Istituzioni di Algebra a.a. 2006/2007 – Esercizi 2 (da consegnare entro martedì 7 novembre 2006)

In questi esercizi analizziamo il concetto di *limite diretto* per una famiglia di moduli, una importante costruzione che generalizza il concetto di somma di sottomoduli. Il limite diretto può essere definito mediante una proprietà universale (e quindi è unico), e ammette una costruzione esplicita nella categoria degli A-moduli.

Useremo poi le proprietà del limite diretto per dimostrare che il sottomodulo di torsione è esattamente il nucleo della tensorizzazione con il campo dei quozienti.

Il contenuto di queste pagine è preso da Atiyah-Macdonald, Introduzione all'algebra commutativa. In particolare, Esercizi 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 del Capitolo 2 e Esercizio 12 del Capitolo 3. Può essere utile avere a portata di mano il libro facendo gli esercizi, in quanto ci sono suggerimenti e riferimenti al testo che aiutano nella risoluzione.

Gli esercizi da svolgere sono: 1.4, 1.5, 2.2, 3.4, 4.1, 5.1, e la dimostrazione del Teorema 5.2.

1 Costruzione del limite diretto

Nel seguito la parola *anello* significherà sempre *anello commutativo con unità* e *modulo* significherà sempre *modulo unitario*.

Definizione 1.1. Un insieme parzialmente ordinato I è detto *diretto* se

$$\forall\, i,j \in I \quad \exists\, k \in I \text{ tale che } i \leq k, j \leq k$$

Per esempio un insieme totalmente ordinato è un insieme diretto. Un altro esempio è l'insieme dei sottomoduli finitamente generati di un modulo, ordinato per inclusione.

Sia A un anello (che sarà fissato nel seguito), I un insieme diretto e $\{M_i\}_{i\in I}$ una famiglia di A-moduli. Supponiamo che, per ogni $i,j \in I$, $i \leq j$, sia fissato un omomorfismo di A-moduli $\mu_{ij} : M_i \to M_j$.

Definizione 1.2. $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})_{i,j\in I}$ si dice *sistema diretto sull'insieme diretto* I se:

1. μ_{ii} è l'identità di M_i, per ogni $i \in I$;
2. $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$, per ogni $i \leq j \leq k$.

Sia $m \in M_i$ un elemento. Se $i \leq j$, possiamo considerare $\mu_{ij}(m) \in M_j$. Se poi $j \leq k$, possiamo ancora proseguire, considerando $\mu_{jk}(\mu_{ij}(m)) \in M_k$, e così via. La condizione (2) garantisce che il "cammino" percorso da questi elementi è indipendente dalla strada scelta. Inoltre, il fatto che I sia diretto dice che due elementi in due moduli diversi, $m_i \in M_i$ e $m_j \in M_j$ possono essere confrontati in un modulo comune, perché $\mu_{ik}(m_i)$ e $\mu_{jk}(m_j)$ appartengono entrambi a M_k.

Costruiamo ora un A-modulo M che verrà detto il *limite diretto* del sistema diretto $\mathbf{M}$. Sia

$$C = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

la somma diretta di tutti i moduli del sistema. C'è una mappa canonica iniettiva $\varphi_i : M_i \to C$, definita da $m_i \mapsto (0, \dots, 0, m_i, 0, \dots)$ e identifichiamo M_i con la sua immagine in C. Sia D il sottomodulo di C generato da tutti gli elementi della forma

$$m_i - \mu_{ij}(m_i),$$

per $m_i \in M_i$ e $i \leq j$. Poniamo ora $M = C/D$, e sia $\mu : C \to M$ la proiezione canonica. Definiamo $\mu_i : M_i \to M$ come $\mu_i = \mu \circ \varphi_i$.

Definizione 1.3. Il modulo M, o meglio la coppia $(M, \{\mu_i\}_{i \in I})$, si dice il *limite diretto* del sistema diretto $\mathbf{M}$, e si scrive

$$M = \varinjlim M_i$$

Esercizio 1.4. Dimostrare che:

1. se $i \leq j$ allora $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$;
2. se $m \in M$, allora esiste $m_i \in M_i$ tale che $m = \mu_i(m_i)$;
3. se $\mu_i(m_i) = 0$, allora esiste $j \geq i$ tale che $\mu_{ij}(m_i) = 0 \in M_j$.

La (2) dice che ogni elemento del limite proviene da un elemento del sistema diretto, e la (3) dice che un elemento che è nullo "al limite", era già diventato nullo "al finito".

C'è un caso particolare importante della costruzione precedente, quando tutti i moduli M_i sono sottomoduli di uno stesso modulo. Ricordiamo che, se M_i, M_j sono sottomoduli dello stesso modulo, la *somma* $M_i + M_j$ è il sottomodulo generato da $M_i \cup M_j$, e cioè l'intersezione di tutti i sottomoduli che contengono sia M_i che M_j. Nel caso di una somma infinita, la definizione è la stessa:

$$\sum M_i = \text{ sottomodulo generato da } \bigcup M_i = \bigcap_{N \supseteq \cup M_i} N$$

Esercizio 1.5. Sia $\{M_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottomoduli di un A-modulo tale che per ogni coppia di indici $i, j \in I$ esiste un indice $k \in I$ tale che

$$M_i + M_j \subseteq M_k.$$

Definiamo allora $i \leq j$ se e solo se $M_i \subseteq M_j$, e μ_{ij} l'inclusione. Dimostrare che:

1. I è un insieme diretto, e $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})_{i,j \in I}$ è un sistema diretto (questo è quasi ovvio);

2. $\varinjlim M_i = \sum M_i = \bigcup M_i$

Corollario 1.6. *Ogni modulo è il limite diretto dei suoi sottomoduli finitamente generati.*

Dimostrazione. La famiglia dei sottomoduli finitamente generati soddisfa la condizione dell'esercizio precedente, ponendo $M_k = M_i + M_j$, che è finitamente generato se M_i e M_j lo sono. Inoltre ogni elemento $m \in M$ appartiene al sottomodulo ciclico Am, che è finitamente generato. □

2 Proprietà universale del limite diretto

Enunciamo ora e dimostriamo la proprietà universale del limite diretto:

Teorema 2.1. *Sia* $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})_{i,j \in I}$ *un sistema diretto e sia* $M = \varinjlim M_i$. *Sia* N *un* A*-modulo e sia* $\{\alpha_i\}$ *una famiglia di omomorfismi* $\alpha_i : M_i \to N$, *tale che* $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$ *per ogni* $i \leq j$. *Allora esiste un unico omomorfismo* $\alpha : M \to N$ *tale che* $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ *per ogni* $i \in I$.

Facciamo un disegno:

$$\begin{tikzcd}
 & & N \\
M_i \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, "\mu_{ij}"'] \arrow[urr, bend left, "\alpha_i"] & M \arrow[ur, dashed, "\alpha"] & \\
M_j \arrow[ur, "\mu_j"'] \arrow[uurr, bend right, "\alpha_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Il teorema afferma che se abbiamo tutte le frecce continue (e il diagrama è commutativo), allora esiste un *unica* freccia tratteggiata α, in modo che il diagramma completo sia ancora commutativo. Il triangolo interno, di vertici M_i, M_j e M è commutativo per la definizione di limite diretto (e l'esercizio 1.4, punto 1), il triangolo esterno, di vertici M_i, M_j e N è commutativo per le ipotesi del teorema.

Dimostrazione. Per definizione, $M = C/D$, dove $C = \oplus M_i$. Definiamo per prima cosa una mappa $\alpha : C \to N$ nel seguente modo: ogni elemento di C è somma, in modo unico, di un numero finito di elementi degli M_i,

$$c = m_{i_1} + \cdots + m_{i_t}$$

Definiamo allora

$$\alpha(c) = \alpha_{i_1}(m_{i_1}) + \cdots + \alpha_{i_t}(m_{i_t})$$

La mappa α è ben definita e unicamente determinata dalle mappe α_i (per la proprietà universale della somma diretta). È anche immediato verificare che α è un omomorfismo.

Vediamo ora che per ogni $d \in D$ si ha $\alpha(d) = 0$, e quindi α induce una mappa dal quoziente $C/D = M$ in N. Basta naturalmente verificare questo per i generatori di D, e sia quindi $m_i - \mu_{ij}(m_i)$, con $i \leq j$ uno di questi generatori, con $m_i \in M_i$ e (quindi) $\mu_{ij}(m_i) \in M_j$. Dunque:

$$\alpha\,(m_i - \mu_{ij}(m_i)) = \alpha_i(m_i) - \alpha_j(\mu_{ij}(m_i)) = 0$$

per la commutatività del triangolo esterno. □

Poiché il limite diretto possiede una proprietà universale, è l'oggetto iniziale di una opportuna categoria $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}$, costruita a partire dal sistema diretto $\mathbf{M}$.

Esercizio 2.2. Definire la categoria $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}$, specificandone gli oggetti e i morfismi, e indicando perché il limite diretto è l'oggetto iniziale (o terminale) di questa categoria.

3 Proprietà di esattezza del limite diretto

Sia I un insieme diretto e siano $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})_{i,j \in I}$, $\mathbf{N} = (N_i, \nu_{ij})_{i,j \in I}$ due sistemi diretti.

Definizione 3.1. Un omomorfismo $\mathbf{\Phi} : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ è una famiglia di omomorfismi $\varphi_i : M_i \to N_i$ tali che $\varphi_j \circ \mu_{ij} = \nu_{ij} \circ \varphi_i$, per ogni $i \leq j$.

La condizione afferma che, per $i \leq j$ il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\mu_{ij}"'] & N_i \arrow[d, "\nu_{ij}"] \\ M_j \arrow[r, "\varphi_j"] & N_j \end{tikzcd}$$

Siano ora $M = \varinjlim M_i$, $N = \varinjlim N_i$, e siano μ_i, ν_i gli omomorfismi associati.

Lemma 3.2. *Un omomorfismo $\mathbf{\Phi} : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ di sistemi diretti definisce un unico omomorfismo $\varphi = \varinjlim \varphi_i : M \to N$ tale che $\varphi \circ \mu_i = \nu_i \circ \varphi_i$*

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[dd, "\mu_{ij}"'] & & N_i \arrow[dr, "\nu_i"] \arrow[dd, "\nu_{ij}"] & \\ & M \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & N \\ M_j \arrow[rr, "\varphi_j"] \arrow[ur, "\mu_j"] & & N_j \arrow[ur, "\nu_j"] & \end{tikzcd}$$

Definendo $\alpha_i = \nu_i \circ \varphi_i$ otteniamo una famiglia di omomorfismi dagli M_i in N che commuta con le mappe $\{\mu_{ij}\}$ (leggendo il perimetro esterno del diagramma). Abbiamo quindi indotta (per la proprietà universale) una unica mappa $\varphi : M \to N$ con le proprietà richieste. □

Definizione 3.3. Una successione di sistemi diretti (sullo stesso insieme I) e omomorfismi

$$\mathbf{M} \to \mathbf{N} \to \mathbf{P}$$

è esatta se per ogni $i \in I$ la corrispondente successione di moduli è esatta.

Esercizio 3.4. Se $\mathbf{M} \to \mathbf{N} \to \mathbf{P}$ è esatta, allora la successione $M \to N \to P$ dei limiti diretti è esatta.

Dunque il funtore limite diretto è un funtore esatto, e cioè trasforma tutte le successioni esatte in successioni esatte.

4 Il prodotto tensoriale commuta con il limite diretto

Sia $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$ un sistema diretto, e sia N un modulo fissato. È immediato verificare che $\mathbf{M} \otimes N = (M_i \otimes N, \mu_{ij} \otimes 1)$ è un sistema diretto (se non vi è chiaro, fate la verifica in dettaglio, ma non è un esercizio da consegnare). Poniamo $M = \varinjlim M_i$ e $P = \varinjlim (M_i \otimes N)$. Per ogni $i \in I$ c'è un omomorfismo

$$\mu_i \otimes 1 : M_i \otimes N \to M \otimes N$$

e quindi per la proprietà universale del limite diretto c'è un omomorfismo indotto

$$\psi : P \to M \otimes N$$

Esercizio 4.1. Dimostrare che ψ è un isomorfismo.

Possiamo enunciare questo risultato come

$$\varinjlim (M_i \otimes N) \cong (\varinjlim M_i) \otimes N$$

5 Torsione di un modulo

Sia A un dominio di integrità e M un A-modulo. Ricordiamo che $m \in M$ è un elemento di *torsione* se $\mathrm{Ann}(m) \neq 0$, cioè se esiste $a \in A$, $a \neq 0$ tale che $am = 0$ (vedi anche le dispense, Esercizio 6 alla fine del Capitolo 2).

L'insieme $T(M) = \{m \in M \mid m \text{ è di torsione}\}$ è un sottomodulo di M e viene detto *sottomodulo di torsione*. M si dice *privo di torsione* se $T(M) = 0$.

Esercizio 5.1. Dimostrare che:

1. per ogni M, il modulo $M/T(M)$ è privo di torsione cioè $T(M/T(M)) = 0$;
2. se $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora $f(T(M)) \subseteq T(N)$;
3. se $0 \to P \to M \to N$ è esatta, allora $0 \to T(P) \to T(M) \to T(N)$ è esatta;

Enunciamo finalmente il risultato annunciato nell'introduzione:

Teorema 5.2. *Sia A un dominio d'integrità, K il suo campo dei quozienti (campo delle frazioni) e M un A-modulo. Sia $f : M \to M \otimes_A K$ l'omomorfismo di A-moduli dato da $f(m) = m \otimes 1$. Allora $T(M) = \ker f$.*

Dimostrazione. Esercizio. (leggere l'Atiyah-Macdonald!) □

Riferimenti bibliografici

[AM] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley, 1969