Composizione di rivestimenti

17 marzo 2008

Siano $p_2 : X_2 \to X_1$ e $p_1 : X_1 \to X$ due rivestimenti e $p = p_1 \circ p_2 : X_2 \to X$ la composizione. Vogliamo trovare condizioni affinché p sia un rivestimento.

In primo luogo, è noto che p non è sempre un rivestimento e presenteremo alcuni esempi. Successivamente analizzeremo alcune condizioni sufficienti affinché p sia un rivestimento.

1 Topologia prodotto

Il primo esempio è costruito usando uno spazio che è il prodotto di infiniti fattori. Poiché i problemi nasceranno dalla natura degli aperti nella topologia prodotto, può essere utile ricordare la definizione di topologia prodotto.

Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici, indicizzata dall'insieme I, e sia X l'insieme prodotto, cioè

$$X = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \;\middle|\; f(i) \in X_i \ \forall i \right\}$$

Se tutti gli X_i sono non vuoti, l'assioma della scelta garantisce che X è non vuoto. L'insieme X è fornito delle *proiezioni canoniche* sui fattori $\pi_i : X \to X_i$ definite da

$$\pi_i(f) = f(i)$$

Le proiezioni canoniche sono suriettive e soddisfano una opportuna proprietà universale nella categoria degli insiemi. Poiché tutti gli X_i sono spazi topologici, è naturale chiedere che la topologia prodotto su X sia tale da rendere tutte le funzioni π_i continue. Una funzione è continua se la controimmagine di un aperto è aperta e quindi se X ha "molti" aperti è facile che π_i risulti continua. Per esempio, se su X mettiamo la topologia discreta (ogni sottoinsieme è aperto) è chiaro che le proiezioni canoniche sono continue. La topologia prodotto è allora definita come la topologia "più piccola" (o che ha "meno aperti") che rende continue tutte le proiezioni.

Sia U_j un aperto di X_j; poiché si ha

$$\pi_j^{-1}(U_j) = U_j \times \prod_{i \neq j} X_i$$

tutti questi insiemi devono essere aperti nella topologia prodotto, e così anche le loro unioni qualunque e le loro intersezioni *finite*. Si verifica subito che le intersezioni finite formano una base, e quindi un insieme U è aperto della base della topologia prodotto di X se e solo se esistono aperti $U_{i_1} \subset X_{i_1}, \dots, U_{i_n} \subset X_{i_n}$ tali che

$$U = U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_1} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_n} X_i$$

In particolare, il prodotto di aperti non è necessariamente aperto in X: sono aperti solo i prodotti che hanno un numero *finito* di fattori (aperti) diversi dall'intero spazio.

La morale è che nel prodotto gli aperti sono molto "grandi".

2 Primo esempio

Vediamo adesso un esempio in cui p non è un rivestimento. Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ la circonferenza, pensata come l'insieme dei numeri complessi di norma 1 con la topologia euclidea standard, e sia $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ la funzione definita da $\exp(t) = e^{2\pi i t}$ che esibisce $\mathbb{R}$ come il rivestimento universale di S^1.

Sia

$$X = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 \times \dots$$

il prodotto di una quantità numerabile di circonferenze con la topologia prodotto, sia

$$Y_n = \mathbb{R}^n \times S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 \times \dots$$

e sia $q_n : Y_n \to X$ definita da

$$q_n(t_1, \dots, t_n, z_{n+1}, \dots) = (\exp(t_1), \dots, \exp(t_n), z_{n+1}, \dots)$$

A parole, q_n è il rivestimento universale sopra i primi n fattori e l'identità sui restanti fattori. La mappa q_n è un rivestimento: la verifica è immediata, ma è importante capire quali siano gli aperti di X uniformemente rivestiti. Per la natura del rivestimento universale, un aperto della base $U \subset X$ è uniformemente rivestito se e solo se, posto

$$U = U_1 \times U_2 \times \dots$$

si ha: $U_1 \neq S^1, \dots, U_n \neq S^1$. Naturalmente, $U_j = S^1$ per tutti gli indici j abbastanza grandi (solo un numero finito di U_j è diverso da S^1).

Definiamo allora

$$\begin{aligned} X_2 &= \text{unione disgiunta degli spazi } Y_n \\ X_1 &= \text{unione disgiunta di una quantità numerabile di copie di } X = X \times \mathbb{N} \end{aligned}$$

e $p_2 : X_2 \to X_1$ tale che la restrizione a Y_n sia q_n a valori in $X \times \{n\}$. Definiamo ora $p_1 : X_1 \to X$ come la proiezione sul primo fattore. Il lettore attento (e molto pignolo) si sarà accorto che il simbolo $\mathbb{N}$ è stato usato per indicare i numeri naturali *senza* lo 0.

Osserviamo che:

1. X_1 è sconnesso, e anzi ha una quantità numerabile di componenti connesse;
2. di conseguenza anche X_2 è sconnesso, e ogni componente di X_2 è un rivestimento di una componente di X_1;

3. il rivestimento p_1 ha infiniti fogli;

4. X è connesso e localmente connesso per archi ma non è semi-localmente semplicemente connesso: in ogni aperto della base, e di conseguenza in ogni intorno di ogni punto, ci sono delle circonferenze che non sono contraibili in X. Quindi X non ammette rivestimento universale.

Dimostriamo adesso che $p = p_1 \circ p_2$ non è un rivestimento. Sia $x \in X$: ogni intorno U di x deve contenere un aperto della base, e quindi possiamo supporre

$$U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times S^1 \times S^1 \times \dots$$

Allora l'intorno U non è uniformemente rivestito dalle mappe q_{n+1}, q_{n+2}, ...

3 Una condizione sufficiente

Analizzando con attenzione il controesempio appena presentato non è difficile enunciare una condizione sufficiente affinché $p_1 \circ p_2$ sia un rivestimento.

Sia $x \in X$ e sia U un intorno di x uniformemente rivestito da p_1. Allora

$$p_2^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i$$

unione disgiunta di aperti U_i in X_1, ognuno omeomorfo mediante p_1 a U. Sia $x_i \in U_i$ il punto tale che $p_1(x_i) = x$. L'aperto U_i è un intorno di x_i ma non è necessariamente uniformemente rivestito dalla mappa p_2.

Sia allora $V_i \subseteq U_i$ un intorno di x_i uniformemente rivestito da p_2 e sia

$$p_2^{-1}(V_i) = \coprod_{j \in J} V_{ij}$$

Ogni V_{ij} è omeomorfo a V_i mediante p_2 e V_i è omeomorfo a $p_1(V_i)$ mediante p_1. Se prendiamo

$$V = \bigcap_{i \in I} p_1(V_i)$$

allora V è uniformemente rivestito da $p = p_1 \circ p_2$. Nonostante V contenga x, non è detto che sia un intorno di x. Nell'esempio precedente, si avrebbe

$$V = W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n \times \dots$$

dove tutti i W_i sono diversi da S^1, e questo è un insieme uniformemente rivestito ma non è un aperto nella topologia prodotto.

Abbiamo perciò dimostrato:

Proposizione 3.1. *Con le notazioni precedenti, se per ogni $x \in X$, l'insieme V determinato come sopra è un intorno di x, allora $p_1 \circ p_2$ è un rivestimento.*

Poiché V è una intersezione di intorni, abbiamo subito che

Corollario 3.2. *Se $p_1 : X_1 \to X$ è un rivestimento con un numero finito di fogli, allora $p_1 \circ p_2$ è sempre un rivestimento.*

4 Un'altra condizione sufficiente

Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[d, "p_1"] \\
X_2 \arrow[ur, "p_2"] \arrow[r, "p"'] & X
\end{tikzcd}$$

Sappiamo che il sollevamento di un rivestimento è un rivestimento, e cioè

$$p, p_1 \text{ rivestimenti} \implies p_2 \text{ rivestimento}$$

È anche vero che

Proposizione 4.1.

$$p, p_2 \textit{ rivestimenti} \implies p_1 \textit{ rivestimento}$$

Dimostrazione. Esercizio. Attenzione alle ipotesi: se X_2 è connesso, anche X_1 e X lo sono perché un rivestimento è suriettivo. Forse si può dimostrare anche con X_2 non connesso, ma non sono sicuro. □

Possiamo allora dimostrare:

Proposizione 4.2. *Siano p_1 e p_2 rivestimenti, e supponiamo che X ammetta rivestimento universale. Allora $p = p_1 \circ p_2$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Sia $f : \tilde{X} \to X$ il rivestimento universale e consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& X_2 \arrow[d, "p_2"] \\
& X_1 \arrow[d, "p_1"] \\
\tilde{X} \arrow[uur, dashed, "f_2"] \arrow[ur, dashed, "f_1"'] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Poiché $\tilde{X}$ è il rivestimento universale la mappa f_1, sollevamento di f mediante p_1, esiste ed è ancora un rivestimento. Allora f_1 è il rivestimento universale di X_1 e quindi f_2, sollevamento di f_1 mediante p_2, esiste ed è ancora un rivestimento.

Abbiamo perciò che f e f_2 sono rivestimenti e quindi $p_1 \circ p_2$ lo è, per la proposizione precedente. □