Esercizi di Ricapitolazione

Corso di Algebra 2

Dicembre 2008

1. In ciascuno dei casi seguenti si verifichi che l'operazione $\star$ sull'insieme $K \times H$ definisce una struttura di gruppo non isomorfa quella del gruppo prodotto (dove l'operazione è il prodotto componente per componente):

1. $K = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}_2$, $(r, \bar{m}) \star (s, \bar{n}) = (r + (-1)^m s, \bar{m} + \bar{n})$.
2. $K = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}^\times$, $(w, r) \star (z, s) = (w + rz, rs)$.
3. $K = \mathbb{Z}_7$, $H = \mathbb{Z}_6$, $(\bar{k}, \bar{h}) \star (\bar{k}', \bar{h}') = (\overline{k + 3^h k'}, \overline{h + h'})$.

2. Sia G un gruppo e sia $g \in G$ un elemento di ordine finito n. Dimostrare che per ogni divisore d di n esiste un elemento $h \in G$ di ordine d.

3. Di ciascuno dei seguenti gruppi G dire se è ciclico e in caso affermativo specificare un generatore.

1. $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$;
2. $G = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$;
3. $G = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$;
4. $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{21}$;
5. $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_8$;

4. Per ciascuno dei gruppi G seguenti calcolare il numero degli elementi di ordine d come specificato.

1. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, ordine 2, ordine 3;
2. $G = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$, ordine 3, ordine 5;
3. $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$, ordine 2, ordine 12;
4. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$, ordine 5, ordine 30;
5. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$; ordine 6. ordine 12.

5. Per ogni $n \geq 2$ sia $G_n = (\mathbb{Z}_n)^\times$ il gruppo moltiplicativo delle classi resto modulo n. Per ciascuno dei seguenti valori di n dire se G_n è ciclico ed in caso affermativo esibire un generatore:

$$n = 5, \quad n = 8, \quad n = 10, \quad n = 12, \quad n = 16, \quad n = 17, \quad n = 21, \quad n = 24.$$

6. Sia G e siano x e y elementi di G di ordine finito m ed n rispettivamente. Sia r un intero tale che $\mathrm{MCD}(r, m) = \mathrm{MCD}(r, n) = 1$ e supponiamo che gli elementi x^r e y^r commutino fra di loro. Allora si dimostri che x e y commutano fra di loro.

7. Per ciascuno dei seguenti valori di n determinare gli ordini possibili delle permutazioni in $\mathfrak{S}_n$:

$$n = 6, \qquad n = 7, \qquad n = 10.$$

8. Per ciascuno dei seguenti valori di n determinare il numero delle classi di coniugio in $\mathfrak{S}_n$:

$$n = 5, \qquad n = 6, \qquad n = 9.$$

9. Per ciascuna delle seguenti permutazioni π calcolare il numero delle permutazioni coniugate in $\mathfrak{S}_n$ e calcolare $|C_{\mathfrak{S}_n}(\pi)|$ (il valore di n è specificato di volta in volta)

1. $\pi = (1\ 5)(1\ 3)(5\ 4) \in \mathfrak{S}_5$;
2. $\pi = (3\ 5)(2\ 4)(2\ 3\ 6)(1\ 4\ 5)) \in \mathfrak{S}_6$;
3. $\pi = (1\ 4\ 6\ 7\ 5\ 3\ 2)(3\ 6\ 4)(1\ 5\ 7) \in \mathfrak{S}_7$.

10. In ciascuno dei casi seguenti calcolare il numero totale degli omomorfismi $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ e dire quanti di questi sono iniettivi e quanti sono suriettivi:

1. $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$;
2. $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$;
3. $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathfrak{S}_n$ con $n \geq 2$;
4. $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$;
5. $G = \mathbb{Z}_{10}$, $H = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$;
6. $G = \mathbb{Z}_{15}$, $H = \mathbb{Z}_{20}$;
7. $G = \mathbb{Z}_{10}$, $H = (\mathbb{Z}_{11})^{\times}$;
8. $G = \mathbb{Z}_9$, $H = (\mathbb{Z}_7)^{\times}$;
9. $G = \mathbb{Z}_2$, $H = \mathfrak{S}_n$ con $n \geq 2$;
10. $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \mathfrak{S}_8$;
11. $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, $H = \mathfrak{S}_8$;
12. $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $H = \mathfrak{S}_7$.

11. Sia G un gruppo e siano H, H' e K sottogruppi di G con $H' < H$. Dimostrare che se H' è normale in H allora $H' \cap K$ è normale in $H \cap K$.

12. Sia $L = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ un gruppo abeliano libero di rango 2 e consideriamo endomorfismi $\varphi : L \to L$ dove $\varphi(e_1) = f_1$ e $\varphi(e_2) = f_2$ verranno specificati di volta in volta. In ciascun caso dire se φ è iniettivo e/o suriettivo. Nel caso in cui φ non è iniettivo esibire esplicitamente un elemento non nullo nel nucleo. Nel caso in cui φ non è suriettivo esibire esplicitamente un elemento non nell'immagine.

1. $f_1 = 3e_1 - 2e_2,\ f_2 = -5e_1 + 3e_2;$
2. $f_1 = 7e_1 + 3e_2,\ f_2 = 4e_1 + e_2;$
3. $f_1 = 2e_1 + 4e_2,\ f_2 = 3e_1 + 6e_2.$

13. Sia $L = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3$ un gruppo abeliano libero di rango 3 e consideriamo endomorfismi $\varphi : L \to L$ dove $\varphi(e_1) = f_1$, $\varphi(e_2) = f_2$ e $\varphi(e_3) = f_3$verranno specificati di volta in volta. In ciascun caso dire se φ è iniettivo e/o suriettivo. Nel caso in cui φ non è iniettivo esibire esplicitamente un elemento non nullo nel nucleo. Nel caso in cui φ non è suriettivo esibire esplicitamente un elemento non nell'immagine.

1. $f_1 = 3e_1 - e_2 + e_3,\ f_2 = 2e_1 + 4e_2 + 3e_3,\ f_3 = e1 + e_2 + 2e_3;$
2. $f_1 = e_1 + e_2 + 4e_3,\ f_2 = 2e_1 + e_3,\ f_3 = -4e1 + 2e_2 + 5e_3;$
3. $f_1 = 2e_1 - 3e_2 + 2e_3,\ f_2 = 3e_1 + e_2 - e_3,\ f_3 = -5e_1 - e_2 + e_3.$

14. Sia $L = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3$ un gruppo abeliano libero di rango 3 e siano f_1 e f_2 due elementi di L che verranno specificati di volta in volta. In ciascun caso dire se possibile trovare un $f_3 \in L$ in modo che $\{f_1, f_2, f_3\}$ sia un sistema di generatori per L, ed in caso affermativo trovarne uno esplicito.

1. $f_1 = 2e_1 - e_2 + 2e_3,\ f_2 = e_1 + 2e_2 + 3e_3;$
2. $f_1 = 3e_1 + 4e_2 - 3e_3,\ f_2 = 5e_1 - 2e_2 + 3e_3;$
3. $f_1 = 2e_1 - 3e_2 + 7e_3,\ f_2 = 3e_1 + 4e_2 - 5e_3.$