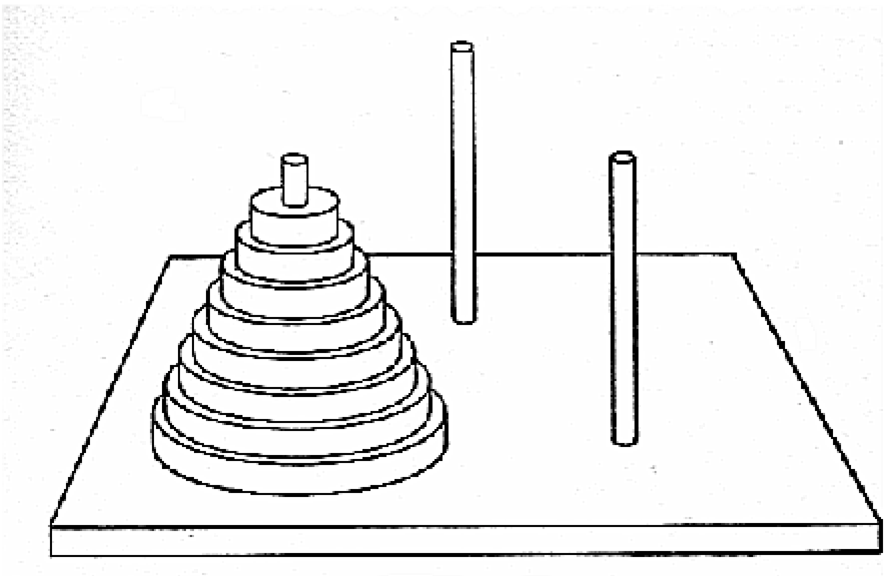
La Torre di Hanoi : che cosa c'e sotto un noto rompicapo .

Il gioco della torre di Hanoi fu inventato dal matematico francese E. Lucas nel 1883 e da allora è venduto come giocattolo .

Il gioco consiste in tre pioli A, B, C e n dischi (8 nella versione " classica " in figura), aventi diametro decrescente dal basso verso l'alto, infilati sul piolo A, che bisogna trasferire con lo stesso ordine ad uno qualunque dei due pioli liberi, con le regole seguenti :

(a) i dischi devono essere mossi uno per volta, usando uno dei due pioli liberi come "intermediario"

(b) un disco non può mai trovarsi su uno di diametro minore .



Ci chiediamo qual è il numero minimo m_n di mosse necessarie per terminare il gioco .

Cominciamo ad osservare che, se la torre consiste di soli 2 dischi sul piolo A, per risolvere il gioco si sposta il disco piccolo sul piolo B, il disco grande sul piolo C, infine il disco piccolo sul piolo C . Cioè occorrono 3 mosse per spostare 2 dischi : $m_2 = 3$.

Vediamo di risolvere il problema nel caso di 3 dischi : non possiamo trasferire il disco più grande senza aver prima spostato la torre dei due dischi superiori su un piolo libero . Fatto questo (in 3 mosse) , spostiamo il disco più grande sul piolo rimasto libero (con 1 mossa) e

riposizioniamo su di esso la torre dei due dischi (in 3 mosse) .
Il numero di mosse per terminare il gioco con 3 dischi è 7 ed è legato a m_2 dalla formula $m_3 = 2m_2 + 1$.

Quanto abbiamo detto vale nel caso generale del gioco con n dischi : con m_{n-1} mosse muoviamo n-1 dischi su un piolo libero, con una mossa spostiamo il disco base sull'altro piolo ($m_1 = 1$), con m_{n-1} mosse riposizioniamo su di esso la torre degli n-1 dischi : abbiamo così la formula ricorsiva $m_n = 2m_{n-1} + 1$.

Esplicitando i valori di m_n otteniamo la sequenza di numeri : 1,3,7,15,31,63,127,... .

Se a ciascuno di essi aggiungiamo un'unità otteniamo le potenze successive di 2: 1,4,8,16,32,64,128,... . Dunque , la formula esplicita per il numero minimo di mosse è

$$m_n = 2^n - 1 .$$

Naturalmente si può arrivare alla stessa formula con il calcolo diretto :

$$m_n = 2m_{n-1} + 1 = 2 (2m_{n-2} + 1) = 2^2 m_{n-2} + 2 + 1 = 2^2(2m_{n-3} + 1) + 2 + 1 = ... =$$
$$= 2^{n-1}m_{n-(n-1)} + 2^{n-2} + ... + 2^2 + 2 + 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1 .$$

Questa formula ci dice che per risolvere il gioco nella versione "classica" con 8 dischi sono necessarie $2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ mosse .

Al gioco della torre di Hanoi è associata la seguente leggenda : nella città indiana di Benares i sacerdoti del tempio di Brahma devono spostare, con le regole dette, i 64 dischi d'oro della torre di Brahma . Il mondo terminerà alla fine del lavoro dei sacerdoti. Ora, poichè il numero di mosse necessarie è $2^{64} - 1$ = 18.446.744.073.709.551.615 - 1, possiamo concludere che la fine del mondo è davvero lontana ! Calcolando infatti una mossa per microsecondo (10^{-6}secondo), occorreranno oltre 5000 secoli per spostare la torre.

Daniela Romagnoli