ALGEBRA
3 Luglio 2006

1. Nell'anello $M(2,\mathbf{Z})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi in $\mathbf{Z}$ si consideri il sottoinsieme:

$$A = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$$

- Mostrare che A è un sottoanello di $M(2,\mathbf{Z})$. E' un ideale?
- Sia I il sottoinsieme di A cosí definito:

  $$I = \left\{ X = \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 3m \end{pmatrix} \mid n, m \in \mathbf{Z} \right\}$$

  Stabilire se I é un ideale di A. In caso affermativo dire se è principale, primo, massimale e descrivere A/I.
- Si consideri il gruppo additivo $A, +$ e si provi che la seguente funzione é una azione

  $$\begin{array}{rcl} f : A \times \mathbf{R^2} & \to & \mathbf{R^2} \\ (\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, (x,y)) & \mapsto & (a+x, b+y) \end{array}$$

  Si determinino le orbite e si descriva geometricamente l'insieme quoziente.

2. In $\mathbf{Q}[X]$ si considerino i polinomi

$$\begin{array}{rcl} F(X) & = & X^5 - 2X^4 + 4X^3 - 8X^2 + 3X - 6 \\ G(X) & = & X^3 - 3X^2 + X - 3 \end{array}$$

- Decomporre $F(X)$ e $G(X)$ in fattori irriducibili.
- Determinarne un M.C.D $D(X)$,
- Esistono polinomi $a(X)$ e $b(X)$ tali che $a(X)F(X) + b(X)G(X) = X^4 + 1$?
- Indicata con $\overline{F}(X)$ l'immagine di $F(X)$ nell'anello $\mathbf{Z_p}[X]$, trovare gli eventuali valori di p (numero primo) per cui $\overline{F}(X)$ ammette $-\overline{1}$ come radice.

3. Nel gruppo simmetrico S_7, si consideri la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Calcolare il periodo di σ e stabilire se è pari o dispari.
- Determinare una permutazione x tale che $\sigma^{62}x = (1, 4, 5)$.
- Quanti sono le permutazioni di S_7 coniugate con σ?