

Corso di Laurea in MATEMATICAProva scritta di **ALGEBRA 1** del 4 febbraio 2008**TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE**

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita: $f((x, y)) = x + y$.

- i) Dire se f è iniettiva e suriettiva;
- ii) Fare la decomposizione canonica di f , dando anche una rappresentazione grafica delle classi della relazione di equivalenza ad essa associata.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{Z}_7[x] \rightarrow \mathbb{Z}_7$ la corrispondenza così definita: $f(a(x)) = [a_0]$, $\forall a(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$.

- i) Provare che f è un omomorfismo di anelli;
- ii) Determinare $\ker f$, precisando se è un ideale principale, primo, massimale;
- iii) Studiare il quoziente $\mathbb{Z}_7[x]_{/\ker f}$.

Esercizio 3. Calcolare 2^{1432} modulo 29 e trovare l'inverso della classe 11 in $\mathbb{Z}_{29}$.

Esercizio 4. Si considerino $a(x) = 4x^3 + 1$ e $b(x) = 1 + x + 4x^2$.

- i) Studiare la riducibilità in $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}_5[x]$ di $a(x)$ e $b(x)$;
- ii) Trovare due divisori dello zero in $\mathbb{Z}_5[x]_{/(4x^3+1)}$.