

§3 : GRUPPI DI OMOLOGIA SINGOLARE

$\mathbb{R}^\infty$ = prodotto di un'infinità numerabile di copie di $\mathbb{R}$

$$E_0 = (0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$$

$$E_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$E_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

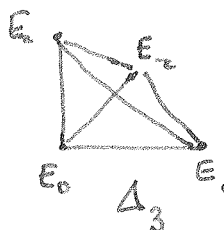
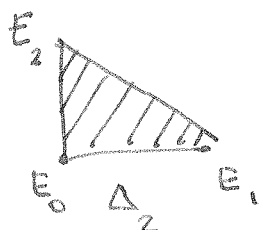
$$E_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$\left. \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix} \right\} \in \mathbb{R}^\infty$$

Allora $\mathbb{R}^n$ lo identifichiamo
al sottospazio di $\mathbb{R}^\infty$
generato da $E_0, E_1, \dots, E_n$

$$\forall q \geq 0 \quad \Delta_q = \left\{ \begin{array}{l} \text{simplexso geometrico} \\ q\text{-dimensionale} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{inviluppo convesso} \\ \text{dei punti } E_0, E_1, \dots, E_q \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^q \alpha_i \underline{e}_i \mid \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_i \leq 1 \\ \underline{e}_i = \overrightarrow{E_0 E_i} \end{array} \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^q \alpha_i E_i \mid \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_i \leq 1 \\ \sum \alpha_i = 1 \end{array} \right\}$$



$$\Delta_q \subseteq \mathbb{R}^q$$

Sia A^n uno SPAZIO AFFINE n -dimensionale

(cioè uno spazio con un'azione semplicemente transitiva di $\mathbb{R}^n$).

Di fatto A^n è $\mathbb{R}^n$ privato della struttura di gruppo che proviene dalla coordinatizzazione)

Siano $P_0, \dots, P_q \in A^n$.

Denotiamo $\langle P_0, \dots, P_q \rangle$ l'unica MAPPA AFFINE $\mathbb{R}^q \rightarrow A^n$

la cui immagine di E_i è P_i .

Denotiamo $\delta_q = \langle E_0, \dots, E_q \rangle$.

Nota: Dati: $P_0, P_1, \dots, P_q \in \mathbb{A}^n$ e coefficienti: $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{R}$
 con $\sum \alpha_i = 1$ resta definito

$$P = \sum \alpha_i P_i \in \mathbb{A}^n$$

come l'unico punto per cui $P - P_0 = \sum_{i=1}^q \alpha_i (P_i - P_0)$

(qui la differenza di due punti: $P - Q$ denota l'unico
 vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\vec{v} + Q = P$).

Una mappa affine $\mathbb{A}^m \xrightarrow{f} \mathbb{B}^n$ è una mappa per cui

$$f(tP + (1-t)Q) = tf(P) + (1-t)f(Q) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall P, Q \in \mathbb{A}^m.$$

Definizione: X spazio topologico. Un q -simplexso singolare in X
 è una mappa continua $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$.



Una q -catena singolare in X è

una combinazione lineare formale $\sum_{\sigma} v_{\sigma} \sigma$ (finita)

di q -simplexsi singolari dove i coefficienti v_{σ} possono essere

presi in un anello qualunque R . Tipicamente $R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, campo finito.

Date due q -catene $\sum v_{\sigma} \sigma$ e $\sum \mu_{\sigma} \sigma$ la loro somma

è la q -catena $\sum (v_{\sigma} + \mu_{\sigma}) \sigma$ e per ogni $v \in R$

$$v \left(\sum_{\sigma} v_{\sigma} \sigma \right) = \sum_{\sigma} (v v_{\sigma}) \sigma.$$

Con queste operazioni, l'insieme delle q -catene è un R -modulo.

Di fatti è l' R -modulo libero generato dai q -simplexsi.

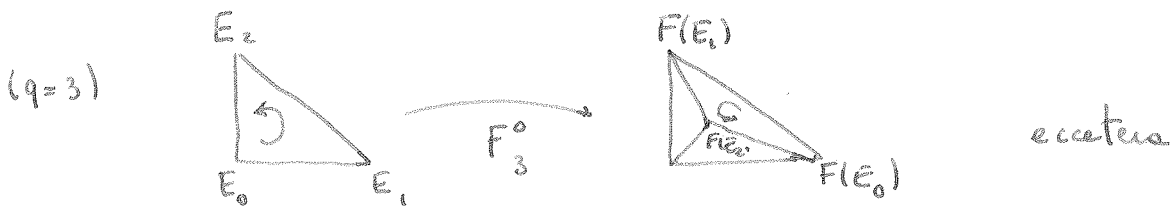
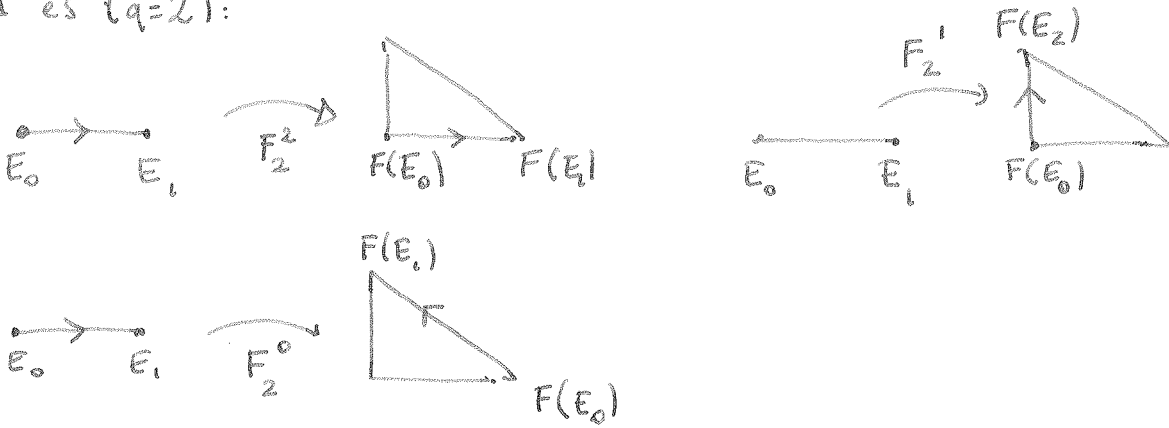
Lo denotiamo $S_q(X)$

Per ogni $q > 0$ si considerino le mappe affini

$$F_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q \quad F_q^i = \langle E_0, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_q \rangle \quad 0 \leq i \leq q$$

↑
omesso

Ad es ($q=2$):



DEFINIZIONE : Dato un q -simplexso sing $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$, si dice i -esima faccia di σ il $(q-1)$ -simplexso $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow X$ [quindi F_q^i è la i -esima faccia di δ_q].

DEFINIZIONE Dato un q -simplexso singolare $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ si dice

BORDO di σ la $(q-1)$ -catena sing. $\boxed{\partial\sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)}}$.

Esempio: ① Un 1-simplexso sing. in X è un cammino $\sigma : I \rightarrow X$.

$$\text{Allora } \partial\sigma = (\text{punto finale}) - (\text{punto iniziale})$$

(si osservi che questa scelta di segni è compatibile con il prodotto di cammini)

② Nel caso di un 2-simplexso la scelta dei segni



è t.c. si segua un coppia in $\sigma(E_0)$. Ciò nonostante,

$\partial\sigma$ NON È UN CAMMINO perché è una comb. lineare di 3 cammini distinti

Per linearità possiamo estendere la definizione di ∂ ad ogni catena:

$$\partial \left(\sum_{\sigma} \nu_{\sigma} \sigma \right) = \sum_{\sigma} \nu_{\sigma} \partial \sigma$$

In questo modo otteniamo una mappa R -lineare (OPERATORE DI BORDO)

$$\partial: S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$$

Per $q=0$ poniamo direttamente $\partial\sigma = 0$ per ogni $\sigma \in S_0(X)$

La vera ragione della scelta dei segni nella definizione di ∂ è che rende vera la seguente

PROPOSIZIONE: $\partial^2 = 0$

Lemma: $F_q^i F_{q-1}^j = F_q^j F_{q-1}^{i-1}$ se $j < i$

Dim: Basta calcolare l'effetto sui punti $E_0, \dots, E_{q-1}$:

$$\begin{aligned} F_q^i F_{q-1}^j &= \langle E_0 \dots \hat{E}_i \dots E_q \rangle \circ \langle E_0 \dots \hat{E}_j \dots E_{q-1} \rangle = \langle E_0 \dots E_{j-1} E_{j+1} \dots \hat{E}_i \dots E_q \rangle \\ &= \langle E_0 \dots \hat{E}_j \dots \hat{E}_i \dots E_q \rangle \end{aligned}$$

$$F_q^j F_{q-1}^{i-1} = \langle E_0 \dots \hat{E}_j \dots E_q \rangle \circ \langle E_0 \dots \hat{E}_{i-1} \dots E_{q-1} \rangle = \langle E_0 \dots \hat{E}_j \dots \hat{E}_{i-1} \dots E_q \rangle$$

OK

Dim (Prop) Basta vedere che $\partial\partial\sigma = 0$ per ogni q -simplexso $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$.

$$\text{Allora } \partial(\partial\sigma) = \partial \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial\sigma^{(i)} = \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial\sigma^{(i)} =$$

$$\sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (\sigma \circ F_q^i) \circ F_{q-1}^j =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j < i=1}^q (-1)^{i+j} \sigma_0 F_q^i F_{q-1}^{q-i-j} + \sum_{0=i \leq j}^{q-1} (-1)^{i+j} \sigma_0 (F_q^i F_{q-1}^j) = (\text{lemma}) \\
&= \sum_{j < i=1}^q (-1)^{i+j} \sigma_0 F_q^j F_{q-1}^{i-1} + \sum_{0=i \leq j}^{q-1} (-1)^{i+j} \sigma_0 (F_q^i F_{q-1}^j) \\
&\stackrel{j=l}{\underset{i-1=k}{=}} \sum_{0 \leq l \leq k}^{q-1} (-1)^{l+k+1} \sigma_0 F_q^l F_{q-1}^k + \sum_{0=i \leq j}^{q-1} (-1)^{i+j} \sigma_0 (F_q^i F_{q-1}^j) = 0.
\end{aligned}$$

qed

Def.ne: Una q -catena sing. $c \in S_q(X)$ t.c. $\partial c = 0$ si dice CICLO.

Una q -catena singolare $c \in S'_q(X)$ della forma $c = \partial c'$ con $c' \in S_{q+1}(X)$ si dice BORDO.

I cicli formano un R -sottomodulo di $S_q(X)$ denotato $Z_q(X)$
 I bordi " " R - " " $S_q(X)$ " $B_q(X)$.

Per la Proposizione, $B_q(X) \subseteq Z_q(X)$.

Diciamo che due catene c', c'' sono OMOLOGHE se la loro differenza è un bordo, cioè $c' - c'' \in B_q(X)$.

È una relazione di equivalenza!

Una q -CLASSE di omologia in X è la classe di equivalenza omologa di un ciclo. Allora le q -classi di omologia di X sono l' R -modulo

$$H_q^q(X) = \frac{Z_q^q(X)}{B_q^q(X)}$$

Esempi:

1) Un cammino in X è un 1-simplesso, ma è un ciclo solo se è chiuso.

2) $X = \{x\}$.

Per ogni $q \geq 0$ l'unico q -simplesso è la mappa costante $\Delta_q \rightarrow \{x\}$.

$$S_1 \text{ ha } \partial \sigma_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_{q-1} = \begin{cases} \sigma_{q-1} & q \text{ pari} \\ 0 & q \text{ dispari} \end{cases} \quad q \neq 0$$

$$\text{cioè } Z_q(X) = \begin{cases} R & q=0, q \text{ dispari} \\ 0 & q \text{ pari} > 0 \end{cases} \quad e \quad B_q(X) = \begin{cases} R & q \text{ dispari} \\ 0 & q \text{ pari} \end{cases}$$

Dunque $H_0(X) = R$ e $H_q(X) = (0)$ se $q \geq 1$.

3) Supponiamo $X = \bigcup X_i$ come unione di componenti connesse per archi. Allora ogni q -simplesso $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ è un simplesso in uno dei X_i .

Conseguentemente, ogni catena $c \in S_q(X)$ si scompone unicamente

$$\text{come } c = \sum_i c_i \text{ con } c_i \in S_q(X_i)$$

Inoltre si ha subito che $c_i \in Z_q(X_i) \setminus B_q(X_i)$ se e soltanto

se ogni $c_i \in Z_q(X_i) \setminus B_q(X_i)$

$$\text{Ne segue che } H_q(X) = \bigoplus_i H_q(X_i).$$

4) Supponiamo ora X connesso per archi.

Vogliamo vedere che $H_0(X) \cong R$.

Siccome il bordo è nullo per ogni 0-simplesso, si ha

$Z_0(x) = S_0(x)$. Definiamo una mappa

$$F: Z_0(x) \longrightarrow R$$

Ponendo $F(\sum_p v_p P) = \sum_p v_p$. F è un omomorfismo di gruppi.

Dunque $Z_0(x)/\text{Ker } F \cong R$ dove $\text{Ker}(F) = \{ \sum_p v_p P / \sum_p v_p = 0 \}$.

Supponiamo $c \in B_0(x)$. Dunque $\exists c' \in S_1(x)$ t.c. $\partial c' = c$.

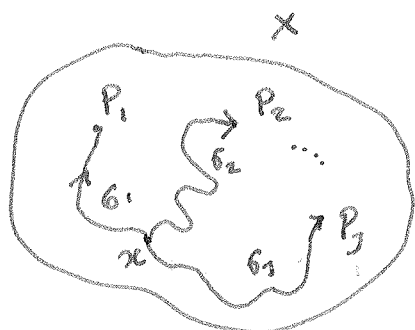
Sic. ha $c' = \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} \sigma$ dove $\sigma: \Delta_1 \rightarrow X$ sono degli 1-simplessi.

Per definizione

$$\begin{aligned} \partial c' &= \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} \partial \sigma = \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} (\sigma(1) - \sigma(0)) = \\ &= \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} (\sigma(1)) + \sum_{\sigma} -\lambda_{\sigma} (\sigma(0)). \end{aligned}$$

Dunque $F(\partial c') = F(c) = \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} + \sum_{\sigma} -\lambda_{\sigma} = 0$, cioè $B_0(x) \subseteq \text{Ker}(F)$.

Sia ora $c = \sum_j v_j P_j \in \text{Ker}(F)$ ($\sum_j v_j = 0$).



Scegliamo $x \in X$ e $\forall j$ sia $\sigma_j: \Delta_1 \rightarrow X$ un cammino con

$$\sigma_j(0) = x, \quad \sigma_j(1) = P_j.$$

Poniamo $c' = \sum_j v_j \sigma_j$. Allora

$$\partial c' = \sum_j v_j \partial \sigma_j = \sum_j v_j (P_j - x) = \sum_j v_j P_j - \sum_j v_j x = c.$$

Dunque $B_0(x) = \text{Ker } F$ e $H_0(x) \cong R$.

Supponiamo $f: X \rightarrow Y$ continua.

Componendo con f si ottiene una mappa $S_q(X) \xrightarrow{f_*} S_q(Y)$
 $\sigma \mapsto f \circ \sigma$

Siccome $f_*(\sigma^{(i)}) = f \circ \sigma \circ F_q^i = (f \circ \sigma) F_q^i = (f_* \sigma)^{(i)}$ si

ha anche $\partial f_*(\sigma) = f_* \partial \sigma$ e quindi f_* si restringe

a mappe $f_*: Z_q(X) \rightarrow Z_q(Y)$ e $f_*: B_q(X) \rightarrow B_q(Y)$.

Dunque si ha una mappa

$$f_*: H_q(X) \rightarrow H_q(Y) \quad \forall q \geq 0$$

È facile controllare che $\begin{cases} id_* = 1_{H_q} \\ (fg)_* = f_* g_* \end{cases}$ e quindi che

l'associazione $X \mapsto H_q(X)$ definisce un funtore (covariante)

da Top a R-mod (uno per ogni q !) e quindi in

particolare che $H_q(X)$ è un invariante per omeomorfismi.

— • —

NATURALITÀ

Siamo interessati a costruire mappe $P^X: S_q(X) \rightarrow S_q(X)$.

Questo può realizzarsi così: Siccome (brevemente) la

composizione $\Delta_q \xrightarrow{\delta_q} \Delta_q \xrightarrow{\sigma} X \xleftarrow{\epsilon} \sigma$, possiamo scrivere

$$\sigma = \sigma_* (\delta_q)$$

(62)

Def.ne: Dati complessi ~~di cat~~ $\{C_q, \delta_q\}$, $\{C'_q, \delta'_q\}$ una mappe di complessi è il dato di una mappa $f_q: C_q \rightarrow C'_q \forall q$

f.c.

$$\begin{array}{ccc} C_q & \xrightarrow{\delta_q} & C_{q-1} \\ \downarrow f_q & & \downarrow f_{q-1} \\ C'_q & \xrightarrow{\delta'_q} & C'_{q-1} \end{array} \quad \text{commute}$$

[ad es. le mappe $f_*: S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$ per $f: X \rightarrow Y$]

Def.ne: Si dice q -esimo modulo di ~~omologia~~ omologia del complesso $\underline{C} = \{C_q, \delta_q\}$ il modulo

$$H_q(\underline{C}) = \frac{\text{Ker } \delta_q}{\text{Im } \delta_{q+1}}$$

Ad una mappa di complessi $f: \{C_q, \delta_q\} \rightarrow \{C'_q, \delta'_q\}$ resta associata una mappa tra moduli di omologia

$$H(f): H_q(\underline{C}) \rightarrow H_q(\underline{C}')$$

Def.ne Dati complessi $\underline{C} = \{C_q, \delta_q\}$ e $\underline{C}' = \{C'_q, \delta'_q\}$ e mappe $f = \{f_q\}$ $g = \{g_q\}$ di complessi, un'omotopia (tra f e g) è una successione $D_q: C_q \rightarrow C'_{q+1}$ di morfismi tale che

$$\begin{array}{ccccc} C_{q+1} & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\delta_q} & C_{q-1} \\ \parallel & \swarrow D_q & \parallel & \swarrow D_{q-1} & \parallel \\ C'_{q+1} & \xrightarrow{\delta'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\delta'_q} & C'_{q-1} \end{array}$$

$$\delta'_{q+1} D_q + D_{q-1} \delta_q = f_q - g_q$$

(e scriviamo $f \sim g$).

Def.ne: ~~è una relazione di equivalenza~~

Dunque, assegnato il singolo valore $P^{\Delta_q}(\delta_q) \in S_q(\Delta_q)$

possiamo definire $P^X(\sigma) = \sigma_* (P^{\Delta_q}(\delta_q))$

Questa costruzione soddisfa la proprietà di naturalità:

Se $f: X \rightarrow Y$ allora

$$(*) : \begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{P^X} & S_q(X) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ S_q(Y) & \xrightarrow{P^Y} & S_q(Y) \end{array} \quad \text{commuta;} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_* P^X(\sigma) = \\ = f_* \sigma_* (P(\delta_q)) \\ = (f\sigma)_* P(\delta_q) \\ = P^Y(f\sigma) = P^Y(f_* \sigma) \end{array} \right.$$

Viceversa: se $P^X: S_q(X) \rightarrow S_q(X)$ definita per ogni X soddisfa (*),
allora tutti i P^X restano automaticamente definiti dall'unico
valore $P^{\Delta_q}(\delta_q)$

COMPLESSI e OMOLOGIA

Vogliamo ora astrarre dalla situazione geometrica di
simplessi per discutere la costruzione delle catene in modo
puramente geometrico

Def. ne: Un complesso è una successione di R -moduli $\overset{\text{liberi}}{C_q}$
e omomorfismi $\partial_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$ t.c. $\partial_{q-1} \partial_q = 0$

(cioè $\text{Im } \partial_q \subseteq \text{Ker } \partial_{q-1}$).

Nota: non è strettamente necessario, ma assumeremo (per analogia
con la situazione topologica) che $C_q = 0$ per $q < 0$.

PROPOSIZIONE: Se $f, g: \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$ sono mappe omotope di complessi, allora $H(f) = H(g)$

Dim Sia $\bar{z} \in H_q(\underline{C})$ rappresentato da $z \in \text{Ker } \partial_q$.

Allora $f_q(z) - g_q(z) = \underbrace{d_{q+1}^* D_q(z) + D_{q-1} \delta_q^*(z)}_{=0} = \delta_{q+1}^* D_q(z) \in \text{Im}(\delta_{q+1}^*)$

$\Rightarrow \overline{f_q(z)} = \overline{g_q(z)}$ in $H_q(C')$. qed.

Def: Un complesso $\underline{C} = \{C_q, \partial_q\}$ si dice ESATTO (o ACICLICO) se $\text{Ker } \partial_q = \text{Im } \partial_{q+1} \quad \forall q$ (cioè $H_q(\underline{C}) = (0) \quad \forall q$).

Un complesso $\underline{C} = \{C_q, \partial_q\}$ con $C_q = 0$ per $q < 0$ si dice AUGMENTATO se esiste un morfismo suriettivo $\varepsilon: C_0 \rightarrow R$ t.c. $\text{Im } \partial_1 \subseteq \text{Ker } \varepsilon$

$$\begin{array}{ccccc} C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \\ & & & \searrow & \uparrow \\ & & & \text{Im } \partial_1 & \text{Im } \partial_1 \end{array}$$

ESEMPIO:
 $\varepsilon: S_0(X) \rightarrow R$
 $\varepsilon(\sum x_i) = \sum x_i$

Dato un complesso aumentato $\underline{C} = \{C_q, \partial_q\}$ possiamo formare il complesso ridotto $\tilde{\underline{C}}$ sostituendo C_0 con $\tilde{C}_0 = \text{Ker } \varepsilon$

Def: Un complesso aumentato $\underline{C}$ si dice esatto (o aciclico) se il complesso ridotto $\tilde{\underline{C}}$ è esatto.

Questo succede esattamente quando $H_q(\underline{C}) = \begin{cases} 0 & \text{per } q > 0 \\ R & \text{per } q = 0 \end{cases}$

(ad es. il complesso delle catene dello sp-topologico $X = \{x\}$).

Data un'augmentazione $C_0 \xrightarrow{\varepsilon} R$ possiamo sempre trovare una mappa $\eta: R \rightarrow C_0$ t.c. $\varepsilon \eta = 1_R$. Basta scegliere $x \in C_0$ t.c. $\varepsilon(x) = 1$ e porre $\eta(1) = x$.

Tale inversa destra di ε non è evidentemente unica.

Definiamo ora una mappa di complessi: $\underline{C} \rightarrow \underline{C}$ come:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & C_3 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow \eta\varepsilon & & \\ \rightarrow & C_3 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

PROPOSIZIONE: Se $1 \sim \eta\varepsilon$ allora $\underline{C}$ è esatto.

Dim Supponiamo esista $D_q: C_q \rightarrow C_{q+1}$ t.c.

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow 1 & \nearrow D_1 \downarrow 1 & \nearrow D_0 \downarrow 1-\eta\varepsilon & & & & \\ \rightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \rightarrow & 0 \end{array} \quad \partial D_q + D_{q-1} \partial = 1 - \eta\varepsilon$$

$$\text{Se } q \geq 1, \eta\varepsilon = 0 \Rightarrow \partial D_q(c) + D_{q-1} \partial(c) = c$$

$$\text{Se } \partial c = 0 \Rightarrow c = \partial(Dc) \Rightarrow \text{Ker } \partial = \text{Im } \partial$$

$$\text{Se } q=0: \partial D_0(c) = c - \eta\varepsilon(c)$$

$$\text{Da questo segue che se } \varepsilon(c) = 0 \Rightarrow c = \partial(D_0 c)$$

$$\Rightarrow \text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1.$$

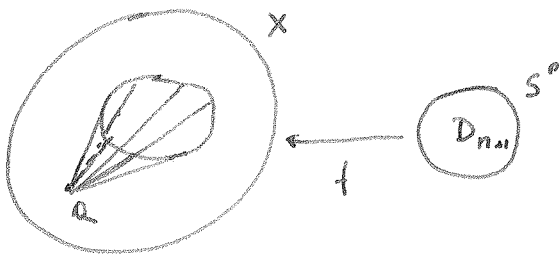
qed.

Vogliamo ora "reintrodurre la geometria" dando una condizione geometrica su X perché il complesso delle catene singolari sia esatto.

Def.: Uno spazio topologico X si dice ASFERICO se ogni mappa continua $f: S^n \rightarrow X$ si estende ad una mappa $\tilde{f}: D_{n+1} \rightarrow X$

Osservazioni:

- 1) Prendendo $n=0$ ($S^0 =$ coppia di punti) si vede che uno spazio asferico è connesso per archi
- 2) Ogni convesso $X \subset \mathbb{R}^n$ è asferico:



Si fissa $Q \in X$
e si rappresentano in punti di D_{n+1} in "coordinate polari":

$$D_{n+1} \ni p = (\underbrace{x}_{\in S^n}, \underbrace{t}_{\in \mathbb{R} \cap [0,1]})$$

Allora data $f: S^n \rightarrow X$ si

ponga $\tilde{f}: D_{n+1} \rightarrow X$ come $\tilde{f}(x, t) = \underbrace{tf(x) + (1-t)Q}_{\in X \forall t}!$

- 3) Ogni spazio contraibile X è asferico:

Se $X \times I \xrightarrow{\Phi} X$ è un'omotopia con $\Phi(x, 0) = x$, $\Phi(x, 1) = Q \in X$ (così, 1' contraibile).

e $f: S^n \rightarrow X$, poniamo $\tilde{f}: D_{n+1} \rightarrow X$, $\tilde{f}(x, t) = H(f(x), 1-t)$.

TEOREMA : Se X è asferico allora il complesso aumentato delle catene singolari in X è esatto.

Dim : Ricordiamo che l'aumentazione in questo caso è

$$\varepsilon \left(\sum_P v_P \cdot P \right) = \sum_P v_P.$$

Scegliamone un'inversa destra $\eta: R \rightarrow C_0$ (cioè: scegliamo un punto in X).

L'obiettivo è di costruire unomotopia $1 \simeq \eta \varepsilon$.

Osserviamo che $\forall q \geq 0$ la coppia $\partial \Delta_{q+1} \subset \Delta_{q+1}$ è omeomorfa alla coppia $S^q \subset D_{q+1}$ (chiaramente la proprietà di asfericità può riferirsi a spazi omeomorfi a S^n e D_{n+1}).

Quindi, siccome X è asferico, ogni mappa continua $\partial \Delta_{q+1} \rightarrow X$ si estende a una mappa continua $\Delta_{q+1} \rightarrow X$.

Vogliamo definire $D_q(\sigma) \in S_{q+1}(X)$ per ogni q -simplex σ e lo facciamo induttivamente su q , specificando quale

deve essere $D_q(\sigma)$ su $\partial \Delta_{q+1}$.

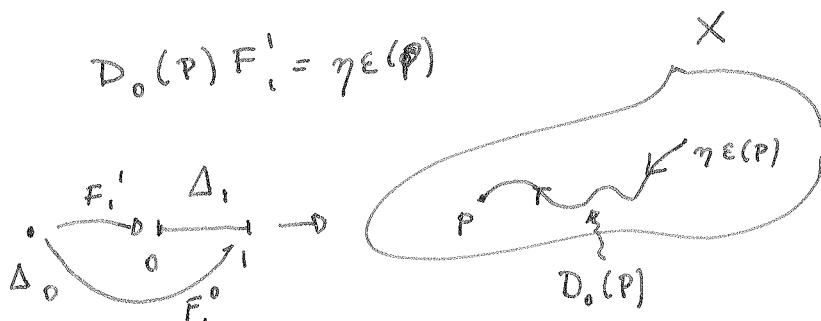
Procediamo

Possiamo fare in questo modo perché

$$\partial \Delta_{q+1} = \bigcup_{i=0}^{q+1} F_{q+1}^i(\Delta_q) \quad \left(\text{NOTA BENE: Unione non disgiunta!} \right)$$

Iniziamo prendendo $D_0(P)$ t.c.

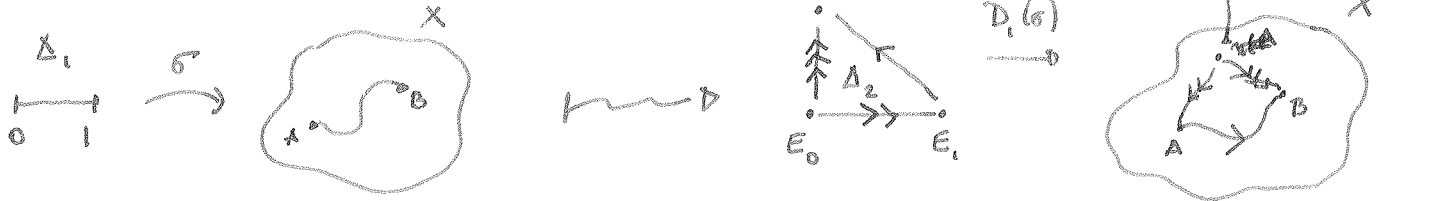
$$D_0(P) F_1^0 = \emptyset \quad D_0(P) F_1^1 = \eta \varepsilon(P)$$



e per ogni $q \geq 1$, $D_q(\sigma)$ è definita dalle condizioni

$$D_q(\sigma) F_{q+1}^0 = \sigma$$

$$D_q(\sigma) F_{q+1}^i = D_{q-1}(\sigma F_q^{i-1})$$



Bisogna controllare che le definizioni coincidono sulle intersezioni.

Un'intersezione di facce in $\partial \Delta_{q+1}$ è $F_{q+1}^j(\Delta_q) \cap F_{q+1}^i(\Delta_q)$ $j < i$

La legge di commutazione già usata delle facce F_{q+1}^i fornisce

un diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{q-1} & \xrightarrow{F_q^j} & \Delta_q \\ \int F_q^{i-1} & & \int F_{q+1}^i \\ \Delta_q & \xrightarrow{F_{q+1}^j} & \Delta_{q+1} \end{array} \Rightarrow F^j(\Delta_q) \cap F_{q+1}^i(\Delta_q) = F_{q+1}^i F_q^j(\Delta_{q-1}) = F_{q+1}^j F_q^{i-1}(\Delta_{q-1})$$

Ora si ha

$$D_q(\sigma) F_{q+1}^i F_q^j = D_{q-1}(\sigma F_q^{i-1}) F_q^j = \begin{cases} \sigma F_q^{i-1} & \text{se } j=0 \\ \eta E(\sigma F_q^{i-1}) & \text{se } q=1, j \neq 0 \\ D_{q-2}(\sigma F_q^{i-1} F_{q-1}^{j-1}) & \text{altri casi} \end{cases}$$

e

$$D_q(\sigma) F_{q+1}^j F_q^{i-1} = \begin{cases} \sigma F_q^{i-1} & \text{se } j=0 \\ \eta E(\sigma F_q^{j-1}) & \text{se } q=1, j \neq 0 \\ D_{q-2}(\sigma F_q^{j-1} F_{q-1}^{i-2}) & \text{altri casi} \end{cases}$$

le espressioni coincidono.

Resta da controllare che D_q definisce unomotopia.

$$\partial_1 D_0(\sigma) = D_0(\sigma) F_1^0 - D_0(\sigma) F_1^1 = (1 - \eta \epsilon)(\sigma)$$

$$\begin{aligned} \partial_{q+1} D_q(\sigma) + D_{q-1} \partial_q(\sigma) &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i D_q(\sigma) F_{q+1}^i + D_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma F_q^i \right) \\ &= \sigma + \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i D_{q-1}(\sigma F_q^{i-1}) + \sum_{i=0}^q (-1)^i D_{q-1}(\sigma F_q^i) = \sigma. \end{aligned}$$

queste $\sum$
si cancellano

QED

Il passo successivo è quello di dimostrare che i gruppi di omologia $H_n(X)$ sono invarianti per omotopia.

Dimostriamo il seguente

TEOREMA: Siano $f, g: X \rightarrow Y$ mappe omotope di spazi topologici

Allora le mappe $f_*, g_*: S(X) \rightarrow S(Y)$ sono omotope come mappe di complessi.

Da questo segue subito che:

1) Se $f, g: X \rightarrow Y$ sono omotope, allora $\forall q \geq 0$ le mappe in omologia $f_*, g_*: H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ sono uguali.

2) Se $f: X \rightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica, allora

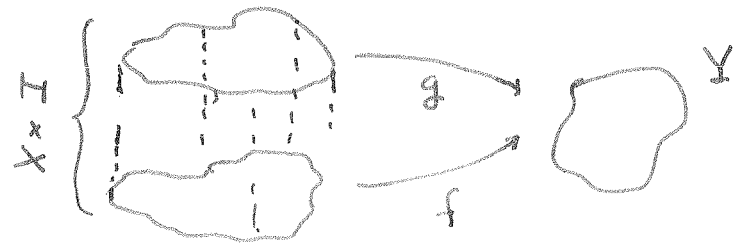
$f_*: H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ è un isomorfismo $\forall q \geq 0$.

In fatti se $fg \simeq 1_X \Rightarrow (fg)_* = f_* g_* = 1$ e

quindi f_* è un isomorfismo.

Dimostrazione (Teorema)

Sia $H: X \times I \rightarrow Y$ l'omotopia t.c. $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$.



Siano $i_0, i_1: X \rightarrow X \times I$
le immersioni

$$i_0(x) = (x, 0) \quad i_1(x) = (x, 1)$$

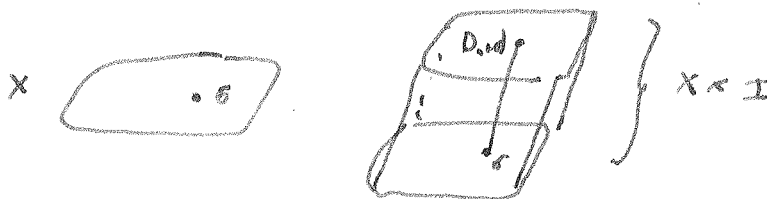
Basta dimostrare che $(i_0)_* (i_1)_*$ sono omotope come
mappe di complessi $S(X) \rightarrow S(X \times I)$. Infatti si
ha $f = H i_0$, $g = H i_1 \Rightarrow f_* = H_* (i_0)_*$, $g_* = H_* (i_1)_*$.

Costruiamo la mappa di omotopia $S_q(X) \rightarrow S_q(X \times I)$
induttivamente iniziando dalla dimensione $q=0$.

Si come $\Delta_1 = \Delta_0 \times I$ possiamo definire

$$D_0: S_0(X) \rightarrow S_1(X \times I)$$

$$\text{come } D_0(\sigma) = \sigma \times 1_1, \quad \Delta_1 = \Delta_0 \times I \xrightarrow{\sigma \times 1} X \times I$$



dove σ è uno 0-simplesso
in X (cioè: un punto).

È chiaro che allora $\partial_1 D_0 = (i_1)_* - (i_0)_*$ (v. pag. 38)

Osserviamo anche che D_0 soddisfa la proprietà
di naturalità (v. pag. 38): infatti se $h: X \rightarrow X'$

è una funzione continua, c'è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S_0(X) & \xrightarrow{D_0} & S_1(X \times I) \\ \downarrow h_* & & \downarrow (h \times 1)_* \\ S_0(X') & \xrightarrow{D_0} & S_1(X' \times I) \end{array}$$

Basta controllare su uno 0-simplesso σ :

$$\begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{\quad} & \sigma \times 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ h\sigma & \xrightarrow{\quad} & h\sigma \times 1 \end{array}$$

Possiamo allora supporre di aver costruito per ogni spazio X la mappa $D_j : S_j(X) \rightarrow S_{j+1}(X \times I) \quad \forall j \leq q-1$ tale che:

$$(a) \quad \partial_{j+1} D_j + D_{j-1} \partial_j = (i_1)_* - (i_0)_*$$

$$(b) \quad \forall h: X \rightarrow X' \quad D_j h_* = (h \times 1)_* D_j \quad (\text{naturalit\`a})$$

$$\begin{aligned} \text{Dunque} \quad \partial_q ((i_1)_{*,q} - (i_0)_{*,q}) &= ((i_1)_{*,q-1} - (i_0)_{*,q-1}) \partial_q \\ &= \partial_q D_{q-1} \partial \quad (\text{per la prop. (a) con } j=q-1), \text{ ovvero} \end{aligned}$$

$$(c) \quad \partial_q ((i_1)_{*,q} - (i_0)_{*,q} - D_{q-1} \partial_q) = 0 \quad \forall \text{ spazio } X$$

Applicando quest'ultima propriet\`a (c) al q -simplesso $\delta_q \in S_q(\Delta_q)$ otteniamo che

$$c_q = ((i_1)_* - (i_0)_* - D_{q-1} \partial_q)(\delta_q) \quad \text{\textit{e' un ciclo}}$$

Ma noi sappiamo che $S(\Delta_q \times I)$ \textit{e' un complesso esatto} (perch\`e $\Delta_q \times I$ \textit{e' asferico}) e dunque deve esistere $\omega \in S_{q+1}(\Delta_q \times I)$

$$\text{i.e.} \quad c_q = \partial_{q+1} \omega \quad \text{Poniamo} \quad D_q(\delta_q) = \omega$$

