9. Dualità

Esistono vari teoremi di dualità in cui si mette in relazione omologia e coomologia di una varietà topologica.

Il primo (didatticamente e storicamente) di questi teoremi è la dualità di Poincaré che classicamente mette in relazione omologia in dimensione k con omologia in dimensione n-k (n = dimensione della varietà) di una varietà compatta e orientabile M.

L'idea è di definire un indice di intersezione $\#$ tra k-celle e (n-k)-celle trasverse (che si intersecano in modo trasverso).
Per avere rappresentanti di classi di omologia che siano trasversi si usa la decomposizione in celle e celle duali (vedere Bredon p. 338 o Griffiths-Harris p. 49)
Si costruisce allora un pairing

$$H_k(M, \mathbb{Z}) \times H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap} \mathbb{Z}$$

nel modo seguente: dati $\alpha \in H_k(M, \mathbb{Z})$ e $\beta \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ scelgo rappresentanti A e B che si intersecano trasversalmente e definisco

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \#(A \cap B)$$

L'enunciato classico è allora il seguente:

<u>Teorema di dualità di Poincaré (forma classica)</u> (v. Griffiths-Harris p. 53)

Sia M una varietà compatta orientabile di dimensione n.
Il pairing di intersezione

$$H_k(M, \mathbb{Z}) \times H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap} \mathbb{Z}$$

è <u>unimodulare</u> cioè

- ogni funzionale lineare $f: H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ è esprimibile come intersezione con qualche $\alpha \in H_k(M, \mathbb{Z})$:

$$f(\beta) = \#(B \cap A)$$

o ogni classe $\alpha \in H_k(M, \mathbb{Z})$ avente indice di intersezione 0 con tutte le classi in $H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ e' di torsione.

In particolare se $\mathbb{Z}^{\beta_k}$ e $\mathbb{Z}^{\beta_{n-k}}$ sono le parti libere di $H_k(M, \mathbb{Z})$ e $H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ allora $\boxed{\beta_k = \beta_{n-k}}$

(i numeri di Betti "complementari" sono uguali.

Se M ha una struttura differenziale posso esprimere la dualita' in termini di coomologia di de-Rham ; il pairing

$$H^k_{DR}(M) \times H^{n-k}_{DR}(M) \to \mathbb{R}$$
$$([\varphi], [\psi]) \longmapsto \int_M \varphi \wedge \psi$$

e' non degenere. In particolare questo (in virtu' del teorema di de Rham che asserisce l'isomorfismo tra coomologia singolare e di de Rham) $\beta_k = \beta_{n-k}$.

In termini moderni si definisce una mappa

$$H^k(M, R) \to H_{n-k}(M, R)$$

(R = PID e M R-orientabile)

e si prova che e' un isomorfismo

la definizione di questo omomorfismo e' in termini di un prodotto detto CAP PRODUCT (e indicato con $\cap$) che ha strette relazioni con il cup product.

Sia X uno spazio arbitrario e R un anello di coefficienti

Definiamo

$$\cap : S_k(X, R) \times S^l(X, R) \longrightarrow S_{k-l}(X, R) \qquad (k \geq l)$$
$$(\sigma \ , \ \varphi) \longmapsto \sigma \cap \varphi$$

$$\sigma \cap \varphi = \varphi(\sigma|_{\langle E_0, .., E_l \rangle})\, \sigma|_{\langle E_l, .., E_k \rangle}.$$

Per vedere che viene indotto un prodotto cap in omologia e coomologia usiamo la formula

$$\partial(\sigma \cap \varphi) = (-1)^{\ell}(\partial\sigma \cap \varphi - \sigma \cap \delta\varphi)$$

che può essere verificata per calcolo diretto (esercizio, vedere Hatcher p. 240).
È poi standard vedere che il cap product di un ciclo e un cociclo è un ciclo e l'indipendenza dalle classi.
Viene dunque indotto un cap product

$$H_k(X;R) \times H^{\ell}(X;R) \xrightarrow{\cap} H_{k-\ell}(X;R)$$

che è R-lineare in entrambe le variabili.

Analogamente si possono definire dei cap product relativi

$$H_k(X,A;R) \times H^{\ell}(X;R) \xrightarrow{\cap} H_{k-\ell}(X,A;R)$$

$$H_k(X,A;R) \times H^{\ell}(X,A;R) \xrightarrow{\cap} H_{k-\ell}(X;R)$$

Il cap product è naturale: se $f: X \to Y$ allora il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} H_k(X) & \times & H^{\ell}(X) & \xrightarrow{\cap} & H_{k-\ell}(X) \\ f_*\downarrow & & \uparrow f^* & & \downarrow f_* \\ H_k(Y) & \times & H^{\ell}(Y) & \longrightarrow & H_{k-\ell}(Y) \end{array}$$

"commuta": $f_*\alpha \cap \varphi = f_*(\alpha \cap f^*\varphi)$.

Sia ora M una varietà compatta R-orientabile di dim n.
Ricordiamo che $H_n(M;R) \cong R$ e un generatore è $[M]$ detta classe fondamentale

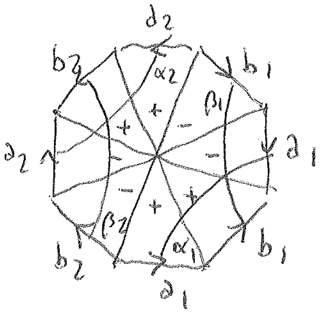
Teorema di dualità di Poincaré

Sia M una varietà compatta R-orientabile di dimensione n con classe fondamentale $[M]$. Allora la mappa (di dualità)

$$D: H^k(M;R) \to H_{n-k}(M,R)$$
$$\alpha \longmapsto [M] \cap \alpha$$

(cap product con la classe fondamentale)
è un isomorfismo per ogni k

Esempio: superfici orientabili di genere g



Ricordiamo che una superficie orientabile di genere g si ottiene da $4g$-gono identificando i lati opposti secondo la parola $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$

Si ottiene una triangolazione unendo i vertici al centro come in figura

si orientano poi i triangoli come in figura ($-$ significa che il triangolo va orientato in modo opposto al lato esterno)

Accanto ai cicli $[a_i]$ e $[b_j]$ che rappresentano i generatori di $H_1(M_g, \mathbb{Z})$ consideriamo i cocicli trasversi α_i e β_j:

α_i assegna a ogni 1-simplesso
- valore 1 se l'arco α_i lo incontra
  0 se l'arco α_i non lo incontra

analogo per β_j

Usando la definizione (simpliciale) di cap product (devo dare un'ordinamento ai vertici) abbiamo

$$[M] \cap \alpha_i = b_i$$

perche' c'e' un unico 2-simplesso $[v_0, v_1, v_2]$ in cui α_i o β_i sono non nulli su $[v_0, v_1]$

(Nel caso di α_1 e' )

Analogamente

$$[M] \cap \beta_i = -a_i$$

(Alternativamente posso usare il fatto che

$$\langle \psi, \sigma \cap \varphi \rangle = \langle \psi \cup \varphi, \sigma \rangle \qquad \text{(v. dopo)}$$

$\psi \in H^{k-l}$ $\varphi \in H_l$ $\sigma \in H_k$ e $\alpha_i \cup \beta_i = [M]$)

Quindi b_i e' il Poincaré-duale di α_i e $-a_i$ di β_i
Geometricamente la dualità si riflette nel fatto che i coppi α_i e b_i sono omotopi.

Per dimostrar la dualita' di Poincaré e' necessario usare la successione di Mayer-Vietoris, ma quindi insiemi aperti e non compatti. Per questa ragione e' necessaria una versione di dualità per varietà non compatte che pero' vale solo per una forma speciale di coomologia: la coomologia a supporto compatto.

§ 9.1 Coomologia a supporto compatto

Prima di dare una definizione, vediamo la nozione concettualmente piu' semplice di coomologia simpliciale a supporto compatto.
Consideriamo un complesso localmente compatto, cioe' tale che ogni punto ha un intorno che incontra solo un numero finito di simplessi.
Consideriamo il sottogruppo $\Delta^i_c(X;G)$ del complesso delle cocatene $\Delta^i(X;G)$ che consiste nelle cocatene a supporto compatto, cioe' che assumono valore non nullo su un insieme finito di simplessi.
Il cobordo di una tale cocatena φ puo' assumere valori non zero solo su un $(i+1)$-simplesso su una cui faccia φ non e' nullo e per la locale compattezza ce ne sono solo un numero finito.
Quindi $\delta\varphi \in \Delta^{i+1}_c(X;G)$.
La coomologia di $\Delta^*_c(X;G)$ e' detta coomologia a supporto compatto ed e' denotata con $H^*_c(X;G)$

<u>Esempio</u> Sia $X = \mathbb{R}$ con una struttura di complesso simpliciale con vertici i numeri interi.

$H^0_c(\mathbb{R};G) = 0$ (esercizio)

$H^1_c(\mathbb{R};G) \neq 0$:

$$\Sigma : \Delta^1_c(\mathbb{R};G) \to G$$
$$\sigma \longmapsto \Sigma \text{ valori di } \sigma \text{ su tutti gli 1-simplessi}$$
e' ben def. in Δ^1_c

La mappa Σ si annulla sui cobordi e quindi induce una mappa

$$H^1_c(\mathbb{R}; G) \to G$$

che e' suriettiva perche' ogni elemento di $\Delta^1_c(\mathbb{R})$ e' un cociclo. Si puo' vedere che e' anche iniettiva; quindi $H^1_c(\mathbb{R}; G) \cong G$.

Per CW complessi localmente compatti si puo' definire analogamente la coomologia a supporto compatto, usando cocatene cellulari che non si annullano solo su un numero finito di celle.

In generale, per la coomologia singolare $H^i_c(X; G)$ e' definita in termini di limiti diretti.

Supponiamo che dei gruppi abeliani $\{G_\alpha\}$ siano indicizzati da un un insieme parzialmente ordinato I con la proprieta' che per ogni $\alpha, \beta \in I$ esiste un $\gamma \in I$ tale che $\alpha \le \gamma$ e $\beta \le \gamma$

Tale insieme ordinato si dice insieme diretto

Supponiamo inoltre che per ogni $\alpha \le \beta$ ci sia un omomorfismo

$$f_{\alpha\beta} : G_\alpha \to G_\beta$$

tale che

- se $\alpha \le \beta \le \gamma$ $\qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "f_{\alpha\beta}"] \arrow[rr, bend right, "f_{\alpha\gamma}"'] & G_\beta \arrow[r, "f_{\beta\gamma}"] & G_\gamma \end{tikzcd} \qquad (f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta})$
- $f_{\alpha\alpha} = id$

$\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ e' allora detto un sistema diretto di gruppi

Un limite diretto o induttivo del sistema e' un gruppo denotato con $\varinjlim G_\alpha$ con una famiglia di omomorfismi:

$$f_\alpha : G_\alpha \to \varinjlim G_\alpha$$

indicizzata da I in modo che

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "f_{\alpha\beta}"] \arrow[rr, bend right, "f_\alpha"'] & G_\beta \arrow[r, "f_\beta"] & \varinjlim G_\alpha \end{tikzcd} \qquad f_\alpha = f_\beta \circ f_{\alpha\beta}$$

e questa collezione è universale rispetto alla seguente proprietà: per ogni gruppo abeliano H e ogni famiglia

$$h_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$$

con

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "f_{\alpha\beta}"] \arrow[rr, bend right, "h_\alpha"'] & G_\beta \arrow[r, "h_\beta"] & H \end{tikzcd}$$

esiste un unico omomorfismo $\varinjlim G_\alpha \xrightarrow{h} H$ con

$$\begin{tikzcd} & H \\ G_\alpha \arrow[ur, "h_\alpha"] \arrow[r, "g_\alpha"'] & \varinjlim G_\alpha \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & & & H \\ \arrow[r] & G_\alpha \arrow[urrr, "h_\alpha"] \arrow[r, "f_{\alpha\beta}"'] & G_\beta \arrow[urr, "h_\beta"] \arrow[r] & \dots \quad . \arrow[r] & \varinjlim G_\alpha \arrow[u, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

Ovviamente è standard vedere che la proprietà universale implica l'unicità di $\varinjlim G_\alpha$ a meno di isomorfismi.
Per l'esistenza si può definire

$$\varinjlim G_\alpha = \bigoplus G_\alpha / Q$$

con Q il sottogruppo generato dagli elementi del tipo

$$a - f_{\alpha\beta}(a) \qquad a \in G_\alpha$$

dove vediamo $G_\alpha \hookrightarrow \bigoplus G_\alpha$

Notiamo che se c'è un sottoinsieme $J \subset I$ con la proprietà che per ogni $\alpha \in I$ esiste un $\beta \in J$ con $\alpha \leq \beta$, allora $\varinjlim^I G_\alpha = \varinjlim^J G_\beta$.

In particolare, se I ha un elemento massimale γ, $\varinjlim G_\alpha = G_\gamma$.

Sia ora X uno spazio topologico. L'insieme dei compatti K di X forma un insieme diretto con l'inclusione, dato che l'unione di 2 compatti e' compatto.

Ad ogni $K \subset X$ associamo $H^i(X, X-K; G)$ G gruppo dei coefficienti

Allora a $K \subset L$ $\rightsquigarrow$

$$H^i(X, X-K; G) \to H^i(X, X-L; G)$$

Definiamo allora la <u>coomologia a supporto compatto</u> $H^i_c(X; G)$ come

$$H^i_c(X; G) := \varinjlim H^i(X, X-K; G)$$

Notiamo che ogni elemento di $H^i_c(X; G)$ e' rappresentato da un cociclo in $S^i(X, X-K; G)$ cioe' da una cocatena che si annulla fuori da un compatto, ~~cioe'~~ in quanto si annulla su tutte le catene il cui supporto e' in $X-K$.

<u>Esempio</u> $H^*_c(\mathbb{R}^n; G)$. Possiamo far variare K solo tra le sfere piene centrate nell'origine B_r con r intero.

Dato che $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_r; G) \neq 0$ solo per $i = n$ ($e' = G$) e $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_r) \to H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_{r+1})$ sono isomorfismi (con G), troviamo $H^i_c(\mathbb{R}^n; G) = 0$ $i \neq n$ $H^n_c(\mathbb{R}^n; G) = G$.

Questo esempio mostra che la coomologia a supporto compatto non e' invariante per tipo di omotopia.

<u>§ 9.2 Dualita' per varieta' non compatte</u>

Per varieta' R-orientabili eventualmente non compatte possiamo definire la mappa di dualita'

$$D : H^k_c(M; R) \longrightarrow H_{n-k}(M; R)$$

con un processo di "passaggio al limite" nel modo seguente

Per sottoinsiemi compatti $K \subset L \subset M$ abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
H_n(M|L;R) \times H^k(M|L;R) \arrow[dr, "\cap"] \arrow[d, "i_*"'] & \\
H_n(M|K;R) \times H^k(M|K;R) \arrow[u, "i^*"'] \arrow[r, "\cap"'] & H_{n-k}(M;R)
\end{tikzcd}$$

dove indichiamo $H_n(M, M-L; R)$ con $H_n(M|L;R)$ e $H^k(M, M-L; R)$ con $H^k(M|L;R)$.

Ricordiamo che per l'orientabilità esistono elementi (univocamente determinati) $\mu_K \in H_n(M|K;R)$, $\mu_L \in H_n(M|L;R)$ che determinano l'orientamento e tali che $i_* \mu_L = \mu_K$.
La naturalità del cap product implica che

$$i_* \mu_L \cap x = \mu_L \cap i^* x \qquad \forall x \in H^k(M|K;R)$$

e così

$$\mu_K \cap x = \mu_L \cap i^* x .$$

Quindi facendo variare K tra i compatti di M, gli omomorfismi

$$\begin{aligned} H^k(M|K;R) &\longrightarrow H_{n-k}(M;R) \\ x &\longmapsto \mu_K \cap x \end{aligned}$$

inducono un omomorfismo

$$D_M : H^k_c(M;R) \longrightarrow H_{n-k}(M;R)$$

Dato che $H^k_c(M;R) = H^k(M;R)$ se M è compatta, il seguente teorema generalizza la dualità di Poincaré a varietà non necessariamente compatte

Teorema $D_M : H^k_c(M;R) \to H_{n-k}(M;R)$
è un isomorfismo per ogni varietà R-orientabile M, e per ogni k.

La dimostrazione non è complessa a parte il seguente lemma, che nonostante solitamente la commutatività di diagrammi sia di non difficile dimostrazione è molto complessa.
Non diamo la dimostrazione, per cui rimandiamo ad Hatcher p. 266

Lemma

Se M e' unione di due aperti U e V, allora abbiamo un diagramma di successioni di Mayer-Vietoris che commuta a meno del segno

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^k_c(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & H^k_c(U)\oplus H^k_c(V) \arrow[r] \arrow[d, "D_U \oplus -D_V"] & H^k_c(M) \arrow[r] \arrow[d, "D_M"] & H^{k+1}_c(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-k}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U)\oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & H_{n-k-1}(U\cap V) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione del teorema di dualità di Poincaré

Ci sono due passi induttivi, uno finito e l'altro infinito.

(A) Se M e' unione di due aperti U e V e se D_U, D_V e $D_{U\cap V}$ sono isomorfismi, allora D_M e' un isomorfismo.

Questo segue immediatamente dal lemma e dal lemma dei 5.

(B) Se M e' unione di una successione $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ di aperti e per ciascun U_i $D_{U_i} : H^k_c(U_i) \to H_{n-k}(U_i)$ e' un isomorfismo, allora D_M e' un isomorfismo.

Per mostrare questo, notiamo che per escissione $H^k_c(U_i)$ può essere considerato come $\displaystyle\varinjlim_{K\subseteq U_i \text{ compatto}} H^k(M|K)$

Allora ci sono mappe naturali $H^k_c(U_i) \to H^k_c(U_{i+1})$ in quanto $H^k_c(U_{i+1})$ e' un limite su una collezione più grande di K.

Allora possiamo considerare $\varinjlim H^k_c(U_i) = H^k_c(M)$ in quanto i compatti di M sono i compatti in tutti gli U_i

Inoltre $\varinjlim H_{n-k}(U_i) = H_{n-k}(M)$ (esercizio).

Dunque D_M e' il limite di omomorfismi che sono tutti isomorfismi e quindi un isomorfismo.

Ora possiamo provare il teorema in 3 passi

(1) Se $M = \mathbb{R}^n$, consideriamo $\mathbb{R}^n$ come l'interno di Δ^n e D_M si identifica con $H^k(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-k}(\Delta^n)$

dato dal cap product con $[\Delta^n] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ (identità su Δ^n)

L'unico caso non triviale è $k = n$, quando il cap product è un isomorfismo in quanto un generatore di $H^n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ è rappresentato da un cociclo φ che ha valore 1 su Δ^n. In questo modo

$$\Delta^n \cap \varphi$$

è l'ultimo vertice di Δ^n che genera $H_0(\Delta^n)$.

(2) Più in generale D_M è un isomorfismo per aperti di $\mathbb{R}^n$.
Infatti, scriviamo M come unione numerabile di aperti convessi limitati non vuoti U_i (ad esempio sfere piene aperte) e sia

$$V_i = \bigcup_{j<i} U_j$$

Sia V_i sia $U_i \cap V_i$ sono unione di $i-1$ aperti convessi limitati e quindi per induzione sul numero di aperti del ricoprimento possiamo supporre D_{V_i} e $D_{U_i \cap V_i}$ isomorfismi.
Per (1) D_{U_i} è un isomorfismo in quanto U_i è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Quindi $D_{U_i \cup V_i}$ è un isomorfismo per (A)
Dato che M è unione crescente dei V_i e ogni D_{V_i} è un isomorfismo, per (B) D_M è un isomorfismo.

(3) Se M è un'unione finita o infinita numerabile di aperti U_i omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ con lo stesso argomento in (2) possiamo provare il teorema (sostituiamo "convesso limitato aperto" con "aperto")

La dimostrazione è finita per M compatto.
Per finire la dimostrazione del teorema per M non compatto usiamo il lemma di Zorn.

Consideriamo l'insieme di aperti $U \subset M$ per cui vale la dualità (cioè D_U è un isomorfismo). Questa collezione di aperti è ordinata parzialmente per inclusione e un'unione di aperti della collezione sta ancora nella collezione per (B).
Per il lemma di Zorn esiste un insieme massimale U in cui il teorema vale

Se $U \neq M$, scegliamo $x \in M - U$ e un intorno V di x omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
Il teorema vale per V e $U \cap V$ per (1) e (2), per U per ipotesi e quindi per (A) vale per $U \cup V$, il che contraddice la massimalità di U. ☒

Corollario
Una varietà compatta di dimensione dispari ha caratteristica di Eulero nulla

dimostrazione Sia M una varietà di dimensione dispari, compatta.
Se M è orientabile $\operatorname{rank} H_i(M;\mathbb{Z}) = \operatorname{rank} H^{n-i}(M;\mathbb{Z}) = \operatorname{rank} H_{n-i}(M;\mathbb{Z})$ per il teorema dei coefficienti universali.
Quindi se M ha dimensione dispari i termini di $\sum(-1)^i \operatorname{rank} H_i(M,\mathbb{Z})$ si cancellano a coppie.
Se M non è orientabile usiamo la coomologia e l'omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$.
Allora $\sum(-1)^i \operatorname{rank} H_i(M,\mathbb{Z}_2) = 0$ e dobbiamo provare che $\sum(-1)^i \operatorname{rank} H_i(M,\mathbb{Z}) = 0$.
Possiamo provare questo usando l'isomorfismo $H^i(M,\mathbb{Z}_2) \cong H_i(M,\mathbb{Z}_2)$ e il teorema dei coefficienti universali per la coomologia: ogni $\mathbb{Z}$-addendo di $H_i(M,\mathbb{Z})$ da uno $\mathbb{Z}_2$-addendo di $H^i(M,\mathbb{Z}_2)$
Ogni $\mathbb{Z}_m$ addendo di $H_i(M,\mathbb{Z})$ con m pari da uno $\mathbb{Z}_2$-addendo di $H^i(M,\mathbb{Z}_2)$ e $H^{i+1}(M,\mathbb{Z}_2)$ ma questi si cancellano nella somma alternata $\sum(-1)^i H^i(M,\mathbb{Z}_2)$
(Inoltre gli addendi del tipo $\mathbb{Z}_m$ con m dispari non danno contributo a $H^*(M,\mathbb{Z}_2)$). ☒

§ 9.3 Legami con il cup product

Cup e cap product sono legati dalla formula

$$(*) \quad \psi(\alpha \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)(\alpha)$$

$$\alpha \in H_k(X;R) \qquad \varphi \in H^{l-k}(X;R) \qquad \psi \in H^l(X;R)$$

(esercizio)

Per mezzo di $(*)$, la dualità di Poincaré ha implicazioni non banali sulla struttura di anello di $H^*(X;R)$.

Sia M una varietà compatta orientabile e consideriamo il pairing mediante cup product

$$H^k(M;R) \times H^{n-k}(M;R) \longrightarrow R \qquad n = \dim M$$
$$\varphi, \ \psi \longmapsto (\varphi \smile \psi)[M]$$

In generale, un pairing $A \times B \to R$ e' non degenere se le mappe

$$B \longmapsto \mathrm{Hom}(A,R)$$
$$A \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,R)$$

date dal vedere il pairing come funzione di una sola variabile sono isomorfismi.

Torniamo allora alla formulazione della dualità in termini classici, osservando che per $(*)$

$$(\varphi \smile \psi)[M] = \psi([M] \frown \varphi) = \psi(D(\varphi))$$

Abbiamo allora che il pairing e' non degenere per R campo o in generale, se si fattorizza la torsione da $H^*(M,R)$.

Come conseguenza, se M e' una varietà compatta orientabile di dimensione n, per ogni $\alpha \in H^k(M,\mathbb{Z})$ di ordine infinito e non multiplo di un altro elemento (cioè generatore di un fattore $\mathbb{Z}$ in $H^k(M,\mathbb{Z})$) esiste un $\beta \in H^{n-k}(M;\mathbb{Z})$ tale che $\alpha \smile \beta$ genera $H^n(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

<u>Esempio</u> $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ con $\deg \alpha = 2$

Infatti $\mathbb{CP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$ induce un isomorfismo su $\check{H}^i$ per ogni $i \leq 2n-2$ (CW-cohomology), quindi per induzione $H^{2i}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$ e' generato da α^i $i<n$.

Per il risultato detto, c'e' un intero m per cui

$$\alpha \cup m\alpha^{n-1} = m\alpha^n$$

genera $H^{2n}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$.

Questo puo' accadere solo per $m = \pm 1$ e quindi $H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$ e' isomorfo a $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$

Approfondimenti

Ci sono altri teoremi di dualita' (per varieta' con bordo, per la S-dualita' di Alexander, la dualita' di Lefschetz etc).