alpha \otimes B)$ $\qquad A \otimes (\oplus B_\alpha) \cong \oplus (A \otimes B_\alpha)$

(c) $A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$

__dimostr.__ esercizio

Schema riassuntivo su $\otimes$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbb{Z} \otimes G \cong G & \\ \mathbb{Z}_m \otimes G \cong G/mG & \qquad \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{MCD(m,n)} \end{array}}$$

Esercizi

Trovare $A \otimes B$ con

$$A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$$

$$B = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{12}$$

Veniamo ora al prodotto torsionale Tor.

Come per Ext il punto di partenza era che Hom non trasforma successioni esatte corte in successioni esatte corte, ora abbiamo visto che questo succede per $\otimes$.

Teorema

C'è una funzione che assegna ad ogni risoluzione libera

$$0 \to R \to F \to A \to 0$$

di un gruppo abeliano e ad ogni gruppo abeliano G, una successione esatta

$$0 \to \operatorname{Tor}(A,G) \to R \otimes G \to F \otimes G \to A \otimes G \to 0$$

Questa funzione è naturale e determina pertanto un funtore Tor (covariante in entrambe le variabili)

Non dimostriamo il teorema per cui rimandiamo ai testi consigliati

Osserviamo che $\operatorname{Tor}(A,G) = \ker(R \otimes G \to F \otimes G)$

che è l'omologia del complesso

$$\underset{C_1''}{R \otimes G} \longrightarrow \underset{C_0''}{F \otimes G} \longrightarrow A \otimes G \to 0$$

$(H_1(C_*, G))$.

Calcoliamo ora il prodotto torsionale di alcuni gruppi comuni

Esempi

1) $\boxed{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, G)}$:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0 \quad \text{e' esatta}$$

quindi:

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, G) = \ker(\mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{\cdot n \otimes id} \mathbb{Z} \otimes G)$$
$$= \boxed{\ker(G \xrightarrow{n} G)}$$
$$= \{ g \in G \ / \ ng = 0 \}$$

In particolare

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0 \\ &\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_{MCD(m,n)} \end{aligned}}$$

2) $\boxed{\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z})}$:

tensorizzando la successione esatta con $\mathbb{Z}$

$$0 \to R \to F \to A \to 0$$

si trova la stessa successione

Quindi $\boxed{\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}) = 0}$

3) $\boxed{\mathrm{Tor}(A, G) = 0 \quad \text{se } G \text{ e' libero abeliano}}$

Questo segue dalla seguente

Proposizione Ci sono i seguenti isomorfismi naturali

(a) $\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(B, A)$

(b) $\mathrm{Tor}(\bigoplus A_\alpha, B) \cong \bigoplus \mathrm{Tor}(A_\alpha, B)$

$\mathrm{Tor}(A, \bigoplus B_\alpha) \cong \bigoplus \mathrm{Tor}(A, B_\alpha)$

In particolare $\boxed{\mathrm{Tor}(B, C) = 0 \text{ se } B \text{ o } C \text{ e' libero (privo di torsione)}}$

§ 8.4 Teorema dei coefficienti universali per l'omologia

Si può esprimere $H_p(X,G)$ in termini di $H_p(X)$ e $H_{p-1}(X)$ coinvolgendo ora il funtore Tor

Teorema dei coefficienti universali per l'omologia

Sia $\mathscr{C}$ un complesso di catene libero e G un gruppo abeliano. C'è una successione esatta

$$0 \to H_p(\mathscr{C}) \otimes G \to H_p(\mathscr{C}, G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(\mathscr{C}), G) \to 0$$

che è naturale rispetto a omomorfismi indotti da mappe di catene.

Si spezza (ma non naturalmente)

La dimostrazione può essere fatta in modo simile al caso dell'analogo teorema per la coomologia

Daremo un'altra dimostrazione come conseguenza del teorema di Künneth.

Corollario $H_n(X,G) \cong H_n(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G))$

In particolare se $H_*(X)$ è privo di torsione oppure G è privo di torsione

$$H_*(X,G) \cong H_*(X) \otimes G$$

Esempi / esercizi

(a) $H_*(S^n, G) = \begin{cases} 0 & i \neq 0, n \\ G & i = 0, n \end{cases}$

(b) Calcolare $H_*(X,G)$ per X = toro, bottiglia di Klein, piano proiettivo, superficie (orientabile e non), $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$.

§ 8.5 prodotto tensoriale di complessi di catene

Dati due gruppi graduati A_* e B_* poniamo

$$(A_* \otimes B_*)_n = \bigoplus_{i+j=n} (A_i \otimes B_j)$$

$A_* \otimes B_*$ e' un gruppo graduato detto <u>PRODOTTO TENSORIALE</u> di A_* e B_*

Se A_* e B_* sono complessi di catene con bordi ∂' e ∂'' poniamo

$$\partial : (A_* \otimes B_*)_n \longrightarrow (A_* \otimes B_*)_{n-1}$$

$$\partial (a \otimes b) = (\partial' a) \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes (\partial'' b)$$

con $|a|$ = grado di a

(Essendo $a \otimes b$ generatori di $(A_* \otimes B_*)_n$ si estende ∂ "per linearità".)

<u>Proposizione</u> $(A_* \otimes B_*, \partial)$ e' un complesso di catene

<u>dimostrazione</u>

$$\partial^2 (a \otimes b) = \partial \left((\partial' a) \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes (\partial'' b) \right) =$$

$$= (\partial'^2 a) \otimes b + (-1)^{|\partial' a|} \partial' a \otimes \partial' b + (-1)^{|a|} \partial' a \otimes \partial'' b$$

$$+ (-1)^{|a|} a \otimes (\partial''^2 b) = 0 \qquad \text{essendo} \quad |\partial' a| = |a| - 1 .$$

$\blacksquare$

In generale $H_* (A_* \otimes B_*)$ non e' isomorfo a $H_*(A) \otimes H_*(B)$

Si può' tuttavia mettere in relazioni i due gruppi e in molti casi si ha isomorfismo.

Cominciamo con il definire un omomorfismo

$$\theta : H_p(A) \otimes H_q(B) \longrightarrow H_{p+q}(A_* \otimes B_*)$$

dato da

$$[z'] \otimes [z''] \longmapsto [z' \otimes z'']$$

con z', z'' cicli.

Usando la formula per il bordo si vede che $z' \otimes z''$ e' un ciclo.

Per mostrare che θ e' ben definito calcoliamo

$$(z+\partial' d)\otimes z' = z\otimes z' + (\partial' d)\otimes z'$$
$$= z\otimes z' + \partial(d\otimes z')$$

$$z\otimes(z'+\partial'' d') = z\otimes z' + z\otimes \partial'' d'$$
$$= z\otimes z' + (-1)^{|z|}\partial(z\otimes d')$$

Risulta allora definito un omomorfismo

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p A\otimes H_q B \xrightarrow{\theta} H_n(A\otimes B)$$

<u>Teorema di Künneth</u>

Sia A_* e B_* complessi di catene (liberi). (*) Allora c'e' una successione esatta (che si spezza)

$$0\to \bigoplus_{p+q=n} H_p A\otimes H_q B \xrightarrow{\theta} H_n(A\otimes B)\to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}(H_{p-1}A, H_q B)\to 0$$

La dimostrazione e' lunga e rimandiamo ai testi consigliati.

Vediamo le conseguenze per il calcolo dell'omologia di un prodotto. Queste seguono dal seguente

<u>Teorema di Eilenberg-Zilber</u>

Siano X, Y due spazi topologici. Allora ci sono mappe di catene

$$S_*(X)\otimes_* S(Y) \underset{\nu}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} S_*(X\times Y)$$

che sono l'una l'inversa dell'altra a meno di omotopie di catene.

---

* basta A_* libero

In particolare

$$H_*(X \times Y) \cong H_*(S_* X \otimes S_* Y)$$

La dimostrazione e' complessa e basata su una tecnica standard categoriale detta dei modelli aciclici (v. testi consigliati)

Come conseguenza abbiamo il

<u>Teorema di Künneth per gli spazi topologici</u>

Siano X e Y spazi topologici. Allora c'e' una successione esatta

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p X \otimes H_q Y \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}(H_{p-1} X, H_q Y) \to 0$$

che e' naturale e si spezza (ma non naturalmente)

In particolare ho un monomorfismo

$$H_p X \otimes H_q Y \xrightarrow{\times} H_{p+q}(X \times Y)$$

detto <u>cross product per l' omologia</u>

<u>Esempi / esercizi</u>

1) $H_*(T) = H_*(S^1 \times S^1) = H_* S^1 \otimes H_* S^1$

cioe' $\quad H_1(T) = (H_1 S^1 \otimes H_0 S^1) \oplus (H_0 S^1 \otimes H_1 S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

2) Calcolare l' omologia di

$$\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^3$$

$$\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^5$$

Il teorema di Künneth per la coomologia

Possiamo ovviamente calcolare la coomologia di un prodotto via la formula di Künneth e il teorema dei coefficienti universali per l'omologia.

Ma esiste una versione diretta per la coomologia.

Per prima cosa introduciamo un prodotto cross in coomologia

Sia R un anello commutativo con unità e siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ complessi di catene. Consideriamo i complessi di cocatene $\mathrm{Hom}(\mathcal{C},R)$ e $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}',R)$ e il loro prodotto tensoriale

$$\left(\mathrm{Hom}(\mathcal{C},R)\otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{C}',R)\right)_n := \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(C_p,R)\otimes \mathrm{Hom}(C'_q,R)$$

con cobordo

$$\bar{\delta}(\varphi^p\otimes\psi^q) = \delta\varphi^p\otimes\psi^q + (-1)^p\varphi^p\otimes\delta'\psi^q$$

In pratica prima applichiamo Hom poi facciamo il prodotto tensoriale. Ovviamente si può percorrere la strada alternativa di prima tensorizzare poi applicare Hom e si ottiene il complesso di cocatene

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}', R)$$

il cui cobordo è il duale del bordo $\bar{\partial}$ di $\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'$

C'è un isomorfismo naturale tra i due complessi descritto dalla

__Definizione__ Sia $p+q=n$ e

$$\vartheta : \mathrm{Hom}(C_p,R)\otimes \mathrm{Hom}(C'_q,R) \to \mathrm{Hom}((\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}')_n, R)$$

l'omomorfismo definito da

$$\vartheta(\varphi^p\otimes\psi^q)(c_p\otimes c_q) = \varphi^p(c_p)\otimes\psi^q(c_q)$$

e

$$\vartheta(\varphi^p\otimes\psi^q)(c_r\otimes c_s) = 0 \quad \text{se } p\neq r \;\; q\neq s$$

<u>Lemma</u> θ e' una mappa di catene naturale.

<u>dimostrazione</u>

Siano $\varphi \in \mathrm{Hom}(C_p, R)$ $\psi \in \mathrm{Hom}(C'_q, R)$ $p+q=n$

e siano $r+s=n+1$

$$\theta(\bar\delta(\varphi\otimes\psi)(c_r\otimes c'_s)) = \delta\varphi(c_r)\,\psi(c'_s) + (-1)^p\varphi(c_r)\,\delta'\psi(c'_s)$$

$$\bar\delta(\theta(\varphi\otimes\psi)(c_r\otimes c'_s)) = \theta(\varphi\otimes\psi)(\bar\partial(c_r\otimes c'_s))$$

$$= \varphi(\partial c_r)\,\psi(c'_s) + (-1)^r\varphi(c_r)\,\psi(\partial' c'_s)$$

che sono uguali per $r=p$. Notiamo che per $r\neq p$ sono anche uguali in quanto $\varphi(c_r)=0$.

Lasciamo per esercizio vedere che date mappe di catene $f: \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ e $g: \mathcal{C}'\to\mathcal{D}'$ $\theta\circ(f^*\otimes g^*) = (f\otimes g)^*\,\theta$ ◪

<u>Definizione</u> Definiamo un omomorfismo

$$\Theta : H^p(\mathcal{C},R)\otimes H^q(\mathcal{C}',R) \to H^{p+q}(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}',R)$$

$$[\varphi]\otimes[\psi] \longmapsto [\theta(\varphi\otimes\psi)]$$

Notiamo che la definizione di $\bar\delta$ implica che $\theta(\varphi\otimes\psi)$ e' un cociclo. E' inoltre standard far vedere che Θ e' ben definita.

<u>Definizione</u> Il <u>cross product in coomologia</u> e' dato da

$$H^p(X,R)\otimes H^q(Y,R) \xrightarrow{\Theta} H^{p+q}(S.X\otimes S.Y,R) \xrightarrow{\gamma^*} H^{p+q}(X\times Y,R)$$

dove γ^* e' l' omomorfismo indotto dall' equivalenza di catene di Eilenberg-Zilber.

L' immagine di $\varphi^p\otimes\psi^q$ e' denotata con $\varphi^p\times\psi^q$

trovisamo allora il

Teorema di Künneth per la coomologia

Sia $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ complessi con $\mathcal{C}$ libero e finitamente generato

Allora c'è una successione esatta

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H^p(\mathcal{C}) \otimes H^q(\mathcal{C}') \xrightarrow{\otimes} H^n(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}(H^{p+1}\mathcal{C}, H^q(\mathcal{C}'))$$

la successione si spezza se anche $\mathcal{C}'$ è libero e finitamente generato.

A livello di spazi topologici abbiamo

Teorema di Künneth per la coomologia di spazi topologici

Siano X e Y spazi topologici con $H_i(X)$ finitamente generato $\forall i$

c'è una successione esatta

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(Y) \to H^n(X \times Y) \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}(H^{p+1}X, H^q Y) \to 0$$

La successione si spezza se anche $H_j(Y)$ è finitamente generato $\forall j$.

Vediamo ora come applicare il prodotto cross $\times$ in coomologia per dare una definizione alternativa di cup product.

Ricordiamo che $\times$ è la composizione di $\otimes$ e della mappa di cocatene $\mathcal{Y}^*$. Esplicitamente sulle cocatene $\times$ è come segue

$$(c^p \times c^q)(T) = c^p(\pi_1 T|_{\langle E_0, \dots, E_p \rangle}) \cdot c^q(\pi_2 T|_{\langle E_p \dots E_{p+q} \rangle})$$

Una proprietà del cross product è la seguente:

<u>Teorema</u> Sia $\lambda : X \times Y \to Y \times X$ la mappa che scambia le coordinate.

Allora

$$\lambda^*(\beta^q \times \alpha^p) = (-1)^{pq} \alpha^p \times \beta^q$$

Il seguente teorema, dovuto a Lefschetz dà la relazione tra cup product e cross product (e come vedremo chiarisce perché non c'è un prodotto in omologia)

<u>Teorema</u> Sia $\Delta : X \to \cancel{X} \times X$, $x \mapsto (x, x)$ la mappa diagonale

Allora

$$\begin{tikzcd} H^p X \otimes H^q X \arrow[r, "\times"] \arrow[rr, bend right, "\cup"'] & H^{p+q}(X \times X) \arrow[r, "\Delta^*"] & H^{p+q}(X) \end{tikzcd}$$

cioè $\alpha^p \cup \beta^q = \Delta^*(\alpha^p \times \beta^q)$

<u>dimostrazione</u> : basta fare un calcolo usando l'espressione esplicita di $\times$ a livello di cocatene e la definizione di $\cup$ $\boxtimes$

Ecco dunque perché non c'è un prodotto in omologia:
ho sempre un cross product

$$\begin{tikzcd} H_p X \otimes H_q X \arrow[r, "\times"] & H_{p+q}(X \times X) \\ & H_{p+q}(X) \arrow[u, "\Delta_*"] \end{tikzcd}$$

ma poi Δ_* va nella direzione sbagliata ! !

<u>Corollario</u> $\alpha^p \cup \beta^q = (-1)^{pq} \beta^q \cup \alpha^p$

<u>dimostrazione</u> Sia λ la mappa che scambia le coordinate e osserviamo che $\lambda \circ \Delta = \Delta$. Calcoliamo allora

$$\alpha^p \cup \beta^q = \Delta^*(\alpha^p \times \beta^q) = (\lambda \circ \Delta)^*(\alpha^p \times \beta^q) =$$

$$= \Delta^* \lambda^* (\alpha^p \times \beta^q) \underset{\substack{\text{teor. pagina} \\ \text{precedente}}}{=} \Delta^*((-1)^{pq} \beta^q \times \alpha^p) = (-1)^{pq} \beta^q \cup \alpha^p$$

$\boxtimes$