I Esonero di Matematica Discreta - a.a. 06/07

Versione A

1. **a.** Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{\text{numeri naturali pari}\}$.
Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap \mathcal{C}_{\mathbf{N}}(A)$, $\mathcal{C}_{\mathbf{N}}(A \cap B)$, $\mathcal{P}(A \cap B)$, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

b. Data la famiglia di insiemi $E_k = \{k^n \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$, con $k \in \mathbf{N}$, determinare l'unione di tale famiglia. È vero che i sottoinsiemi E_k formano una partizione di $\mathbf{N}$?

2. Sia $f\colon \mathbf{Z} \to 2\mathbf{Z}$, la funzione data da $f(n) = 3n + 2$ se n è pari e da $f(n) = n - 1$ se n è dispari ($2\mathbf{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi pari).

a. Dire (motivando la risposta) se f è iniettiva e/o suriettiva.

b. Determinare $f^{-1}(6)$ e $f^{-1}(-4)$.

c. Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$, dove $g\colon 2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ è l'applicazione $g(x) = x + 1$.

d. Provare, esibendo degli esempi espliciti, che esistono almeno due differenti funzioni $h\colon \mathbf{Z} \to 2\mathbf{Z}$ tali che $h \circ g = \mathrm{id}_{2\mathbf{Z}}$, dove g è la funzione del punto precedente.

3. Sia $\sim$ la relazione in $\mathbf{R}$ data da: $x \sim y$ se e solo se $|x| - |y| \in 3\mathbf{Z}$ (dove $|x|$ indica il valore assoluto del numero reale x e $3\mathbf{Z}$ indica l'insieme dei multipli interi di 3).

a. Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

b. Determinare esplicitamente le classi di equivalenza $[0]$ e $\left[\frac{1}{2}\right]$.

c. Provare che ogni classe di equivalenza ha un rappresentante appartenente all'intervallo chiuso $[-3, 3]$. Tale rappresentante è unico?

d. Dire se sono ben definite le seguenti operazioni nell'insieme quoziente $\mathbf{R}/_{\sim}$:

i) $[a] * [b] = [a + b]$, **ii)** $[a] \oplus [b] = [\,|a| + |b|\,]$, **iii)** $[a] \circ [b] = [\,|a| \cdot |b|\,]$

(dove $[x]$ indica la classe di equivalenza di $x \in \mathbf{R}$).

e. Sia $P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ l'insieme dei numeri primi. Provare che P dotato della relazione d'ordine $\leq$ (l'usuale ordine per grandezza tra numeri) risulta bene ordinato.

4. Dimostrare mediante induzione che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale la seguente diseguaglianza: $n! > 2^{n-2}$.

5. Un noto bar–pasticceria di Torino è famoso per la sua produzione di praline che consiste in 25 tipi diversi di cioccolatini.

a. Nella pasticceria sono in vendita le confezioni assaggio Golden Box che contengono 12 cioccolatini tutti tra loro diversi. Quante sono in totale le diverse confezioni Golden Box che la pasticceria può mettere in vendita?

b. Nella vetrina della pasticceria sono esposti su di un ripiano, uno di fianco all'altro, tutti i tipi di cioccolatini ciascuno con una targhetta indicante il nome e i relativi ingredienti. In quanti modi si può esporre la produzione di praline?

c. Ogni cliente che fa una consumazione al bar ha diritto ad un cioccolatino in omaggio. In quanti modi distinti possono scegliere le praline omaggio 3 avventori seduti ad un tavolino del bar? E in quanti modi se i 3 clienti decidono di scegliere ognuno un cioccolatino diverso?

Svolgimento

Esercizio 1

Punto a.

Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{N}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad B = \{\text{numeri naturali pari}\}$$

risulta

$$\begin{aligned}
&A \cup B = B \cup \{1, 3, 5\}\\
&A \cap B = \{2, 4, 6\}\\
&B \cap \mathcal{C}_{\mathbf{N}}(A) = B \setminus (A \cap B) = \{n \in B \mid n = 0 \text{ oppure } n \geq 8\}\\
&\mathcal{C}_{\mathbf{N}}(A \cap B) = \mathbf{N} \setminus (A \cap B) = \mathbf{N} \setminus \{2, 4, 6\}
\end{aligned}$$

quindi

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \Big\{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\Big\}$$

inoltre

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

poiché $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ se e solo se X è contemporaneamente sottoinsieme di A e sottoinsieme di B, allora $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ se e solo se X è un sottoinsieme di A che contiene solamente numeri naturali pari, ossia se e solo se X è un sottoinsieme di $A \cap B$.

Punto b.

È data la famiglia di insiemi $E_k = \{k^n \mid n \in \mathbf{N},\, n \geq 1\}$, con $k \in \mathbf{N}$, dunque per ogni numero naturale k l'insieme E_k contiene tutte le potenze di k ad esponente intero positivo. Bisogna determinare l'unione di tale famiglia.

Poiché ogni E_k è sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N}$, risulta ovviamente che

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k \subseteq \mathbf{N}.$$

D'altra parte, per ogni $m \in \mathbf{N}$ risulta $m \in E_m$, per cui si ha anche l'inclusione opposta

$$\mathbf{N} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k,$$

e pertanto

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k = \mathbf{N}.$$

Non è vero che i sottoinsiemi E_k formano una partizione di $\mathbf{N}$, infatti, sebbene ognuno di essi sia non vuoto e l'unione di tutti gli E_k sia uguale ad $\mathbf{N}$, non è verificata la condizione che i sottoinsiemi siano a due a due disgiunti, si considerino ad esempio i sottoinsiemi $E_2 = \{2^n \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$ ed $E_4 = \{4^n \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$ per i quali risulta

$$E_2 \cap E_4 = E_4 \neq \emptyset.$$

Esercizio 2

Sia $f\colon \mathbf{Z} \to 2\mathbf{Z}$ l'applicazione definita come

$$f(n) = \begin{cases} 3n+2 & \text{se} \quad n \in 2\mathbf{Z} \\ n-1 & \text{se} \quad n \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} \end{cases}$$

Punto a.

Iniettività: esistono $0, 3 \in \mathbf{Z}$, con $0 \neq 3$, tali che $f(0) = f(3)$, infatti $f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$ e $f(3) = 3 - 1 = 2$, pertanto f non è iniettiva.

Suriettività: per ogni $x \in 2\mathbf{Z}$ esiste $n = x + 1 \in \mathbf{Z}$, con n dispari, tale che $f(n) = n - 1 = (x+1) - 1 = x$, quindi risulta che

$$\forall\, x \in 2\mathbf{Z} \quad \exists\, n \in \mathbf{Z} \;\text{ tale che }\; f(n) = x$$

ossia f è suriettiva.

Punto b.

Per definizione $f^{-1}(6) = \{n \in \mathbf{Z} \mid f(n) = 6\}$, quindi

$$3n + 2 = 6 \quad \Rightarrow \quad 3n = 4 \quad \Rightarrow \quad n = 4/3 \quad \text{non accettabile}$$

$$n - 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad n = 7 \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} \quad \text{accettabile}$$

pertanto risulta

$$f^{-1}(6) = \{7\}.$$

Per definizione $f^{-1}(-4) = \{n \in \mathbf{Z} \mid f(n) = -4\}$, quindi

$$3n + 2 = -4 \quad \Rightarrow \quad 3n = -6 \quad \Rightarrow \quad n = -2 \in 2\mathbf{Z} \quad \text{accettabile}$$

$$n - 1 = -4 \quad \Rightarrow \quad n = -3 \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} \quad \text{accettabile}$$

pertanto risulta

$$f^{-1}(-4) = \{-2, -3\}.$$

Punto c.

È data la funzione $g\colon 2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita come $g(x) = x + 1$.

La funzione composta $f \circ g$ è una applicazione di dominio $2\mathbf{Z}$ e codominio $2\mathbf{Z}$. Risulta

$$x \in 2\mathbf{Z} \quad \mapsto \quad g(x) = x + 1 \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} \quad \mapsto \quad f(g(x)) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$$

pertanto

$$(f \circ g)(x) = x \quad \forall\, x \in 2\mathbf{Z},$$

ossia

$$f \circ g = \mathrm{id}_{2\mathbf{Z}}.$$

La funzione composta $g \circ f$ è una applicazione di dominio $\mathbf{Z}$ e codominio $\mathbf{Z}$. Risulta che

$$\text{se } n \in 2\mathbf{Z} \quad \text{allora} \quad g(f(n)) = g(3n+2) = (3n+2) + 1 = 3n + 3$$

$$\text{se } n \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} \quad \text{allora} \quad g(f(n)) = g(n-1) = (n-1) + 1 = n$$

pertanto

$$(g \circ f)(n) = \begin{cases} 3n+3 & \text{se } \ n \in 2\mathbf{Z} \\ n & \text{se } \ n \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} \end{cases}$$

Punto d.
Si devono determinare due differenti funzioni $h\colon \mathbf{Z} \to 2\mathbf{Z}$ tali che $h \circ g = \mathrm{id}_{2\mathbf{Z}}$, dove $g\colon 2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ è la funzione data da $g(x) = x + 1$ per ogni $x \in 2\mathbf{Z}$.
Si noti che il codominio di h deve essere $2\mathbf{Z}$ e pertanto l'immagine di ogni $n \in \mathbf{Z}$ deve essere un numero pari.
Per quanto calcolato al punto precedente una applicazione che verifica le condizioni richieste è la funzione f, infatti f è una funzione di dominio $\mathbf{Z}$ e codominio $2\mathbf{Z}$ ed inoltre risulta $f \circ g = \mathrm{id}_{2\mathbf{Z}}$.
Un'altra funzione che verifica le condizioni richieste è la seguente

$$h(n) = \begin{cases} n & \text{se } \ n \in 2\mathbf{Z} \\ n-1 & \text{se } \ n \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} \end{cases}$$

infatti per ogni $x \in 2\mathbf{Z}$ risulta $x + 1$ dispari, e quindi

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x+1) = (x+1) - 1 = x$$

ossia

$$h \circ g = \mathrm{id}_{2\mathbf{Z}}.$$

Altre funzioni che vanno bene allo scopo sono date da $h_a\colon \mathbf{Z} \to 2\mathbf{Z}$

$$h_a(n) = \begin{cases} a & \text{se } \ n \in 2\mathbf{Z} \\ n-1 & \text{se } \ n \in \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z} \end{cases}$$

dove a è un numero intero pari fissato.

Esercizio 3

Nell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali è data la seguente relazione: $x \sim y \ \Leftrightarrow \ |x| - |y| \in 3\mathbf{Z}$ (dove $|x|$ indica il valore assoluto del numero reale x e $3\mathbf{Z}$ indica l'insieme dei multipli interi di 3).

Punto a.
- Proprietà riflessiva: $\forall\, x \in \mathbf{R}$ risulta $|x| - |x| = 0 \in 3\mathbf{Z}$, quindi $x \sim x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
- Proprietà simmetrica: $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$ tali che $x \sim y$ allora si ha $|x| - |y| = 3k$ per un certo $k \in \mathbf{Z}$, pertanto risulta $|y| - |x| = 3(-k)$ con $-k \in \mathbf{Z}$, quindi $y \sim x$.
- Proprietà transitiva: $\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}$ tali che $x \sim y$ e $y \sim z$, allora esistono $k, h \in \mathbf{Z}$ tali che $|x| - |y| = 3k$ e $|y| - |z| = 3h$, da cui segue che $|x| - |z| = \big(|x| - |y|\big) + \big(|y| - |z|\big) = 3k + 3h = 3(k + h)$ con $k + h \in \mathbf{Z}$, e quindi $x \sim z$.

$\sim$ è pertanto una relazione di equivalenza in $\mathbf{R}$.

Punto b.
Per definizione di classe di equivalenza risulta

$$[0] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \sim 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \in 3\mathbf{Z}\} = 3\mathbf{Z}$$

pertanto la classe di equivalenza di 0 rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ contiene tutti e soli i multipli interi di 3. D'altra parte

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x \sim \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbf{R} \mid |x| - \frac{1}{2} \in 3\mathbf{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbf{R} \mid |x| = 3n + \frac{1}{2} \text{ con } n \in \mathbf{Z}\right\}$$

ora, poiché per definizione di valore assoluto risulta $|x| \geq 0$ per ogni numero reale x, si deve avere $3n + \frac{1}{2} \geq 0$ (con $n \in \mathbf{Z}$), e ciò si verifica se e solo se $n \geq 0$, pertanto

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = 3n + \frac{1}{2} \text{ con } n \in \mathbf{N}\right\} \cup \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = -3n - \frac{1}{2} \text{ con } n \in \mathbf{N}\right\}.$$

Punto c.
Per prima cosa si osservi che per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta $|x| = |-x|$, per cui ogni numero reale x è in relazione $\sim$ con il suo opposto $-x$, e pertanto si ha $[x] = [-x]$ come classe di equivalenza. Dunque per provare che ogni classe di equivalenza $[x]$ ha un rappresentante che appartiene all'intervallo chiuso $[-3, 3]$ si può supporre $x \geq 0$. Fissato pertanto un numero reale $x \geq 0$ sia

$$m = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \in \mathbf{N} \qquad \left(\text{dove } \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \text{ denota la parte intera di } \frac{x}{3}\right)$$

e si ponga quindi

$$z = x - 3m \in \mathbf{R}.$$

Per le propietà relative alla parte intera dei numeri reali si ha

$$m \leq \frac{x}{3} < m + 1$$

da cui

$$3m \leq x < 3m + 3$$

e dunque

$$0 \leq z = x - 3m < 3$$

pertanto $z \in [-3, 3]$ ed inoltre $x \sim z$, infatti, tenendo conto che risulta $|x| = x$ per ipotesi e $|z| = z$ per costruzione, si ha

$$|x| - |z| = x - z = x - (x - 3m) = 3m \in 3\mathbf{Z}.$$

Si è quindi verificato che ogni classe di equivalenza rispetto a $\sim$ ha un rappresentante appartenente all'intervallo chiuso $[-3, 3]$.
Tale rappresentante non è unico. Infatti la dimostrazione precedente mostra che ogni classe di equivalenza ha un rappresentante z che appartiene all'intervallo semichiuso $[0, 3)$, ma per l'osservazione iniziale anche il numero reale $-z$, che appartiene all'intervallo $(-3, 0]$, rappresenta la stessa classe di equivalenza. Pertanto ogni classe di equivalenza contiene almeno due rappresentanti appartenti all'intervallo chiuso $[-3, 3]$.

Punto d.
Nell'insieme quoziente $\mathbf{R}/_\sim$ sono date le seguenti operazioni:
i) Per ogni $[a], [b] \in \mathbf{R}/_\sim$

$$[a] * [b] = [a + b]$$

Prese le classi di equivalenza $[0] = [3]$ e $[1] = [-1]$ risulta

$$[0] * [1] = [1] \qquad \text{e} \qquad [3] * [-1] = [2]$$

ma $[1] \neq [2]$ poiché $2 - 1 = 1 \notin 3\mathbf{Z}$. Pertanto il risultato dell'operazione dipende dai rappresentanti scelti per le classi di equivalenza, ossia l'operazione $*$ non è ben definita.

ii) Per ogni $[a], [b] \in \mathbf{R}/_\sim$

$$[a] \oplus [b] = [\ |a| + |b|\ ]$$

In questo caso l'operazione risulta ben definita. Sia infatti $[a] = [c]$ e $[b] = [d]$ nel quoziente $\mathbf{R}/_\sim$. Allora per definizione della relazione $\sim$ risulta

$$|a| - |c| \in 3\mathbf{Z} \quad \text{e} \quad |b| - |d| \in 3\mathbf{Z}$$

ossia

$$\exists\, h, k \in \mathbf{Z} \quad \text{tali che} \quad |a| = |c| + 3h \quad \text{e} \quad |b| = |d| + 3k$$

quindi sommando membro a membro si ottiene

$$|a| + |b| = \Big(|c| + 3h\Big) + \Big(|d| + 3k\Big) = |c| + |d| + 3(h + k) \quad \text{con } h + k \in \mathbf{Z}$$

ovvero, tenendo conto che il valore assoluto di un numero reale è per definizione una quantità non negativa, si ricava

$$\Big||a| + |b|\Big| - \Big||c| + |d|\Big| = \Big(|a| + |b|\Big) - \Big(|c| + |d|\Big) \in 3\mathbf{Z}$$

ossia

$$[\ |a| + |b|\ ] = [\ |c| + |d|\ ]$$

o equivalentemente

$$[a] \oplus [b] = [c] \oplus [d].$$

Pertanto il risultato dell'operazione non dipende dai rappresentanti scelti per le classi di equivalenza, ossia l'operazione $\oplus$ è ben definita.

iii) Per ogni $[a], [b] \in \mathbf{R}/_\sim$

$$[a] \circ [b] = [\ |a| \cdot |b|\ ]$$

Prese le classi di equivalenza $[0] = [3]$ e $\left[-\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right]$ risulta

$$[0] \circ \left[-\tfrac{1}{2}\right] = [0] \qquad \text{e} \qquad [3] \circ \left[\tfrac{1}{2}\right] = \left[\tfrac{3}{2}\right]$$

ma $[0] \neq [\frac{3}{2}]$ poiché $\frac{3}{2} \notin 3\mathbf{Z}$. Pertanto il risultato dell'operazione dipende dai rappresentanti scelti per le classi di equivalenza, ossia l'operazione $\circ$ non è ben definita.

Punto e.

Un insieme dotato di una relazione d'ordine si dice bene ordinato, o che la relazione è un buon ordine, se ogni suo sottoinsieme ammette minimo rispetto a tale ordine.

Si deve considerare l'insieme $P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ dei numeri primi dotato della relazione d'ordine $\leq$ (l'usuale ordine per grandezza tra numeri). Ora P è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N}$ e la relazione d'ordine che si sta considerando in P è la relazione d'ordine per grandezza tra numeri definita in $\mathbf{N}$ ristretta al sottoinsieme P. Poiché ogni sottoinsieme di P è anche sottoinsieme di $\mathbf{N}$, ed inoltre $\mathbf{N}$ è bene ordinato dalla relazione

$\leq$, ossia ogni sottoinsieme di $\mathbf{N}$ ammette minimo rispetto all'ordine $\leq$, ne segue che ogni sottoinsieme di P ha minimo rispetto all'ordine $\leq$, ossia P risulta essere bene ordinato rispetto all'ordine $\leq$.

Esercizio 4

Si deve dimostrare mediante induzione che vale la diseguaglianza

$$n! > 2^{n-2}$$

per ogni numero naturale $n \geq 1$.
Base dell'induzione: $n = 1$

$$1! = 1 > \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

quindi la diseguaglianza è vera per $n = 1$.
Passo induttivo: supponiamo vera la diseguaglianza per un qualche $n \geq 1$ e verifichiamo che ne consegue la validità della diseguaglianza per $n + 1$. Si ha

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= (n+1) \cdot n! && \text{per definizione di fattoriale} \\
&> (n+1) \cdot 2^{n-2} && \text{per ipotesi induttiva} \\
&\geq 2 \cdot 2^{n-2} && \text{poiché} \quad n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad n+1 \geq 2 \\
&= 2^{n-1}
\end{aligned}$$

ossia si è ottenuta la diseguaglianza cercata $(n+1)! > 2^{(n+1)-2}$.
Dunque per induzione la formula è valida per ogni naturale $n \geq 1$.

Esercizio 5

Un bar–pasticceria di Torino ha una produzione di 25 tipi diversi di cioccolatini.

Punto a.

Nella pasticceria sono in vendita le confezioni assaggio Golden Box che contengono 12 cioccolatini tutti tra loro diversi. Poiché non è specificato come siano fatte in concreto le confezioni Golden Box, ciò che distingue due confezioni sono i diversi tipi di praline che sono contenuti nelle singole Golden Box. Si tratta quindi di contare quanti sottoinsiemi distinti contenenti 12 elementi possiede un insieme contenente 25 elementi, pertanto il numero totale di confezioni Golden Box che la pasticceria può mettere in vendita è dato dal numero di combinazioni semplici di 25 elementi presi a 12 a 12, ossia

$$C_{25,12} = \binom{25}{12} = \frac{25!}{12!\,13!}$$

Punto b.

Si deve determinare in quanti modi si può esporre la produzione di praline su di un ripiano della vetrina del bar–pasticceria, mettendo un cioccolatino di fianco all'altro. Il numero totale è dato dal numero di permutazioni di 25 elementi, ossia

$$P_{25} = 25!$$

Punto c.
Nel primo caso i 3 avventori possono scegliere i cioccolatini omaggio senza nessuna restrizione, si tratta quindi in totale del numero di disposizioni con ripetizione di 25 elementi a 3 a 3, ossia

$$D^r_{25,3} = 25^3$$

Nel secondo caso ogni avventore sceglie un cioccolatino diverso, si tratta quindi in totale del numero di disposizioni semplici di 25 elementi a 3 a 3, ossia

$$D_{25,3} = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25 \cdot 24 \cdot 23$$