La successione di Fibonacci

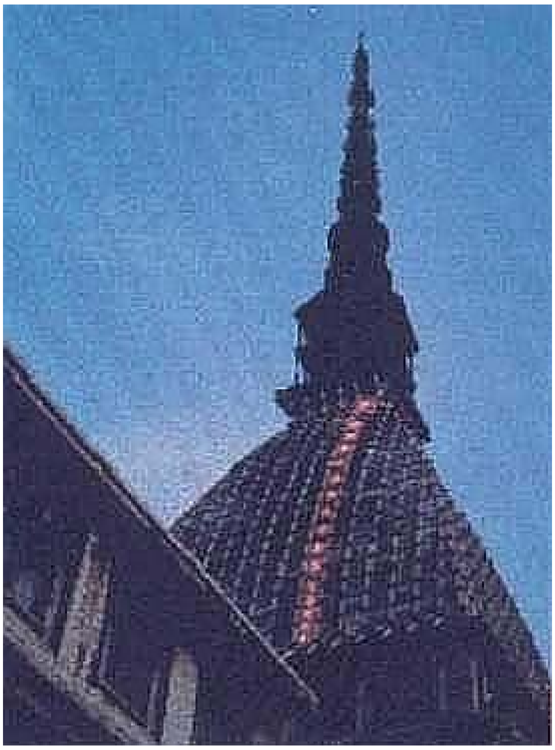


Figura 1 . Sulla Mole Antonelliana si accende la successione di Fibonacci (ideazione dell'architetto Mario Merz)

La relazione ricorsiva $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$, unitamente alle condizioni iniziali $F_1 = F_2 = 1$ individua la nota successione di Fibonacci :

$$1,1,2,3,5,8,13,\ldots$$

Si tratta del primo esempio conosciuto di relazione ricorsiva : i primi dodici termini di essa si trovano nel Liber Abbaci (1202) di Leonardo Pisano detto Fibonacci (1170 - 1250) come risposta al seguente problema: quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur .

Si suppone che una coppia di conigli adulti generi ogni mese una coppia di piccoli e che questi si riproducano , generando anch'essi una coppia di conigli, a partire dal secondo mese di vita . Partendo da una coppia di coniglietti, quante coppie ci saranno nel mese n ? Indichiamo questo numero con F(n) o F_n . Dunque, per le ipotesi fatte

F(1) = 1 (inizialmente abbiamo una coppia non adulta)

F(2) = 1 (dopo un mese abbiamo ancora una sola coppia)

F(3) = 1 + 1 = F(1) + F(2) (nel 3° mese abbiamo la coppia di partenza, che è diventata adulta, e la coppia di coniglietti da essa generata)

F(4) = 2 + 1 = F(3) + F(2) (si hanno 2 coppie, quella iniziale e la loro progenie mensile più la coppia del mese precedente diventata adulta)

.

.

.

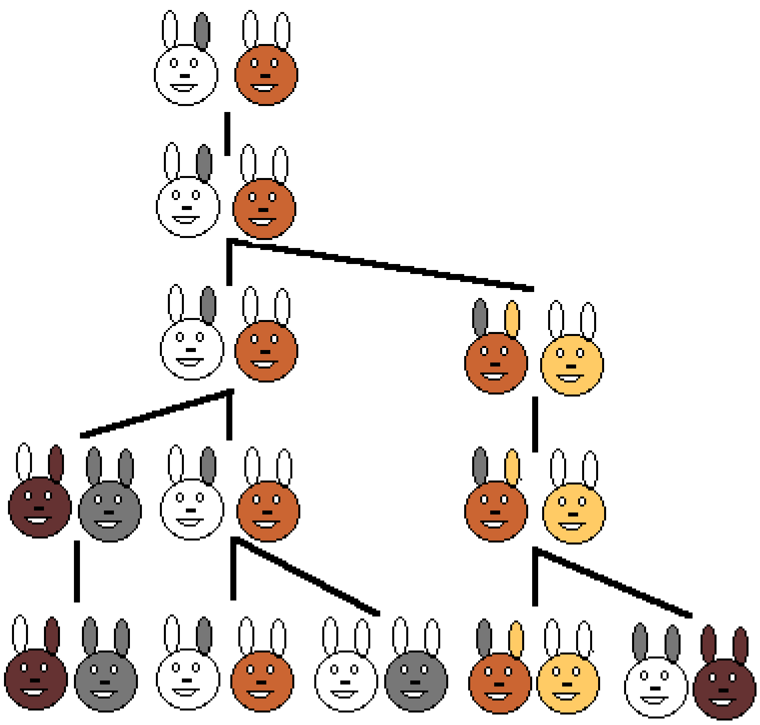
F(n) = F(n-1) + F(n-2) (nel mese n-simo, n >2 , vi sono tutte le coppie del mese precedente, cioè F(n-1), più le coppie dei piccoli, che sono esattamente tante quante erano le coppie due mesi prima ,cioè F(n-2)) .

I numeri di Fibonacci sono i valori della successione descritta : i primi dodici sono

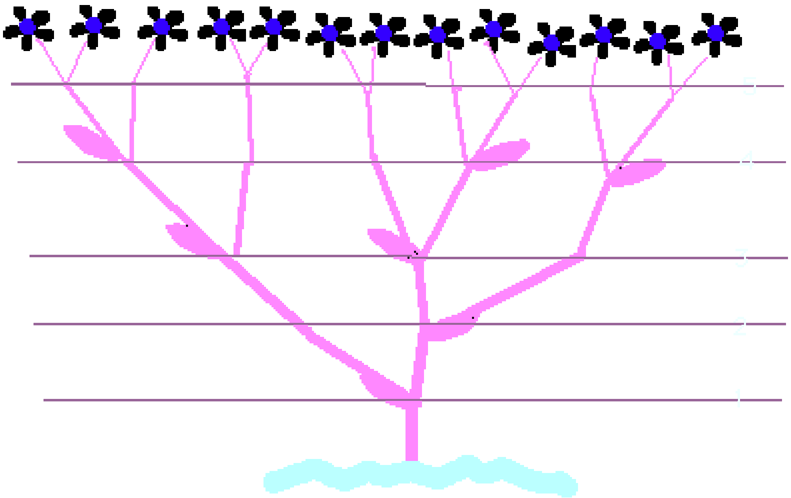
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,… .

Si pone generalmente $F_0 = 0$, affinchè la relazione ricorsiva $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ sia valida anche per n = 2 .

Nel disegno che segue è illustrata la situazione fino al quinto mese :



I numeri di Fibonacci si ritrovano in molte situazioni e compaiono spesso in natura. Per esempio in molte piante il numero di rami in cui il fusto si ramifica segue uno schema del tipo seguente



Così i numeri delle spirali dei semi del girasole, dei petali di alcuni fiori, delle cime del cavolfiore, delle scaglie dell'ananas sono spesso numeri di Fibonacci .

La letteratura matematica sulle proprietà dei numeri di Fibonacci è molto vasta . Ci limitiamo ad indicarne alcune proprietà e a darne la formula generale, che ricaveremo nel prossimo paragrafo .

Usando il metodo di induzione matematica si possono dimostrare le seguenti formule :

i) $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

ii) $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$

iii) $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

iv) $F_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n-k-1}{k}$ (cioè, disponendo i coefficienti binomiali del triangolo di Tartaglia nel modo seguente

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}\ldots$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
6	. . . .					

. . . .

si ottengono i numeri di Fibonacci sommando "in diagonale").

Proviamo una interessante proprietà combinatorica dei numeri di Fibonacci , che da taluni autori viene data come definizione dei numeri stessi .

Proposizione Sia $I_n = \{1,2,3,\ldots,n\} \subset N$. Il numero dei sottoinsiemi di I_n che non contengono due suoi numeri consecutivi è dato da F_{n+2} .

Dimostrazione . Identifichiamo un sottoinsieme A di I_n con una stringa di lunghezza n formata con le due cifre 1 e 0 . La cifra 1 indica l'appartenenza di un elemento di I_n ad A , la cifra 0 la non appartenenza . Per esempio, per n = 4, la stringa 1010 indica il sottoinsieme {1,3} dell' insieme I_4 = {1,2,3,4} . I sottoinsiemi di I_n che non contengono due suoi numeri consecutivi sono dati dalle stringhe che non hanno mai due cifre 1 consecutive . Consideriamo tra questi quelli di ordine k : la stringa che li rappresenta contiene k volte la cifra 1 . Per contarli tutti , partiamo da n-k cifre tutte uguali a 0

$$\underbrace{0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0}_{n-k}$$

e contiamo in quanti modi possiamo inserire k cifre 1 in modo che due di esse non siano mai adiacenti . Essendo i posti vuoti disponibili n - k + 1 , le k cifre 1 si possono inserire in

$$C_{n-k+1,k} = \binom{n-k+1}{k}$$

modi . Quindi i sottoinsiemi cercati sono

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n-k+1}{k} .$$

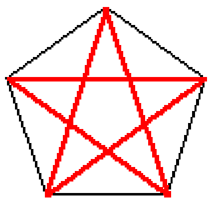
Per la proprietà iv) , $F_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n-k-1}{k}$, il numero cercato è proprio l'(n+2)-simo numero di Fibonacci .

La formula generale , che ci permette di determinare il termine n-simo di una successione in funzione di n , è , nel caso della successione di Fibonacci ,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Ricordiamo che il numero $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è detto **rapporto aureo** (o **sezione aurea**) e indicato con la lettera Φ .

Il numero Φ è un numero molto famoso e molto usato in architettura (prende il nome dalla lettera iniziale dello scultore greco Fidia), pittura, anatomia e botanica . Fu introdotto dai pitagorici come rapporto tra la diagonale e il lato di un pentagono regolare (o come rapporto tra il lato del pentagono stellato o pentagramma, simbolo dei pitagorici, e il lato del pentagono regolare con gli stessi vertici) :

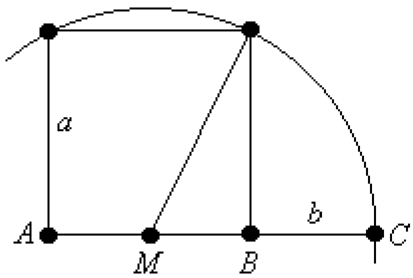


Il rapporto aureo è definito come il rapporto tra due lunghezze a e b tale che

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

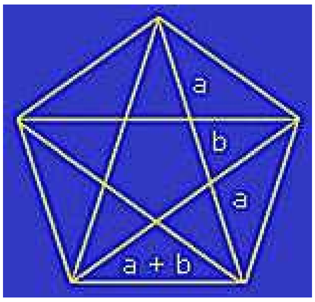
Risolvendo la proporzione, si hanno le due radici $\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{a}{b} = -\frac{1}{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Nella figura che segue riportiamo la costruzione geometrica del rapporto aureo :



Si costruisca un quadrato il cui lato AB ha lunghezza a e punto medio M . La circonferenza disegnata,di centro M e raggio $\frac{\sqrt{5}a}{2}$, interseca la retta AB nel punto C. Il segmento BC ha lunghezza b e $\frac{a}{b} = \Phi = \frac{a+b}{a}$.

Anche le diagonali del pentagono di lato a + b si intersecano in segmenti che danno luogo alla sezione aurea e generano un pentagono regolare di lato b e diagonali di lunghezza a (ancora il rapporto aureo) e così all'infinito :



Dalla forma generale dei numeri di Fibonacci , osservando che quando n è grande F_n si avvicina molto a $\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$ perché $\left| -\frac{1}{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$ e quindi $\left(-\frac{1}{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ diventa esponenzialmente piccolo , si ha che il rapporto $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ ha come limite (per $n \to \infty$) proprio il numero Φ .