Percorso di eccellenza del Corso di Laurea in Matematica
Anno accademico 2021/22

Nell'anno accademico corrente, per il percorso di eccellenza del Corso di Laurea in Matematica verranno proposte le attività di seguito descritte. Tali attività si svolgeranno solo in presenza, salvo indicazioni differenti da parte degli organi direttivi di Ateneo.

Primo anno

Sono proposti 5 minicorsi ed è richiesta la frequenza di almeno 4 di essi. Ogni minicorso è composto da tre incontri di due ore ciascuno. Il materiale didattico sarà reperibile sulla piattaforma moodle nel corso denominato "Eccellenza 1". Tutte le lezioni ed esercitazioni si terranno in aula S in orario 16:30-18:30

Minicorso: Somme di quadrati e generalizzazioni
Ambito disciplinare: Teoria dei numeri, algebra
Docente: Prof. Lea Terracini
Date: 1, 8, 9 marzo

Sommario: Questo minicorso ha come oggetto principale il teorema di Fermat che caratterizza i numeri interi che sono somma di quadrati. Si tratta di un risultato non banale particolarmente interessante in teoria dei numeri in quanto mette in relazione la struttura additiva e quella moltiplicativa dei numeri interi. Il teorema è suscettibile di diverse dimostrazioni, alcune delle quali utilizzano strumenti accessibili a studenti al primo anno della Laurea Triennale in Matematica: congruenze, forme quadratiche, interi di Gauss, conteggio dei punti interi in sottoinsiemi convessi del piano euclideo, serie di Farey.
Inoltre, l'enunciato si presta naturalmente a generalizzazioni in diverse direzioni, che aprono spiragli verso sviluppi più avanzati, per esempio i problemi di Waring, il principio locale-globale, la geometria diofantea e l'aritmetica dei campi di numeri.
Nella lezione introduttiva verrà introdotto il problema, illustrati i punti significativi da dimostrare e discusse alcune generalizzazioni dell'enunciato e delle idee che ne sono alla base.
In quell'occasione verranno assegnati agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, dei compiti: studio di dimostrazioni, approfondimenti e generalizzazioni di risultati presentati nella lezione introduttiva.
L'esposizione e la discussione del lavoro svolto dagli studenti saranno l'oggetto degli incontri successivi.

Bibliografia

- Hardy, Wright. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford. 1954 (Ch. XX, XXI)
- Sierpinski. Elementary Theory of Numbers. North Holland. 1985 (Ch. XI)

Minicorso: Ricorsione e Funzioni Generatrici: come imparare a contare in fretta
Ambito disciplinare: Algebra, matematica discreta
Docente: Prof. Ferdinando Arzarello
Date: 15, 22, 23 marzo

Sommario: Nella lezione introduttiva si presenteranno dapprima alcuni esempi di conteggi la cui soluzione richiede di risolvere delle relazioni di ricorrenza ottenendo la loro forma chiusa; si introdurranno brevemente le equazioni caratteristiche delle relazioni di ricorrenza lineari. Successivamente, si introdurrà, sempre a partire da esempi, la nozione di Funzione Generatrice come strumento che permette di risolvere intere classi di problemi di conteggio. Negli incontri successivi si daranno problemi combinatori vari da risolvere usando le funzioni generatrici in modo che le tecniche e le nozioni relative siano via via approfondite e ampliate: in particolare si introdurranno le convoluzioni e le F.G. esponenziali.

Bibliografia

- Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, *Concrete Mathematics*, Reading, (MA): Addison-Wesley, 1988. Capp. 1 e 7 (contiene una serie meravigliosa di esercizi graduati che potranno essere usati nel corso).

- Maurer, S.B., Ralston, A. Discrete Algorithmic Mathematics, Wellesley (MA): Peters ltd., 2005. Esiste la traduzione italiana, *Matematica Discreta*, Milano: Hoepli, 1992
- Wilf, H.S., Generatingfunctionology, Wellesley (MA): Academic Press, 2004. Una versione è liberamente scaricabile dal sito: https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html
- *Lezioni di Matematica Discreta* tenute da R. Dvornicich e G. Gaiffi nell'aa 2014-15 all'Università di Pisa. Raccolte da O. Papini. Liberamente scaricabili da: http://www.dm.unipi.it/~gaiffi/papers/matdiscr.pdf

Minicorso: Invarianti nella teoria dei nodi
Ambito disciplinare: Geometria, topologia algebrica
Docente: Prof. Alberto Albano
Date: 29 marzo, 5 e 6 aprile

Sommario: Nella lezione introduttiva verrà presentato il problema della classificazione dei nodi nello spazio euclideo tridimensionale. Verranno messi in luce gli aspetti essenziali di un problema di classificazione: trovare abbastanza esempi e dare una procedura per stabilire quando due esempi sono distinti.
Verrà presentata una storia del problema, dalle origini nella Fisica della seconda metà dell'Ottocento da parte di Lord Kelvin, lo studio dei matematici negli anni 1910-1930 e la grande rinascita a partire dal 1980 con l'introduzione di nuove tecniche, il rinnovato interesse da parte dei fisici e le interessanti applicazioni in biologia.
Nella lezione introduttiva si darà una panoramica delle congetture principali enunciate agli inizi della teoria e dei metodi adottati per affrontarle. Verranno definiti alcuni invarianti in grado di distinguere nodi diversi.
Negli incontri successivi si impareranno metodi per rappresentare i nodi in modo efficiente e quindi calcolare gli invarianti. Verranno testate le congetture e i teoremi visti nella lezione introduttiva e, sulla base dei calcoli fatti e degli esempi visti, si proverà a enunciare qualche nuova congettura.

Bibliografia

- Colin Adams, *The Knot Book*, W. H. Freeman and Company, 1994. Capp. 1, 2, 3, 6
- Alexei Sossinsky, *Nodi: genesi di una teoria matematica*, Bollati Boringhieri, 2000

Minicorso: Funzioni calcolabili
Ambito disciplinare: Logica matematica
Docente: Prof. Alessandro Andretta
Date: 27 aprile, 3 e 4 maggio

Sommario: Le funzioni calcolabili sono quelle funzioni dai naturali a valori nei naturali che possono essere calcolate da un computer. In questo minicorso vedremo come la famiglia delle funzioni calcolabili ammetta numerose caratterizzazioni equivalenti, ma apparentemente molto diverse. Nella prima lezione vedremo alcune classi di funzioni (elementari, primitive ricorsive, …) e verranno assegnati dei compiti: verificare che certe funzioni appartengono o meno ad una data classe. Nelle lezioni successive verranno introdotte altre nozioni (quali le macchine a registri) e verrà abbozzata la dimostrazione dell'equivalenza tra duedefinizioni di funzione calcolabile.

Bibliografia:

- N. Cutland. Computability: An Introduction to Recursive Function Theory. Cambridge Un. Press, 1980
- N.Vereshchagin & A. Shen. Computable Functions (Student Mathematical Library, Vol. 19)
- H. Rogers. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. MIT Press 1987
- P. Odifreddi. Classical Recursion Theory. North Holland, 1989

Minicorso: "Grandi matematici e funzioni sorprendenti"
Ambito disciplinare: Analisi matematica

Docente: Prof. Walter Dambrosio
Date: 10, 17 e 24 maggio

Sommario:
Lo scopo del minicorso è introdurre alcune funzioni di una variabile reale che presentano proprietà inaspettate, che sfuggono all'intuizione e alla normale visualizzazione grafica a cui siamo abituati.
In particolare, si studieranno la funzione di *Weierstrass* (funzione continua non derivabile in alcun punto), la funzione di *Volterra* (funzione derivabile con derivata limitata ma non integrabile secondo Riemann), la funzione di *Cantor* (funzione continua crescente, avente come immagine l'intervallo [0,1] ma con derivata nulla tranne che su un insieme di punti di lunghezza nulla) e la curva di *Peano* (funzione continua la cui immagine è un quadrato).
Strumento fondamentale per definire alcune di queste funzioni, e per dimostrarne le proprietà, è la nozione di serie di funzioni, che verrà introdotta nel primo incontro.
La metodologia didattica prevede un apprendimento di tipo cooperativo e collaborativo, attraverso lo svolgimento di attività di gruppo e l'utilizzo delle classi capovolte (flipped-classroom). Nell'ultimo incontro gli studenti presenteranno i risultati delle attività svolte.

Bibliografia:

- Serie di funzioni: C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 2* – Cap. 3, Par. 2
- Funzione di Weierstrass: https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/2019/Vesneske -Gordon.pdf; http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1022983/FULLTEXT01.pdf
- Funzione di Volterra: https://en.wikipedia.org/wiki/Volterra%27s_function
- Funzione di Cantor: https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/oleg_zaboronski/analysisiii/ cantor.pdf
- Curva di Peano: https://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/GP_4_0.pdf
- W. Rudin, *Principles of mathematical analysis* – Cap. 8, Es. 14

Secondo anno

Sono proposti 4 minicorsi. Ogni minicorso è composto da tre incontri di due ore ciascuno. Il materiale didattico sarà reperibile sulla piattaforma moodle nel corso denominato "Eccellenza 2". Tutte le lezioni ed esercitazioni (tranne quelle del 28 febbraio e del 7 marzo) si terranno in aula 2 in orario 16:30-18:30. La lezione del 28/2 e l'esercitazione del 7/3 si terranno alle 14:30-16:30 in aula 3 e 2, rispettivamente.

Minicorso: Problemi di minimo e introduzione al trasporto ottimale
Ambito disciplinare: Fisica Matematica
Docente: Prof. Claudia Chanu
Date: 28 febbraio, 7 e 15 marzo

Sommario: Nel primo incontro, partendo da alcuni classici principi di minimo della fisica matematica (principio di Fermat, di Maupertuis) si presentano problemi di ottimizzazione in diversi ambiti geometrici o con applicazioni in altri campi della matematica. Inoltre saranno illustrati alcuni esempi dei problemi di trasporto ottimale (problema di Monge). Negli incontri successivi gli studenti a gruppi lavoreranno su alcuni problemi proposti e seguirà infine una discussione collettiva.

Bibliografia

- Stefan Hildebrandt e Anthony Tromba, The parsimonious universe : shape and form in the natural world, Springer, 1996; Principi di minimo e forme ottimali in natura, ESN 2007 (versione italiana)
- Cédric Villani, Optimal transport old and new, Springer, 2009

Minicorso: Sull'errore delle formule di quadratura
Ambito disciplinare: Analisi Numerica
Docente: Prof. Sara Remogna

Date: 22 e 29 marzo, 5 aprile

Sommario: Nella lezione introduttiva saranno presentati metodi per lo studio dell'errore delle formule di quadratura, utilizzando ad esempio stime asintotiche dell'errore e il teorema di rappresentazione di Peano. Inoltre, verranno proposte applicazioni, tra cui l'estrapolazione e il metodo di integrazione di Romberg.
Negli incontri successivi, gli studenti dovranno esporre e discutere problemi, esercizi, approfondimenti o dimostrazioni di risultati presentati nella lezione introduttiva.

Bibliografia
1 K.E. Atkinson. An Introduction to numerical analysis - 2. ed. John Wiley & Sons, 1989
2 W. Gautschi. Numerical analysis - 2. ed. Birkhauser, Springer, 2012
3 G.M. Phillips. Interpolation and approximation by polynomials. Springer, 2003
4 J. Stoer, R. Bulirsch. Introduction to numerical analysis- 3. ed. Springer, 2002

Minicorso: Modelli differenziali
Ambito disciplinare: Analisi numerica
Docente: Prof. Isabella Cravero
Date: 12 e 26 aprile, 3 maggio

Sommario: Nella prima lezione verranno introdotti alcuni modelli differenziali (tipo modello preda-predatore, modello termico per una sbarra, modello delle epidemie e altri ancora) e si vedranno le principali tecniche per ottenere la soluzione approssimata. A tal fine saranno fatti alcuni richiami sulla derivazione numerica e sulla risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie. Successivamente gli studenti saranno divisi in gruppi per discutere ed approssimare, con l'utilizzo di Matlab, il modello a loro assegnato. È previsto, se desiderato, anche un gruppo di approfondimento sulla teoria numerica delle equazioni differenziali.

Bibliografia:
- J.D. Lambert (1991), Numerical Methods for ordinary differential systems: the initial value problem, John Wiley & Sons Ltd, England
- Articoli e materiale forniti dal docente

Minicorso: Metodi Monte Carlo e generatori di numeri casuali
Ambito disciplinare: Probabilità e statistica
Docente: Prof.ssa Laura Sacerdote
Date: 10, 17 e 24 maggio

Sommario: Ci si prefigge di introdurre le idee e le tecniche a fondamento dei metodi di tipo Monte Carlo: metodi probabilistici utilizzati per ottenere stime di grandezze d'interesse attraverso la simulazione di opportuni funzionali di variabili casuali. L'idea essenziale consiste nell' usare la casualità per risolvere i problemi che in linea di principio sarebbero deterministici ma per i quali sia possibile definire un problema stocastico che abbia la medesima soluzione. Sono spesso utilizzati nei problemi fisici, informatici e matematici soprattutto ad alta dimensionalità; sono tanto più utili quanto più è difficile o impossibile utilizzare altri approcci.
Dal momento che i metodi Monte Carlo si basano sulla generazione dei numeri casuali, in primo luogo si tratterà tale problema. Nessun calcolatore, essendo deterministico, è in grado di generare numeri puramente casuali ma solo numeri pseudo casuali. Tali numeri sono generati da algoritmi deterministici che possono superare test statistici di casualità, rendendoli statisticamente indistinguibili da veri numeri casuali. Verranno proposti diversi algoritmi per generare numeri casuali con distribuzioni assegnata e verranno controllati statisticamente i risultati ottenuti. In seguito, si utilizzeranno numeri pseudo casuali per affrontare problemi variamente complessi con metodi tipo Monte Carlo. Si faranno esempi nell'ambito dell'integrazione numerica, nel calcolo di costanti matematiche e nella simulazione di fenomeni quali per esempio delle code.

Bibliografia:
1 Robert, C. P.; Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods* (2nd ed.). New York: Springer
2 Rubinstein, R. Y.; Kroese, D. P. (2007). *Simulation and the Monte Carlo Method* (2nd ed.). New

York: John Wiley & Sons.
3 Shonkwiler, R. W.; Mendivil, F. (2009) Explorations in Monte Carlo Methods (Undergraduate Texts in Mathematics). Springer.
4 Shreider Y. A. (1966) Monte Carlo Methods, Pergamon Press.

Terzo anno

Sono proposti tre moduli di 8 ore ciascuno. Il materiale didattico dei minicorsi sarà reperibile sulla piattaforma moodle nel corso denominato “Eccellenza 3”.

Modulo: Problemi di analisi matematica ed equazioni differenziali
Docenti: Proff. Elena Cordero e Davide Zucco
Date/orari: 8/3 (16:30-18:30), 15/3 (16:30-18:30), 23/3 (12:30-14:30), 8/3 (12:30-14:30).

Il modulo verte su alcuni esercizi di approfondimento, in gran parte presi dalle prove di ammissione alla LM della SISSA o al IV anno della Scuola Normale di Pisa. Gli studenti, divisi in gruppi, lavorano sugli esercizi proposti e vengono invitati a presentarne lo svolgimento, a discutere i principali ostacoli incontrati, le possibili strategie risolutive e gli strumenti utilizzati.

Modulo: Problemi di algebra e geometria
Docenti: Proff. Luciano Mari e Riccardo Moschetti
Date/orari: 5/4 (16:30-18:30), 12/4 (16:30-18:30), 19/4 (16:30-18:30), 29/4 (orario da definire).

Il modulo verte su alcuni esercizi di approfondimento, in gran parte presi dalle prove di ammissione alla LM della SISSA o al IV anno della Scuola Normale di Pisa. Gli studenti, divisi in gruppi, lavorano sugli esercizi proposti e vengono invitati a presentarne lo svolgimento, a discutere i principali ostacoli incontrati, le possibili strategie risolutive e gli strumenti utilizzati.

Modulo: Modellizzazione matematica
Docenti: Proff. Roberto Cavoretto, Claudia Chanu, Elvira Di Nardo
Date/orari: 26/4 (16:30-18:30), 4/5 (12:30-14:30), 11/5 (12:30-14:30), 18/5 (12:30-14:30).

Il materiale di lavoro sarà costituito da più problemi tra quelli proposti agli esami di ammissione alla SNS o alla SISSA, sia per l'accesso alla magistrale, sia eventualmente al dottorato. Inoltre, saranno proposti anche progetti preparati dai docenti del modulo che toccheranno i diversi settori della matematica applicata. Gli studenti del percorso di eccellenza, divisi in gruppi, dovranno elaborare delle soluzioni ai problemi e progetti sotto la supervisione dei docenti.

Regole di ammissione e modalità di iscrizione

Le attività del percorso di eccellenza sono riservate agli studenti/alle studentesse dell’anno di studio per cui le attività sono proposte e che sono in possesso dei seguenti requisiti:

- per il primo anno: almeno due esami superati nella sessione invernale tra: esame di Analisi 1A, esame di Geometria 1 ed esonero di Algebra 1 con media ≥ 27 e voti ≥ 24, tranne al più uno;
- per il secondo anno: tutti gli esami del primo anno e almeno due del secondo anno superati entro la sessione d’esami invernale, con media ≥ 27 e voti ≥ 24, tranne al più uno;
- per il terzo anno: tutti gli esami dei primi due anni e almeno due esami di settore MAT del terzo anno, superati entro la sessione d’esami invernale, con media ≥ 27 e voti ≥ 24, tranne al più uno.

Per “media” si intende il massimo tra la media aritmetica pesata sul numero di CFU dell’esame e la media aritmetica non pesata. Nel calcolo della media, 30 e lode vale 32.

Gli studenti/le studentesse che soddisfano i requisiti richiesti e intendono iscriversi al percorso devono registrarsi compilando **entro il 18/2/2022** il form che verrà pubblicato sul sito del Corso di Laurea in Matematica.

Le lezioni introduttive dei minicorsi sono accessibili a tutti. Le attività laboratoriali sono riservate ai soli studenti ammessi al percorso di eccellenza.

Contatti

Per informazioni di tipo organizzativo rivolgersi al prof. Paolo Caldiroli (paolo.caldiroli@unito.it)
Per dettagli sui minicorsi ci si può rivolgere direttamente ai rispettivi docenti (email: nome.cognome@unito.it)