ISTITUZIONI DI ANALISI, ***laurea specialistica***
a. a. 2006/2007
PROGRAMMA D'ESAME

1) Spazi metrici e spazi normati. Operatori lineari. Equazioni integrali.

Distanze, norme, disuguaglianze di Young, Hölder, Minkowski. Spazi di Banach. Completezza di C(K). Operatori lineari limitati. Lo spazio L(X;Y) e la sua completezza. Inverso di un operatore limitato. Serie di Neumann. G(X,Y) è aperto. L'applicazione $i(A)=A^{-1}$ è continua. Equazioni integrali in C([a,b]): applicazione del teorema delle contrazioni e caso dei nuclei separabili.

2) Spazi di Hilbert

Forme sesquilineari Hermitiane definite positive. Disuguaglianza di Schwarz. Spazi preHilbertiani e spazi di Hilbert. Identità della mediana. Proiezioni su un convesso e disuguaglianze variazionali. Proiezione ortogonale su un sottospazio. Sistemi e basi ortonormali. Serie di Fourier generalizzate: disuguaglianza di Bessel, convergenza, completezza. Teorema di rappresentazione di Riesz.

3) Funzioni continue

Il teorema di Stone-Weierstrass e quello di Kakutani-Krein. Risultati di approssimazione polinomiale e trigonometrica. Reticoli finiti e limitazione totale. Teoremi di Ascoli (cenni sul primo e sul secondo; dimostrazione del terzo sulla compattezza relativa). Teorema di Peano e metodo di Tonelli.

4) I teoremi fondamentali dell'Analisi funzionale

Insiemi rari e magri; spazi di Baire e proprietà generiche. Uno spazio metrico completo è uno spazio di Baire. Il teorema di uniforme limitatezza. Convergenza forte di operatori lineari. Il teorema dell'applicazione aperta. Il teorema del grafico chiuso. Il teorema di Hahn-Banach (forma analitica) e l'estensione di funzionali lineari continui. Cenni sugli spazi localmente convessi, sulle topologie deboli e deboli* .

5) Punti fissi e punti di equilibrio

Suddivisioni simpliciali. Lemmi di Sperner e Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (KKM). Il teorema del punto fisso di Brouwer. Enunciato del teorema di Poincaré-Miranda. Esistenza di punti di equilibrio di Nash (solo enunciato). Punti sella, uguaglianza di minimax e teorema di von Neumann (enunciati).

6) Misura e integrazione.

Spazi di misura. Funzioni misurabili a valori reali: criteri di misurabilità, operazioni algebriche, limiti puntuali. Misure complete e proprietà vere q.o. Teorema di Egorov (senza dimostrazione). Convergenza in misura (definizione ed enunciati). Funzioni semplici e loro integrali. Integrale di Lebesgue astratto: definizione, proprietà elementari, sigma-additività, assoluta continuità. Teoremi sulla convergenza: teorema di Lebesgue, di Beppo-Levi ed enunciato del teorema di Fatou. Definizione dello spazio $L^1(X, \mathcal{A},\mu)$ e sua completezza. Convergenza in L^1 e convergenza in misura. Cenni sull'estensione di misure (definizione ed enunciati, sigma-subadditività della misura esterna). Cenni sugli spazi L^p.

L'esame prevede soltanto una prova orale.

Il professore ufficiale del corso
Angelo Negro