

Corso di Studio in Matematica
Anno accademico 2008-2009
Analisi Matematica IV
Correzione della Prova scritta del 9 luglio 2009

Esercizio 1 (punti 10). Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = 1 + \cos y + t^2.$$

1. Dimostrare che tutte le sue soluzioni sono globalmente definite e studiarne la monotonia.
2. Discutere la relazione che intercorre tra le soluzioni che verificano le condizioni iniziali $y(0) = \pi/2$ e $y(0) = 5\pi/2$.

Svolgimento. Si osserva anzitutto che

1) Posto $f(t, y) = 1 + \cos y + t^2$, si osserva anzitutto che f è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Sia ϕ una soluzione soddisfacente $\phi(t_0) = \phi_0$ per qualche $t_0 \in \mathbb{R}$, e sia $[a, b]$ un intervallo contenente t_0 . Si ha $|f(t, y)| \leq 2 + \max(|a|, |b|)$, per ogni $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. Di conseguenza, un noto risultato di esistenza globale garantisce che ϕ è definita su $[a, b]$. Data l'arbitrarietà di a, b , si conclude che ϕ è definita su tutto $\mathbb{R}$. Si ha inoltre $f(t, y) \geq t^2 \geq 0$ per ogni $(t, y) \in \mathbb{R}^2$; pertanto, tutte le soluzioni sono non decrescenti in $\mathbb{R}$.

2) Indichiamo con ϕ_0 la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + \cos y + t^2 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1)$$

e con ϕ_1 la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + \cos y + t^2 \\ y(0) = \frac{5\pi}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Osserviamo che la funzione $\phi^*(t) := \phi_0(t) + 2\pi$ è tale che $(\phi^*(t))' = (\phi_0(t))' = 1 + \cos \phi_0(t) + t^2 = 1 + \cos(\phi_0(t) + 2\pi) + t^2 = 1 + \cos \phi^*(t) + t^2$; inoltre, $\phi^*(0) = \phi_0(0) + 2\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$. Pertanto, la funzione ϕ^* è soluzione di (2). Allora, per l'unicità della soluzione di (2) risulta $\phi_1(t) = \phi^*(t) = \phi_0(t) + 2\pi$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 (punti 10). Si considerino la funzione

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2$$

e l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 7z^2 = 1, x + y + z = 1\}.$$

1. Dimostrare l'esistenza di massimo e minimo assoluti di F su S .

2. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, calcolare il massimo ed il minimo assoluti di F su S .
3. Dare una interpretazione geometrica dei risultati ottenuti.

Svolgimento. 1. L'insieme S è compatto. Infatti, si considerino le funzioni continue $g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + 7z^2 - 1$ e $g_2(x, y, z) := x + y + z - 1$; essendo

$$S = g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0),$$

l'insieme S è chiuso. Inoltre S è contenuto nell'ellissoide $g_1(x, y, z) = 0$, che è limitato.

Essendo F continua sul compatto S , segue che gli estremi assoluti certamente esistono.

2. Si osserva che $F, g_1, g_2 \in C^1(\mathbf{R}^3)$; risulta

$$J(g_1, g_2)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 14z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango massimo (2) per ogni $(x, y, z) \neq (t, t, t/7), t \in \mathbf{R}$. Essendo $g_1(t, t, t/7) = 0 \iff t = \pm\sqrt{7/15}$ e $g_2(t, t, t/7) = 0 \iff t = 7/15$, si deduce che i punti per i quali $J(g_1, g_2)$ non ha rango massimo non soddisfano le due equazioni che descrivono il vincolo. Dunque tutti i punti appartenenti al vincolo sono regolari. Possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si deve dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x - \mu = 0 \\ 2y - 2\lambda y - \mu = 0 \\ -14\lambda z - \mu = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima, si ottiene $(x - y)(1 - \lambda) = 0$. Se $\lambda = 1$, dalla prima equazione segue $\mu = 0$, e dunque $z = 0$. Le equazioni del vincolo diventano $x^2 + y^2 = 1$ e $x + y = 1$. Dunque si ottengono i punti critici vincolati $P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 0)$. Se (dalla terza equazione) $\lambda = 0$, segue che $\mu = x = y = 0$. Le equazioni del vincolo diventano $7z^2 = 1$ e $z = 1$, che sono incompatibili. Dunque per $\lambda = 0$ non si ottengono punti critici vincolati. Sia ora $\lambda \neq 0, 1$. In tal caso si ottiene $x = y = \frac{\mu}{2(1-\lambda)}, z = \frac{-\mu}{14\lambda}$. Le equazioni del vincolo diventano

$$\begin{cases} \frac{\mu^2}{2(1-\lambda)^2} + \frac{7\mu^2}{(14\lambda)^2} = 1 \\ \frac{\mu}{(1-\lambda)} - \frac{\mu}{14\lambda} = 1. \end{cases}$$

La seconda equazione conduce a

$$\mu = \frac{14\lambda(1-\lambda)}{15\lambda-1}$$

(si noti che per $\lambda = 1/15$ il vincolo non è soddisfatto). Eliminando μ , si giunge a $60\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0$, da cui $\lambda = -1/6, \lambda = 3/10$. Per $\lambda = -1/6$ si ottiene $P_3(1/3, 1/3, 1/3)$; per $\lambda = 3/10$ si ottiene $P_4(3/5, 3/5, -1/5)$. Essendo $F(P_1) =$

1, $F(P_2) = 1, F(P_3) = 2/9, F(P_4) = 18/25$, si conclude che il minimo di F su S è $2/9$ e il massimo di F su S è 1 .

3. L'insieme S è un'ellisse, intersezione dell'ellissoide $x^2 + y^2 + 7z^2 = 1$ e del piano $x + y + z = 1$; la funzione F è il quadrato della distanza dall'asse z . I valori trovati sono quindi i quadrati della minima e della massima distanza dell'ellisse S dall'asse z .

Esercizio 3 (punti 10). Si considerino il solido

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} - 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 5\}$$

ed il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x, y, z) = (0, 0, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcolare il flusso di F uscente dalla superficie frontiera di K , sia direttamente sia applicando il Teorema della divergenza.

Svolgimento. (i) Calcolo diretto. Indichiamo la frontiera di K , ∂K , con $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, dove Σ_1 indica la porzione di ∂K contenuta nel piano (x, y) , Σ_2 indica il grafico di $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$, con $(x, y) \in C_{1,2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$ e Σ_3 indica il grafico di $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$, con $(x, y) \in C_{2,\sqrt{5}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{5}\}$. Essendo $F|_{\Sigma_1} = 0$, segue che $\int_{\Sigma_1} \langle F, \mathbf{n} \rangle d\sigma = 0$. Consideriamo Σ_2 ; risulta $d\sigma = \sqrt{2}dxdy$, $\mathbf{n}_{\text{est}} = (-\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}, -\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Pertanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_2} \langle F, \mathbf{n}_{\text{est}} \rangle d\sigma &= \\ &= \iint_{C_{1,2}} \langle (0, 0, \sqrt{x^2 + y^2} - 1), \mathbf{n}_{\text{est}} \rangle \sqrt{2}dxdy = \\ &= \iint_{C_{1,2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) dxdy = \frac{5\pi}{3}. \end{aligned}$$

Consideriamo Σ_3 ; risulta $d\sigma = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-x^2-y^2}}dxdy$, $\mathbf{n}_{\text{est}} = (\frac{x}{\sqrt{5}}, \frac{y}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5-x^2-y^2}}{\sqrt{5}})$. Pertanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_3} \langle F, \mathbf{n}_{\text{est}} \rangle d\sigma &= \\ &= \iint_{C_{2,\sqrt{5}}} \langle (0, 0, \sqrt{5 - x^2 - y^2}), \mathbf{n}_{\text{est}} \rangle \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5 - x^2 - y^2}}dxdy = \\ &= \iint_{C_{2,\sqrt{5}}} (\sqrt{5 - x^2 - y^2}) dxdy = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

In totale,

$$\int_{\Sigma} \langle F, \mathbf{n}_{\text{est}} \rangle d\sigma = \frac{7\pi}{3}.$$

2) Calcolo mediante il teorema della divergenza. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle F, \mathbf{n}_{\text{est}} \rangle d\sigma &= \\ &= \iiint_K \operatorname{div} F \, dx dy dz = \iiint_K dx dy dz = \\ &= \operatorname{volume}(K) = \int_0^1 dz \iint_{C_z} dx dy = \\ &= \int_0^1 \operatorname{area}(C_z) dz = \pi \int_0^1 (5 - z^2 - (z+1)^2) dz = \frac{7\pi}{3}. \end{aligned}$$