Storia di un quesito matematico: Eulero e il problema dei 36 ufficiali.

Il famoso problema di Eulero(1707-1783) dei 36 ufficiali può essere così formulato : è possibile disporre su una piazza quadrata 36 ufficiali, provenienti a sei a sei da sei diversi reggimenti ed aventi, in ognuno di essi, sei gradi militari differenti, in 6 righe e in 6 colonne di 6 ufficiali ciascuna, in modo tale che in ogni riga e in ogni colonna ci sia un ufficiale di ogni reggimento e di ogni grado ?

Anticipiamo al lettore, prima che si avventuri in inutili tentativi, che Eulero congetturò che il problema non avesse soluzione, ma soltanto dopo più di 100 anni , nel 1900, il matematico francese M.G.Tarry provò la verità della congettura .

Lo stesso quesito ha soluzione nel caso in cui gli ufficiali siano 16 .

Poichè credo che ognuno di noi abbia più dimestichezza con le carte da gioco che con i reggimenti, riformuliamo il problema dei 16 ufficiali in questi termini: è possibile disporre in un quadrato di 4 righe e 4 colonne i fanti, le donne, i re e gli assi di un mazzo di carte da poker in modo tale che ogni riga e ogni colonna contenga carte di tutti i semi e di tutti i valori?

Prima di darne una soluzione, inquadriamo il problema matematicamente, introducendo i quadrati latini.

Dati n elementi diversi, un quadrato latino di ordine n è definibile come una tabella quadrata in cui ogni elemento appare una e una sola volta in ogni riga e in ogni colonna .

Per esempio, se come elementi prendiamo i numeri 1, 2, 3, 4 , la seguente tabella è un quadrato latino di ordine 4

1 2 3 4
2 3 4 1
3 4 1 2
4 1 2 3

Se abbiamo 2 quadrati latini dello stesso ordine è possibile costruire una nuova tabella “prodotto" in ogni posto della quale è posizionata la coppia le cui componenti sono gli elementi di ugual posto nei quadrati di partenza . Per esempio, a partire dal quadrato latino sopra e dal seguente (dello stesso ordine con elementi le lettere a, b, c, d)

:

a b c d
c d a b
b a d c
d c b a

otteniamo la tabella

(1,a) (2,b) (3,c) (4,d)
(2,c) (3,d) (4,a) (1,b)
(3,b) (4,a) (1,d) (2,c)
(4,d) (1,c) (2,b) (3,a) .

Due quadrati latini dello stesso ordine sono detti ortogonali se la loro tabella “prodotto” contiene coppie tutte distinte. Nel nostro esempio i due quadrati non sono ortogonali: la coppia (2, c) compare due volte così anche (4, d) e (4, a) .
Siamo arrivati alla domanda la cui risposta motiverà il diverso esito dei 2 problemi: per quali valori dell’ordine n esistono quadrati latini ortogonali? Sicuramente quando n è potenza di un primo (la dimostrazione ha a che fare con i campi di Galois), e quindi quando n vale 4, perché 4 è una potenza di 2 . Quando n non è potenza di un primo, la risposta non è sempre nota . La congettura completa di Eulero era che non esistessero quadrati latini ortogonali di ordine $n = 4k + 2$, per qualunque k .
Tarry provò la verità della congettura per $k = 1$ e quindi $n = 6$.
Nel 1960 circa, Bose, Shrikhande e Parker dimostrarono invece la falsità della congettura per $k>1$ e quindi $n = 10,14$ ecc, smentendo Eulero .
Dunque, esistono quadrati latini ortogonali di ordine 4 e non ne esistono di ordine 6 .
Torniamo ora ai nostri 16 ufficiali, o meglio, alle nostre carte: indichiamo con le lettere iniziali maiuscole F, D, R, A i fanti, le donne, i re e gli assi, con le lettere iniziali minuscole c, q, p, f i quattro semi. I due quadrati latini di ordine 4

A F D R e c q p f
F A R D e p f c q
D R A F e f p q c
R D F A e q c f p

hanno come tabella “prodotto” una soluzione del nostro problema :

(A,c) (F,q) (D,p) (R,f)

(F,p) (A,f) (R,c) (D,q)

(D,f) (R,p) (A,q) (F,c)

(R,q) (D,c) (F,f) (A,p)

In questa tabella compaiono tutte le coppie valore-seme, i due quadrati di partenza sono ortogonali, la configurazione (vedi disegno) soddisfa le nostre richieste .

Dovrebbe ora essere chiaro come la non esistenza di quadrati latini ortogonali equivalga all'impossibilità del problema di Eulero .
L'evidente aspetto ludico delle questioni poste non deve trarre in inganno: i quadrati latini hanno applicazioni più "serie" ed Eulero , grande matematico svizzero, non si occupò solo di ufficiali e di reggimenti !

Daniela Romagnoli