Richiami sui gruppi abeliani

Un gruppo abeliano G e' libero generato da $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ (*) se e solo se ogni funzione $f: S \longrightarrow H$ con H un gruppo abeliano si estende ad un omomorfismo $\bar{f}: G \longrightarrow H$ in modo unico.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & H \\ & G \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

S e' detto una base per G.

In pratica, ogni elemento di G si scrive in modo unico come $g = \sum n_i e_i$ $n_i \in \mathbb{Z}$ (non ci sono relazioni)

Il numero di elementi di una base (che non dipende dalla scelta della base) si dice <u>rango</u> di G

Piu' in generale se ogni $g \in G$ si può scrivere come $g = \sum n_i g_i$ in modo non necessariamente unico, per una famiglia finita $\{g_1, \dots, g_m\}$, G si dice <u>finitamente generato</u>.

Un elemento $g \in G$ si dice di ordine finito se $ng = 0$ per qualche intero positivo n.

L'insieme di tutti gli elementi di ordine finito in G e' un sottogruppo T detto <u>sottogruppo di torsione</u>

Se $T = (0)$, G si dice <u>privo di torsione</u>

Un gruppo abeliano libero e' necessariamente privo di torsione (e vedremo dal teorema di classificazione dei gruppi finitamente generati abeliani che se G non ha torsione e' libero).

(*) L'insieme S può essere infinito, ma a noi interesserà il caso di S finito, cioe' di gruppi liberi finitamente generati

Numeri di Betti e caratteristica di Eulero

Se M e' un CW complesso, l'omologia intera di M e' finitamente generata: $H_*(X)$ e' un gruppo abeliano finitamente generato.

Ricordiamo che:

Teorema 1

Sia F un gruppo libero abeliano

Se R e' un sottogruppo di F $\Rightarrow$ anche R e' libero

$\operatorname{rank} R \leq \operatorname{rank} F$

Inoltre c'e' una base $e_1, \dots, e_n$ di F e esistono degli interi $t_1, \dots, t_k$ $(t_i > 1)$ tali che

(1) $t_1 e_1, \dots, t_k e_k, e_{k+1}, \dots, e_r$ e' una base di R

(2) $t_1 | t_2 | \dots | t_k$

Gli interi $t_1 \dots, t_k$ sono univocamente determinati da R e F anche se la base $e_1, \dots, e_n$ non e' unica.

In pratica $F \cong \bigoplus_{n \text{ copie}} \mathbb{Z}$

$$R \cong \bigoplus_{i=1}^{k} t_i \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{j=k+1}^{r} \mathbb{Z}$$

Come corollario si ha

Teorema 2 (teorema fondamentale sui gruppi abeliani finitamente generati)

Sia G un gruppo abeliano finitamente generato e T il suo sottogruppo di torsione

(a) C'e' un sottogruppo libero abeliano H di G di rango β tale che $G = H \oplus T$

(b) Esistono sottogruppi ciclici $T_1, \dots, T_k$ di ordine t_i e $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k$ $\quad t_1 | t_2 | \dots | t_k$

(c) β e $t_1 \dots, t_k$ sono univocamente determinati da G.

Il numero β si chiama <u>numero di Betti</u> di G

i numeri $t_1, \dots, t_k$ <u>coefficienti di torsione di G</u>

Si noti che $\beta = \operatorname{rank}(G/T)$ $\quad G/T \simeq H$ (libero)

Il teorema 2 implica che un gruppo abeliano finitamente generato si scrive come somma di gruppi ciclici.

$$G \cong \underbrace{(\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z})}_{\substack{\beta \text{ volte} \\ \text{parte libera}}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_{t_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{t_k}}_{\substack{t_i > 1 \quad t_1 | t_2 | \dots | t_k \\ \text{torsione}}}$$

Questa rappresentazione e' in qualche senso "canonica", ma c'e' un'altra rappresentazione canonica:

ricordiamo che se m e n sono primi tra loro

$$\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$$

Pertanto un gruppo ciclico puo' essere scritto come somma diretta di gruppi ciclici il cui ordine e' una potenza di un numero primo. Quindi

$$G \cong (\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \dots \mathbb{Z}_{a_s})$$

a_i potenze di numeri primi

Anche questa rappresentazione e' canonica in quanto gli a_i (a meno dell'ordine) sono univocamente determinati da G. Gli a_i sono detti <u>fattori invarianti</u> di G

<u>Esempi</u> $\quad \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9$

fattori invarianti

$\cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{18}$

$3 | 18$ coefficienti di torsione.

Sia ora $H_q(X, \mathbb{Z}) = H_q(X)$ il q-esimo gruppo di omologia di un CW complesso X

$$\operatorname{rank} H_q(X) =: \beta_q \qquad q\text{-esimo } \underline{\text{numero di Betti}} \text{ di } X$$

La caratteristica di Eulero e' data da

$$\chi(X) := \sum_q (-1)^q \beta_q$$

Numeri di Betti e caratteristica di Eulero sono ovviamente degli invarianti topologici

Esempi : 1) Per S^n $\quad \beta_0 = \beta_n = 1 \quad \beta_q = 0 \ \forall q \neq 0, n \Rightarrow$

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ 2 & n \text{ pari} \end{cases}$$

2) Per $\mathbb{C}P^n$: $\beta_q = 0$ q dispari $q > 2n$

$\beta_q = 1$ q pari $0 \le q \le 2n$

$$\Rightarrow \quad \chi(\mathbb{C}P^n) = n+1$$

3) Per $\mathbb{R}P^n$ $\beta_0 = 1$ $\beta_n = 1$ per n dispari e $\beta_q = 0$ in tutti gli altri casi $\Rightarrow$

$$\chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

4) Sia S_g una superficie orientabile di genere g

$\beta_0 = \beta_2 = 1 \quad \beta_1 = 2g \quad \beta_q = 0 \quad q > 2$

$$\Rightarrow \quad \chi(S_g) = 2 - 2g$$

Possiamo anche definire numeri di Betti relativi e la caratteristica di Eulero $\chi(X, A)$ per una coppia (X, A)

Lemma $\quad \chi(X) = \chi(A) + \chi(X, A)$

dimostrazione usando la successione lunga di omologia ci riconduciamo ad un lemma completamente algebrico

<u>Lemma</u> Se

$$0 \to A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} \cdots \xrightarrow{i_{r-1}} A_r \to 0$$

e' una successione esatta di gruppi abeliani finitamente generati allora

$$\operatorname{rank} A_1 - \operatorname{rank} A_2 + \cdots + (-1)^{r+1} \operatorname{rank} A_r = 0$$

<u>dimostrazione</u> : per induzione su r. Se $r=1,2$ e' banale.
Per $r=3$: siano $\overline{A}_i$ $i=1,2,3$ i quozienti di A_i per i loro sottogruppi di torsione.
Allora si induce una successione di gruppi liberi abeliani

$$0 \to \overline{A}_1 \xrightarrow{\overline{i}_1} \overline{A}_2 \xrightarrow{\overline{i}_2} \overline{A}_3 \to 0$$

che <u>non e'</u> in generale esatta, pero'

<u>Sottolemma</u> $\overline{i}_1$ e' un monomorfismo
$\overline{i}_2$ e' un epimorfismo
$\ker \overline{i}_2 / \operatorname{im} \overline{i}_1$ e' di torsione

lasciamo il sottolemma come esercizio
Osserviamo che ad esempio per

$$0 \to 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$
$$\downarrow$$
$$0 \to 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0 \quad \text{non e' esatta}$$

Dal sottolemma abbiamo

$$\operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} \ker \overline{i}_2$$

e la successione

$$0 \to \ker \overline{i}_2 \to \overline{A}_2 \to \overline{A}_3 \to 0$$

e' esatta e si spezza $\Rightarrow$

$$\overline{A}_2 \cong \overline{A}_3 \oplus \ker \overline{i}_2$$

$$\to \quad \operatorname{rank} \overline{A}_2 = \operatorname{rank} \overline{A}_3 + \operatorname{rank} \ker i_2 =$$
$$= \operatorname{rank} \overline{A}_3 + \operatorname{rank} \overline{A}_1$$

Dunque il lemma e' provato per $r=3$.
Per $r>3$ spezziamo la successione nelle 2 successioni

esatte

$$0 \to A_1 \to A_2 \to \operatorname{im} i_2 \to 0$$

$$0 \to \operatorname{im} i_2 \to A_3 \to \dots \to A_r \to 0$$

e siccome le 2 successioni hanno meno di r termini per induzione troviamo il risultato. $\boxtimes$

Corollario

Se Z si ottiene da Y incollando una n-cella cioè

$$Z = Y \cup_f D^n$$

$$\Rightarrow \qquad \chi(Z) = \chi(Y) + (-1)^n$$

Dimostrazione Per escissione $H_q(Z, Y) \cong H_q(D^n, S^{n-1})$ e quindi per il lemma dobbiamo solo calcolare $\chi(D^n, S^{n-1})$, ma usando di nuovo il lemma

$$\chi(D^n, S^{n-1}) = -\chi(S^{n-1}) + \chi(D^n)$$
$$= -(1 + (-1)^{n-1}) + 1 = (-1)^n . \quad \boxtimes$$

Corollario

Se X è un CW complesso ottenuto da α_0 punti incollando α_q q-celle $\Rightarrow$

$$\chi(X) = \sum (-1)^q \alpha_q$$

In particolare se X è triangolato e ha α_q simplessi di dimensione q troviamo

$$\chi(X) = \sum (-1)^q (\# \, q\text{-simplessi})$$

Osservazione

Sia P un poliedro regolare (in particolare un tetraedro). Dividendo le facce in triangoli otteniamo una triangolazione della sfera e il corollario da

$$2 = \chi(S^2) = V - E + F \qquad \text{formula di Eulero}$$

con V numero di vertici, E di lati e F di facce

Osservazione se R è un PID (dominio di integrità a ideali principali) i risultati sui gruppi abeliani si generalizzano.

Possiamo allora generalizzare i risultati visti a

$$\chi(X, R) = \sum_q (-1)^q \operatorname{rank} H_q(X, R)$$

La caratteristica di Eulero è un invariante molto potente che ha molte applicazioni al di fuori della topologia. Ad esempio:

(1) Abbiamo visto che sfere di dimensione dispari ammettono campi vettoriali mai nulli.
In questo caso delle sfere dispari $\chi(S^{2n+1}) = 0$.
In generale vale il
Teorema di Poincaré-Hopf
X varietà connessa compatta
Esistono campi che non si annullano su $X \iff \chi(X) = 0$.

(2) Una forma più generale di caratteristica di Eulero ha un ruolo chiave nel teorema di Riemann-Roch per una varietà algebrica proiettiva.